



ANIQ INTEGRALNING AMALIY TADBIQLARI

PhD Kayumova Mexribonu

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

ORCID: 0000-0002-1966-9287

kayumovamexribonu@gmail.com

Abdukarimov Qamariddin

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

ORCID: 0009-0004-7802-1554

qamariddinabdukarimov5@gmail.com

Baxtiyorov Maxsudjon

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

ORCID: 0009-0005-7563-8118

baxtiyorovmaqsud70@gmail.com

Annotatsiya. Mazkur maqolada aniq integralning amaliy tatbiqlari chuqur tahlil etilgan. Dastlab, tekislikdagi geometrik shakllar yuzasini hisoblashda aniq integralning qo'llanilishi tushuntirilgan. Shuningdek, iqtisodiy masalalar, jumladan mahsulot hajmi, mehnat unumdorligi, Djini koeffitsiyenti orqali daromad notekisligini aniqlash kabi misollar keltirilgan. Talab va taklif funksiyalariga asoslangan holda iste'molchi hamda ishlab chiqaruvchining yutuqlari aniq integral yordamida ifodalangan. Har bir mavzu matematik formulalar, grafiklar va hayotiy misollar bilan yoritilgan bo'lib, integral hisoblashning nafaqat nazariy, balki iqtisodiy va ijtimoiy amaliyotdagi ahamiyati ko'rsatib berilgan. Mazkur ish aniq integralni o'rganayotgan talabalar va iqtisodiy masalalarda matematik usullarni qo'llashni istaganlar uchun foydali manba hisoblanadi.

Kalit so'zlar: aniq integral, Djini koeffitsiyenti, talab funksiyasi, taklif funksiyasi, Lorens egri chizig'i, bozor muvozanati, iqtisodiy model, matematik tahlil.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

PhD Каюмова Мехрибону

Ташкентский государственный экономический университет

Абдукаримов Камариддин

Ташкентский государственный экономический университет

Бахтияров Максуджон

Ташкентский государственный экономический университет

Аннотация. В статье дается углубленный анализ практических приложений определенного интеграла. Вначале объясняется применение определенного интеграла при вычислении площади поверхности геометрических фигур на плоскости. Приводятся также примеры экономических проблем, включая объем производства, производительность труда и неравенство доходов через коэффициент Джини. На основе функций спроса и предложения выгоды потребителя и производителя выражаются с помощью определенного интеграла. Каждая тема проиллюстрирована

математическими формулами, графиками и примерами из реальной жизни, демонстрирующими важность интегрального исчисления не только в теории, но и в экономической и социальной практике. Эта работа является полезным источником информации для студентов, изучающих определенные интегралы, а также для тех, кто желает применять математические методы к экономическим задачам.

Ключевые слова: Определенный интеграл, коэффициент Джини, функция спроса, функция предложения, кривая Лоренца, рыночное равновесие, экономическая модель, математический анализ.

PRACTICAL APPLICATIONS OF THE DEFINITE INTEGRAL

PhD Kayumova Mehribonu

Tashkent State University of Economics

Abdukarimov Kamariddin

Tashkent State University of Economics

Bakhtiyarov Maksudjon

Tashkent State University of Economics

Abstract. *This paper provides an in-depth analysis of the practical applications of the definite integral. It begins by explaining the application of the definite integral to calculating the surface area of geometric figures in a plane. Examples of economic problems are also given, including output, labor productivity, and income inequality through the Gini coefficient. Based on the supply and demand functions, consumer and producer surpluses are expressed using the definite integral. Each topic is illustrated with mathematical formulas, graphs, and real-life examples, demonstrating the importance of integral calculus not only in theory but also in economic and social practice. This work is a useful resource for students of definite integrals, as well as for those who wish to apply mathematical methods to economic problems.*

Keywords: *definite integral, Gini coefficient, demand function, supply function, Lorenz curve, market equilibrium, economic model, mathematical analysis.*

Kirish.

