

**Мирзоева Кабира Адилевна**

кандидат физико-математических наук,  
старший преподаватель кафедры Компьютерные  
Науки Азербайджанского Государственного  
Педагогического Университета

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ****Mirzoeva Kabira Adil**

candidate of physical and mathematical sciences,  
Senior Lecturer, Computer Department  
Science of Azerbaijan State  
Pedagogical University

**LONGITUDINAL VIBRATION OF VISCOELASTIC RODS**

**Аннотация.** Среди динамических задач вязкоупругости следует выделить задачу о колебании вязкоупругих стержней, решения которых сводятся к интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра II рода. Решение этого уравнения требует задания аналитического вида ядра, либо решается различными численными методами. В данной работе предлагается приближенное решение этого интегро-дифференциального уравнения для произвольных ядер при малой вязкости.

**Summary** Among the dynamic problems of viscoelasticity, one should single out the problem of the oscillation of viscoelastic rods, the solutions of which are reduced to the Volterra integro-differential equation of the second kind. The solution of this equation requires specifying the analytical form of the kernel, or is solved by various numerical methods. In this paper, we propose an approximate solution to this integro-differential equation for arbitrary nuclei with low viscosity.

**Ключевые слова:** вязкоупругость, продольное колебание, плотность, изображение, оригинал, мгновенный модуль упругости, метод усреднения.

**Key words:** visco-elasticity, longitudinal vibration, density, image, original, instantaneous elastic modulus, averaging method.

**Введение.** Известно, что при решении нестационарных динамических задач для различных конструкций аналитический вид ядер релаксации не задается. Поэтому решения строятся с помощью некоторых приближенных методов, которые приводят окончательное решение к интегро-дифференциальным уравнениям колебаний вязкоупругих систем, реализуемые методом усреднения, методом замораживания, методом продолжений и методом интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Меллина и их комбинаций.

Однако, методы интегральных преобразований неразрывно связаны со сложными задачами обратного преобразования, которые в случае более реальных соотношений между напряжением и деформацией неизбежно приводят к необходимости большего числа разрезов по ветвям в процессе контурного интегрирования.

В данной работе предлагается приближенное решение уравнения продольных колебаний

вязкоупругих стержней для произвольных ядер при малой вязкости. Изображение решения представлено в виде ряда, оригиналом первого члена которого является решение этого уравнения, полученного методом усреднения, а учет последующих членов улучшает точность решения поставленной задачи.

**Постановка и решение задачи.** Знаем, что уравнение о продольных колебаниях упругих стержней имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

Где  $E = 2\mu(1 + \nu) = 2G(1 + \nu)$ ,

$\nu$  - число Пуассона, которые меняются в небольших пределах и поэтому в дальнейшем считается постоянным,  $\rho$  - плотность материала,  $E$  - мгновенный модуль Юнга.  $u(x, t)$  - перемещение,  $\mu$  - постоянная Ламе.

Заменяя в (1)  $\mu$  на  $\mu - \mu^*$  находим

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 2\mu(1 + \nu) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - 2(1 + \nu)\mu^* \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Здесь

$$2(1 + \nu)\mu^* = (1 + \nu) \int_0^t \tilde{\Gamma}(t - \tau) \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau$$

Учитывая это в последнем уравнении, определяем

$$\tilde{\Gamma}(t) = 2GR(t)$$

Если принять обозначение

И предположить, что материал стержня обладает малой вязкостью, то интеграл  $\int_0^t R(s)ds$  является положительным и малой сравнительно единице, поэтому  $\int_0^t R(s)ds = \varepsilon \int_0^t R(s)ds \leq \varepsilon$

Тогда получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E \left[ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} d\tau \right] \quad (2)$$

Начальное условие примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi_0(x) nput = 0 \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \phi_1(x) nput = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

А граничные условия примем в виде:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0 nput = 0 \\ u(x, t) &= 0 nput = l \end{aligned} \quad (4)$$

Где  $l$  - длина стержня.