Matematik taxlil oliy matematikaning dastlabki va ayni vaqtda asosiy bo'limi bo'lib hisoblanadi. Matematika fanining tobora intensiv rivojlanishi, yangi tushunchalar, yangi g'oyalar bilan boyib borishi bilan uning fan va texnikaning turli sohalariga tadbiiq doirasi kengayib bormoqda, matematika inson faoliyatining barcha sohalariga kirib bormoqda. Matematik tahlil metodlarini bilmay turib tabiatda sodir bo'layotgan jarayonlarni, tabiiy fanlar va texnikaviy adabiyotlarda ko'rilayotgan masalalarni tushunib yetish qiyindir. Ammo aniq integralning amaliy tatbiqlari bu bilan chegaralanib qolmasdan, bulardan tashqari uning yordamida yana juda ko'p masalalar o'z yechimini topadi.

Adabiyotlar sharhi.

Ushbu maqolada foydalanilgan adabiyotlar matematik analiz, xususan aniq integral va uning amaliy tatbiqlari bo'yicha ishonchli va asosiy manbalarni tashkil etadi. Jumladan, Fixtengoltsning (1970) ikki jildidan iborat "Matematik analiz asoslari" asari bu sohadagi klassik qo'llanmalardan biri bo'lib, integral tushunchasining nazariy asoslari va fundamental xossalarini chuqur yoritadi. Azlarov va Mansurovning (1986) ikki qismli "Matematika analiz" darsliklari o'zbek tilidagi muhim manba hisoblanib, ayniqsa talabalar uchun tushunarli tilda yozilganligi bilan ajralib turadi.

Qudaybergenovning (2003) "Matematik analiz kursi" asari ham o'zbek tilida integral va uning amaliy tatbiqlari haqida tizimli va batafsil va aniq ma'lumot beradi. Karimov va To'laganov (2015) tomonidan yozilgan "Matematika va uning amaliy tatbiqlari" kitobi esa

matematikaning turli faoliyat yo'nalishlarida, xususan iqtisodiyotdagi real qo'llanishlarini ochib berishga qaratilgan.

Zamonaviy va xalqaro miqyosdagi manba sifatida Larson va Edwardsning (2014) ingliz tilida yozilgan "Calculus" kitobi keltirilgan bo'lib, u integral hisoblash bo'yicha chuqur nazariy bilimlar va grafik asoslangan yondashuvlarni o'z ichiga oladi. Bu manba butun dunyo miqyosdagi talabalar va o'qituvchilar orasida keng qo'llaniladi.

Umuman olganda, ushbu adabiyotlar integral tushunchasining nazariy va amaliy tomonlarini ochib berishda keng qamrovli, turli til va uslubda yozilgan, ilmiy va o'quv ahamiyatiga ega bo'lgan manbalardir.

Tadqiqot metodologiyasi.

Ushbu tadqiqotda aniq integralning amaliy tatbiqlari, xususan geometrik va iqtisodiy masalalarda qo'llanilishi o'rganildi. Tadqiqotda matematik tahlilning asosiy metodlari va aniq integralning turli sohalariga ta'siri tizimli ravishda ko'rib chiqildi.

Tahlil va natijalar muhokamasi.

Aniq integralning amaliy tatbiqlari ko'plab sohalarida qo'llaniladi. Geometrik shakllarning yuzasini hisoblash orqali grafik asosdagi tahlilga erishiladi. Iqtisodiy masalalarda esa integral yordamida mahsulot hajmi va ishlab chiqarish samaradorligi baholanadi.

Djini koeffitsiyenti orqali jamiyatdagi daromad notekisligi aniq matematik asosda hisoblanadi. Bu ijtimoiy tenglikni o'rganishda muhimdir. Shuningdek, iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlari talab va taklif grafigi orqali integral yordamida aniqlanadi. Bu bozor muvozanatini tushunishga yordam beradi.

Umuman, aniq integral real muammolarni matematik modellashtirishda kuchli vosita bo'lib, nazariy bilimni amaliyot bilan bog'laydi.

Tekislikdagi geometrik shakllarning yuzalarini hisoblash. Bizga ma'lumki, $y = f(x) \geq 0$ funksiya grafigi, $x = a$ va $x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar hamda $y = 0$, ya'ni OX koordinata o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi aniq integral orqali

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi. Bu formulani umumiyroq hollarda qaraymiz.

Agar $[a; b]$ kesmada $f(x) \leq 0$ bo'lsa, unda tegishli egri chiziqli trapetsiya OX o'qidan pastda joylashgan va aniq integral qiymati manfiy son bo'ladi. Shu sababli bu holda egri chiziqli trapetsiya yuzasi

$$S = - \int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (2)$$

formula orqali topiladi.

Aniq integralning ayrim iqtisodiy tatbiqlari. Aniq integral tushunchasi kiritilayotganda, o'zgaruvchan mehnat unumdorligi bo'yicha mahsulot hajmini aniqlash masalasini ko'rgan edik. Masalan, korxonada mehnat unumdorligi har bir ish kuni davomida

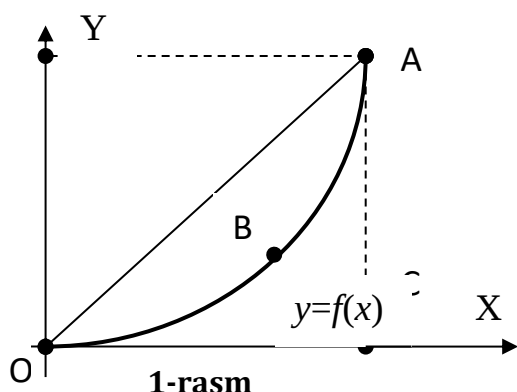
$$z = f(t) = -0,0033 t^2 - 0,089 t + 20,96$$

funksiya bilan berilgan bo'lsin. Bunda $0 \leq t \leq 8$ bo'lib, t vaqtni soatda ifodalaydi. Bu korxonaning yil (258 ish kuni) davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini topamiz:

$$Q = 258 \int_0^8 (-0,0033 t^2 - 0,089 t + 20,96) dt = 258 \cdot (-0,0011 t^3 - 0,0445 t^2 + 20,96 t) \Big|_0^8 = 258 \cdot (-0,5632 - 2,848 + 167,68) = 258 \cdot 164,2688 = 42381,3504$$

Demak, bu korxona bir yilda 42381 dona mahsulot ishlab chiqaradi. Biz bu yerda yana bir qator iqtisodiy masalalarni aniq integral yordamida yechilishi bilan tanishamiz.

Djini koeffitsiyentini hisoblash masalasi. Aholi o'rtasida daromadni qanchalik darajada notekis taqsimlanganligini ifodalovchi $y=f(x)$, $x \in [0,1]$, funktsiyani qaraymiz (keyingi betdagi 1-rasmga qarang). Bunda y – daromad ulushini, x – aholi ulushini belgilaydi.



Bu funktsiya grafigini ifodalovchi OBA egri chiziq Lorents egri chizig'i deyiladi.

Daromad aholi o'rtasida tekis taqsimlangan holda $y=x$ bo'ladi va bunda Lorents egri chizig'i bissektisadagi OA kesmaga aylanadi. Shu sababli har qanday $x \in [0,1]$ uchun $0 \leq f(x) \leq x$ qo'sh tengsizlik bajariladi. Bunda OABO geometrik shakl yuzasi qanchalik katta bo'lsa, daromadni notekis taqsimlanish darajasi ham shunchalik katta bo'ladi. Shu sababli aholi o'rtasida daromadni notekis taqsimotini o'lchovi sifatida OABO shakl

yuzasini OAC uchburchak yuzasiga nisbati olinadi. Bu nisbat Djini koeffitsiyenti deb ataladi va k orqali belgilanadi. Bu yerda yuzalarni aniq integral orqali ifodalab, Djini koeffitsiyenti uchun

quyidagi formulani hosil etamiz:
$$k = \frac{S_{OABO}}{S_{OAC}} = \frac{\int_0^1 [x - f(x)] dx}{\int_0^1 x dx} = 2 \int_0^1 [x - f(x)] dx$$
 Masalan, Lorents

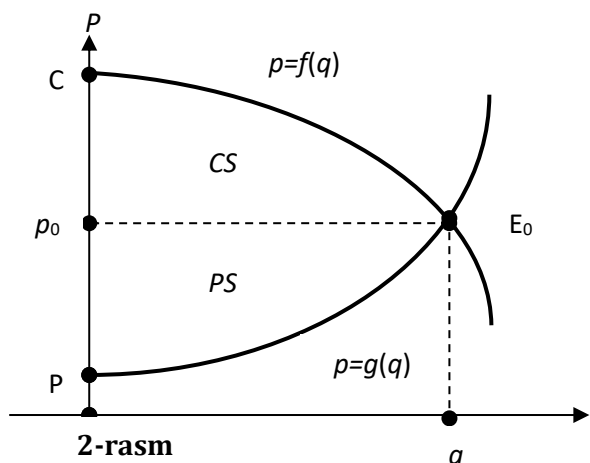
egri chizig'i $y=x/(3-2x)$, $x \in [0,1]$, funktsiya bilan berilgan holda Djini koeffitsiyentini (11) formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} k &= 2 \int_0^1 \left(x - \frac{x}{3-2x} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(x + \frac{x-1,5+1,5}{2x-3} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} \right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cdot \ln |2x-3| \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \ln 3 \right) \approx 0,352 \end{aligned}$$

Iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlari masalasi. Dastlab talab va taklif funksiyalari tushunchalarini kiritamiz.

Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni iste'molchi tomonidan xarid qilinish halmi q orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $p=f(q)$ funktsiya talab funksiyasi deb ataladi. Iqtisodiyotda

narx p , hajm (miqdor) q harfi bilan belgilanadi va shu sababli talab funksiyasi an'anaviy $y=f(x)$ ko'rinishda yozilmasdan, $p=f(q)$ ko'rinishda yozildi (2-rasmga qarang). Mazmuniga asosan bu funktsiya kamayuvchi bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni xarid qilish hajmi q kamayadi (yuqoridagi chizmaga qarang).



Mahsulot birligining narxi p va shu mahsulotni ishlab chiqarilish hajmi q orasidagi bog'lanishni ifodalovchi $p=g(q)$ funktsiya taklif funksiyasi deb ataladi. Mazmuniga asosan bu funktsiya o'suvchi

bo'ladi, chunki mahsulot narxi p oshishi bilan bu mahsulotni ishlab chiqarish hajmi q oshadi (yuqoridagi chizmaga qarang).

Talab va taklif funksiyalarning grafiklari qandaydir bir $E_0(q_0, p_0)$ nuqtada kesishadi. Bu nuqtada iste'molchining talabi hajmi va ishlab chiqaruvchining taklif hajmi o'zaro teng bo'ladi. Bunday holat bozor muvozanati deb ataladi. Bozor muvozanatini keltirib chiqaruvchi mahsulot

hajmi q_0 va narxi p_0 qiymatlari berilgan talab va taklif funksiyalari bo'yicha
$$\begin{cases} f(q) = p \\ g(q) = p \end{cases}$$
 (4) tenglamalar sistemasidan topiladi.

Bozor muvozanati shartida iste'molchilar o'zlarining q_0 hajmdagi talablarini qondirishlari uchun mahsulot birligining p_0 narxda xarid qilib, jami $p_0 q_0$ miqdorda xarajat qilishlari mumkin. Ammo bir qism iste'molchilar u yoki bu sabablar bo'yicha mahsulot xarid qilishni bozor muvozanati erishiladigan vaqtgacha kutib o'tira olmaydilar. Bundan tashqari ishlab chiqaruvchi ham o'z mahsulotini iloji boricha p_0 narxdan yuqoriroq bahoda sotishga harakat qiladi. Shu sababli iste'molchi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni ishlab chiqaruvchi bozorga birdaniga chiqarmasdan va uning hammasini birdaniga p_0 narxda sotmasdan, u o'z mahsulotini Δq_i ($i=1, 2, 3, \dots, n$) hajmdagi kichik-kichik partiyalarda bozorga chiqarib, uni $f(q_i) > p_0$ narxda sotadi. Natijada iste'molchi o'ziga kerak bo'lgan q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun $p_0 q_0$ miqdorda xarajat qilish o'rniga

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n f(q_i) \Delta q_i$$

miqdor xarajat qiladi. Mahsulot ishlab chiqarish va uni xarid qilish jarayonlari uzluksiz ravishda ro'y berib turadi. Shu sababli $f(x)$ talab funksiyasini uzluksiz va mahsulotni kichik-kichik Δq_i hajmli partiyalar soni $n \rightarrow \infty$ deb olish mumkin. Bu holda, aniq integral ta'rifiga asosan, iste'molchining q_0 hajmdagi mahsulotni xarid qilish uchun qilgan xarajatining asl qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(q_i) \Delta q_i = \int_0^{q_0} f(q) dq$$