Частное решение уравнения (2), тождественно не равное нулю ищем в виде:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Учитывая это в (2) для нахождения функций  $X(x)$  и  $T(t)$ , получаем два независимых уравнения

$$\begin{aligned} X''(x) + \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 X(x) &= 0 \\ T''(t) + \lambda^2 T(t) &= \varepsilon \lambda^2 \int_0^t R(t-\tau) T(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

Решая первое уравнение при граничных условиях (4), находим

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda_k^2 R(p)}{p^2 + \lambda_k^2} \right| < 1$$

Тогда уравнение (7) представим в виде:

$$\bar{T}_k(p) = \frac{p\phi_0 + \phi_1}{p^2 + \lambda_k^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}(p)}{p^2 + \lambda_k^2}}$$

Или

$$\bar{T}_k(p) = \frac{p\phi_0 + \phi_1}{p^2 + \lambda_k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}(p)}{p^2 + \lambda_k^2} \right)^n \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}(p)}{p^2 + \lambda_k^2} &: \varepsilon \lambda_k \int_0^t \sin \lambda_k (t-\tau) R(\tau) d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda_k \sin \lambda_k t \int_0^t R(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau - \varepsilon \lambda_k \cos \lambda_k t \int_0^t R(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda_k \sin \lambda_k t \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau - \varepsilon \lambda_k \cos \lambda_k t \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau - \\ &- \varepsilon \lambda_k \sin \lambda_k t \int_t^{\infty} R(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau + \varepsilon \lambda_k \cos \lambda_k t \int_t^{\infty} R(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau \end{aligned}$$

$$X_k(x) = \cos \frac{\lambda_k x}{c}$$

Где

$$\lambda_k = \pm \frac{k\pi c}{l}; k = 0, 1, 2, \dots$$

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - скорость распространения волн.

Таким образом, общее решение уравнения колебания вязкоупругого стержня имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) \quad (6)$$

где  $X_k(x)$  - координатные функции, найденные при решении соответствующей упругой задачи и не зависят от параметров, характеризующих вязкое свойства материала стержня, а функция  $T_k(t)$  является решением интегро-дифференциального уравнения (5).

Таким образом, задача определения смещения в стержне сводится к определению функций  $T_k(t)$  из уравнения (5).

Применяя интегральное преобразование Лапласа к уравнению (5) по времени  $t$  и учитывая (3), получаем:

$$\bar{T}_k(p) = \frac{p\phi_0 + \phi_1}{p^2 + \lambda_k^2 - \varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}} \quad (7)$$

Здесь при малых значениях времени параметр  $p$  - является достаточно большим. Если мы рассматриваем материалы с мгновенной упругостью, то изображение  $\bar{R}(p)$  с увеличением  $p$  стремится к нулю, поэтому выполняется неравенство

Если принять следующее обозначение

$$R_s = \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau, R_c = \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau$$

$$A(t) = \sin \lambda_k t \int_t^{\infty} R(\tau) \cos \lambda_k \tau d\tau - \cos \lambda_k t \int_t^{\infty} R(\tau) \sin \lambda_k \tau d\tau$$

То находим

$$\frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}(p)}{p^2 + \lambda_k^2} \doteq \varepsilon \lambda_k R_c \sin \lambda_k t - \varepsilon \lambda_k R_s \cos \lambda_k t - \varepsilon \lambda_k A(t)$$

Последняя формула в изображениях Лапласа будет в виде:

$$\frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{R}(p)}{p^2 + \lambda_k^2} = \frac{\varepsilon \lambda_k^2 R_c - \varepsilon \lambda_k p R_s - \varepsilon \lambda_k (p^2 + \lambda_k^2) \bar{A}(p)}{p^2 + \lambda_k^2}$$

Учитывая это в (8), получаем:

$$\bar{T}_k(p) = \frac{p\phi_0 + \phi_1}{\bar{a}(p) - \varepsilon \lambda_k^2 \bar{b}(p)} \quad (9)$$