Bu yerdan ko'rinadiki, agar iste'molchi o'zi talab etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 bozor muvozanati narxida xarid qilganda, uning xarajatlari

$$CS = S - p_0 q_0 = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq$$

miqdorda kam bo'lar edi. Shu sababli CS iste'molchining yutug'i, ba'zan esa iste'molchining ortiqcha xarajati deb yuritiladi. Yuqoridagi 2-rasmda bu ko'rsatkich $p_0 E_0C$ egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Xuddi shundek, ishlab chiqaruvchi bozor muvozanatida o'zi taklif etgan q_0 hajmdagi mahsulotni p_0 narxda sotganda $p_0 q_0$ miqdordagi pul mablag'iga ega bo'lar edi. Ammo u bozor muvozanati bo'lishini kutib o'tirmasdan, Δq_i hajmda ($i=1, 2, 3, \dots, n$) ishlab chiqargan mahsulotini darhol bozorga chiqarib, uning har birligini $g(q_i) < p_0$ narxda sotadi. Natijada ishlab chiqaruvchining q_0 hajmdagi mahsulotni sotish orqali erishgan asl pul mablag'i quyidagicha bo'ladi:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(q_i) \Delta q_i = \int_0^{q_0} g(q) dq < p_0 q_0$$

Shunday qilib, ishlab chiqaruvchi o'z mahsulotini bozor muvozanati shartida sotganda

$$PS = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} g(q) dq = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] dq$$

qoshimcha pul mablag'iga ega bo'lar edi. Shu

sababli PS ishlab chiqaruvchining yutug'i deb ataladi. Yuqoridagi 2-rasmda bu ko'rsatkich $P - p_0 E_0$ egri chiziqli trapetsiya yuzasi kabi ifodalanadi.

Masalan, talab funksiya $p=f(q)=240-q^2$, taklif funksiya esa $p=g(q)=q^2+2q+20$ ko'rinishda bo'lganda iste'molchi va ishlab chiqaruvchi yutuqlarini aniqlaymiz. Buning uchun dastlab ushbu tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} p = 240 - q^2 \\ p = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ 240 - q^2 = q^2 + 2q + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 240 - q^2 \\ q^2 + q - 110 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 140 \\ q_0 = 10 \end{cases}$$

Demak, bozor muvozanati narxi $p_0=140$, hajmi esa $q_0=10$ bo'ladi. Unda, (6) formulaga asosan, iste'molchining yutug'i

$$CS = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0] dq = \int_0^{10} [240 - q^2 - 140] dq = \left(100q - \frac{q^3}{3} \right) \Big|_0^{10} = 666, (6) \approx 667$$

ishlab chiqaruvchining yutug'i esa, (7) formulaga asosan,

$$PS = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)] dq = \int_0^{10} [120 - q^2 - 2q] dq = \left(120q - \frac{q^3}{3} - q^2 \right) \Big|_0^{10} = 766, (6) \approx 767$$

Xulosa va takliflar.

Xulosa Aniq integral tushunchasi nafaqat matematik tahlilning muhim qismi, balki uning amaliy tatbiqlari orqali ham turli sohalarida muhim rol o'ynaydi. Ushbu ishda aniq integral yordamida: Geometrik shakllarning yuzasini hisoblash, Iqtisodiy jarayonlarda mahsulot hajmi va daromad taqsimotini tahlil qilish, Djini koeffitsiyenti orqali jamiyatdagi daromad notekisligini baholash, Iste'molchi va ishlab chiqaruvchining yutuqlarini aniqlash kabi masalalar ko'rib chiqildi. Har bir mavzu aniq misollar bilan yoritilgan va integralning iqtisodiy hamda geometrik sohalarida qanday qo'llanishi batafsil tahlil qilingan.

Adabiyotlar /Jumepamypa/Reference:

- Azlarov T.A., Mansurov X. (1986) "Matematika analiz". 1-qism. –T., O'qituvchi.
 Azlarov T.A., Mansurov X. (1989) "Matematika analiz". 2 – qism. T., O'qituvchi.
 Fixtengolts G. (1970) "Matematik analiz asoslari". I, II tom – Toshkent O'qituvchi.
 Karimov R., To'laganov S. (2015) Matematika va uning amaliy tatbiqlari. – Toshkent, Universitet.
 Kudaybergenov S. (2003) Matematik analiz kursi. – Toshkent, Fan.
 Larson, R., Edwards, B.H. (2014) Calculus. – Cengage Learning, 2014.