где

$$\bar{a}(p) = \left( p + \frac{1}{2} \varepsilon R_s \lambda_k \right)^2 + \lambda_k^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c \right)^2$$

$$\bar{b}(p) = \bar{R}(p) + R_s \frac{p}{\lambda_k} + R_c + \frac{\varepsilon}{4} (R_s^2 + R_c^2)$$

Здесь  $\left| \frac{\varepsilon \lambda_k^2 \bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right| < 1$

Поэтому формулу (9) можем написать в виде:

$$\bar{T}_k(p) = \frac{p\phi_0 + \phi_1}{\bar{a}(p)} \left[ 1 + \varepsilon \lambda_k^2 \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} + \varepsilon^2 \lambda_k^4 \frac{\bar{b}^2(p)}{\bar{a}^2(p)} + \dots \right] \quad (10)$$

Отсюда для первого члена после обратное преобразования Лапласа находим:

$$T_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon R_s \lambda_k t\right) \left[ \phi_0 \cos \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) t + \frac{\phi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_s \lambda_k}{\lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right)} \sin \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) t \right] \quad (11)$$

Последняя формула является решением поставленной задачи, полученное методом усреднения. Для нахождения следующего приближения представим его в виде:

$$T_2(t) = \varepsilon \lambda_k^2 T_{k_0}(t) * L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right] \quad (12)$$

Где

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

$L^{-1}$ - оператор обратного преобразования Лапласа. Значит, надо вычислить оригинал функций  $\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}$ . С этой целью представим его в виде:

$$\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} = \frac{\bar{R}(p)}{\bar{a}(p)} + \frac{R_s}{\lambda_k} \cdot \frac{p + d}{\bar{a}(p)};$$

Где  $d = \frac{R_c}{R_s} \lambda_k + \frac{\varepsilon \lambda_k}{4 R_s} (R_s^2 + R_c^2)$

Тогда

$$L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right] = R(t) * \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} R_s \lambda_k t\right) \cdot \frac{\sin \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) t}{\lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) \varepsilon R_c} +$$

$$+ \frac{R_s}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon R_s \lambda_k t\right) \left[ \cos \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) t + \frac{d - \frac{\varepsilon}{2} R_s \lambda_k}{\lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right)} \sin \lambda_k \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c\right) t \right] \quad (13)$$

Восстановление оригиналов следующих приближений ряда (11) не представляет трудности.

Из (11) и (12) выходит, что наличие вязкости материала в (2) приводит к затуханию сводных колебаний стержня по экспоненциальному закону и наблюдается сдвиг фазы.

Для вычисления влияния члена (12) на решение, рассмотрим ядро Ржаницина  $R(t) = \varepsilon t^{\alpha-1} \exp(-\beta t)$

Где  $0 < \alpha < 1, \beta$  - постоянная,  $\varepsilon$  - некоторый малый параметр.

Для этого ядра из формулы (12) получаем

$$\begin{aligned}
 T_2(t) = & \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda R_s t\right) \left\{ \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t + \frac{\varepsilon A_4}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t \right] \cdot \right. \\
 & \cdot \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} \sin 2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) \tau d\tau + \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t \right] \times \\
 & \times \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} d\tau - \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t \right] \cdot \\
 & \cdot \int_0^t e^{-\beta\tau} \tau^{\alpha-1} \cos 2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) \tau d\tau + \frac{t}{2} (A_2 - A_6) \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t + \\
 & \left. + \left[ \frac{A_2 + A_6}{2\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)} + \frac{t}{2} (A_3 + A_5) \right] \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right) t \right\} \text{ где} \\
 & R_s = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \sin \left[ \alpha \arctg \left( \frac{\lambda}{\beta} \right) \right] \\
 & R_c = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \cos \left[ \alpha \arctg \left( \frac{\lambda}{\beta} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$\Gamma(\alpha)$ - гамма функция Эйлера.

$$\begin{aligned}
 A_1 = & \frac{\varepsilon\lambda\phi_0}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c}; A_2 = \varepsilon\lambda\phi_0 R_s; A_3 = \frac{\varepsilon R_s \phi_0 \left(d - \frac{1}{2}\varepsilon R_s \lambda\right)}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c}; \\
 A_4 = & \frac{\varepsilon \left(\phi_1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_s \phi_0\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)^2}; A_5 = \frac{\varepsilon R_s \left(\phi_1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_s \phi_0\right)}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c} \\
 A_6 = & \frac{\varepsilon R_s \left(\phi_1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_s \phi_0 \lambda\right) \left(d - \frac{1}{2}\varepsilon R_s \lambda\right)}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)^2}
 \end{aligned}$$

Для полипропилена на рисунке построены графики функций  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  при следующих значениях параметров:  $\alpha = 0.1; \beta = 0.05; \varepsilon = 0.09; \phi_0 = 0; \phi_1 = 1$

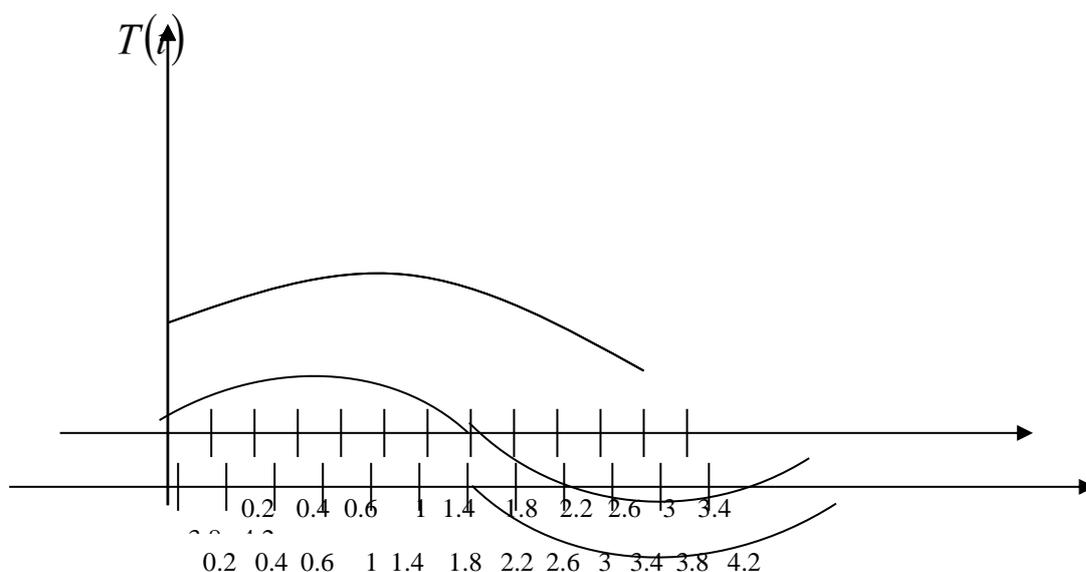


Рис.1. Зависимость частоты колебаний оболочки при разных видах ядер ползучести.

Из рисунка видно, что учет последующих членов ряда улучшает точность решения, так как при низших значениях частоты погрешность мала, а с увеличением частоты она увеличивается. При  $\lambda = 100$  амплитуда  $T_2(t)$  при некоторых значениях времени составляет 20 – 25% амплитуды  $T_1(t)$ .

Для вычислений и получения значений целью построения графиков создана программа расчета на алгоритмическом языке DELPHI 7.

#### Литература

1. Кийко И.А., Ильясов М.Х. Динамическое кручение вязкоупругих цилиндрических стержней

// Механика полимеров: Сб. науч. Тр. / АН СССР. 1975. №3, С. 482-492

2. Ларионов Г.С. Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения // Механика полимеров, 1969, № 5, С. 806-813

3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / М., Наука, 1977

4. Brilla, J. Laplace transform and new mathematical theory of viscoelasticity / J. Brilla // Meccanica. 1997. Vol. 32, № 3. - P. 187-195.

5. Joseph, D. D. Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids / D.D.Joseph // Springer-Verlag, 1990.

УДК 539.3:534.26