

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА**

На правах рукописи
УДК 517.946

Уразбоев Гайрат Уразалиевич

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ
УРАВНЕНИЙ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ**

01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2007

Работа выполнена на кафедре «Математическая физика и прикладная математика» Ургенчского государственного университета

Научный консультант: Доктор физико – математических наук,
профессор Хасанов Акназар Бекдурдиевич

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,
профессор Отелбаев Мухтарбай Отелбаевич

Доктор физико-математических наук,
профессор Ашуров Равшан Раджабович

Доктор физико-математических наук,
профессор Фаязов Кудратилло Садриддинович

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2007 г. в _____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д067.02.03 в Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико – математический факультет, ауд. Г–303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «___» _____ 2007 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико – математических наук

А.А.Абдушукуров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. До 60-х годов прошлого столетия считалось, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

может иметь только некоторые частные решения, удовлетворяющие специально заданным начальным условиям. Однако, в 1967 году американские учёные К.С.Гарднер, Дж.М.Грин, М.Крускал и Р.Миура (ГГКМ) показали, что решение уравнения КдФ может быть получено для всех «быстроубывающих» начальных условий, т.е. условий которые определенным образом обращаются в нуль при стремлении координаты к бесконечности. Этот метод получил название метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), поскольку в нем существенно используется решение задачи о восстановлении потенциала оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y,$$

на всей оси, по данным рассеяния (обратная задача теории рассеяния).

Обратная задача теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах И.Кея и Х.Мозеса, Л.Д.Фаддеева, В.А.Марченко, Б.М.Левитана, П.Дейфта и Е.Трубовица и др.

Вскоре, после работ ГГКМ, П.Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего (общего) уравнения КдФ.

В своей оригинальной работе В.Е.Захаров и А.Б.Шабат показали, что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t \pm 2u^2 u^* + u_{xx} = 0, \quad (2)$$

встречающееся при изучении оптической самофокусировки и расщеплении оптических пучков, также включается в формализм метода обратной задачи рассеяния (здесь и далее u^* комплексно-сопряженная функция к функции u). Используя прием, предложенный П.Лаксом, они смогли решить уравнение (2) для заданных начальных $u(x,0)$, достаточно быстро убывающих при $|x| \rightarrow \infty$.

Вскоре М.Вадати, используя идеи работы В.Е.Захарова и А.Б.Шабата, предложил метод решения модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (мКдФ)

$$u_t \pm 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (3)$$

которое встречается при решении некоторых задач физики плазмы.

Захаров В.Е., Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, а также М.Абловиц, Д.Кауп, А.Ньюэлл и Х.Сигур, показали, что МОЗР может быть применен и к решению уравнения sin-Гордон

$$u_{xt} = \sin u, \quad (4)$$

которое возникло при изучении поверхностей постоянной отрицательной кривизны и описывает уравнение вложения плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. Уравнение (4) встречается и в задачах оптики.

Применение метода обратной задачи рассеяния для уравнений (2)-(4) опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака

$$D = \sigma_1 \frac{d}{dx} + q(x)\sigma_2 + r(x)\sigma_3,$$

где σ_1 , σ_2 и σ_3 матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах М.Г.Гасимова, Б.М.Левитана, В.Е.Захарова, А.Б.Шабата, И.С.Фролова, Л.П.Нижника, Фам Лой Ву, Л.А.Тахтаджяна, Л.Д.Фаддеева, А.Б.Хасанова и др.

Дальнейшее развитие метода обратной задачи рассеяния связано с применением к дифференциально – разностным системам. К числу таких систем принадлежит система уравнений, описывающая динамику одномерной цепочки частиц с экспоненциальным взаимодействием ближайших соседей:

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \exp(u_{n-1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n+1}), \quad n \in Z, \quad (5)$$

где $u_n(t)$ можно понимать как координату n -го атома в решетке. Система (5) называется цепочкой Тоды, в честь японского физика Моракизу Тоды, который в 1970 году рассмотрел решетку такого типа и обнаружил точное его решение.

Уравнения (5) тождественно переписываются в виде

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \end{cases} \quad n \in Z, \quad (6)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{u_n - u_{n+1}}{2}\right), \quad b_n = \frac{1}{2} \dot{a}_n, \quad n \in Z.$$

В работах С.В.Манакова и Н.Флашки показана возможность интегрирования цепочки Тоды при помощи задачи рассеяния для разностного оператора Штурма-Лиувилля

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}, \quad n \in Z.$$

Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля была развита в работах К.Кейса и М.Каца, и в различных постановках изучалась в работах В.Г.Тарнопольского, М.С.Эскиной и Г.Ш.Гусейнова.

В 1988 году Л.П.Нижник предложил пространственную двумеризацию модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза.

Вышеуказанные результаты показывают мощьность и многосторонность МОЗР для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, интересных с точки зрения физических приложений, этим и объясняется актуальность рассматриваемой диссертационной темы.

Степень изученности проблемы. В ходе попытки построить более широкий класс интегрируемых систем, в работе М.Абловица, Д.Каупа, А.Ньюэлла и Х.Сигура, стала ясна

важность квадратов собственных функций в задачах на собственные значения для оператора Дирака. Таким образом, как показал А.Ньюэлл, именно квадраты собственных функций, а не сами собственные функции играют центральную роль в задачах интегрируемых с помощью метода обратной задачи для оператора Дирака. В случае уравнения Штурма-Лиувилля, этот факт был строго обоснован в работах Ф.Калоджеро и А.Дегаспериса. В работах В.К.Мельникова по нелинейным эволюционным уравнениям с самосогласованным источником, с помощью метода обратной задачи рассеяния были проинтегрированы уравнения КдФ с самосогласованным источником, в классе «быстроубывающих» функций. Отметим, также, что в работе Ж.Леона и А.Латифи приведена конкретная физическая задача, которая сводится к решению уравнения КдФ с самосогласованным источником.

В первой главе данной диссертации исследуется общее уравнение КдФ с различными самосогласованными источниками.

В связи с применением к конкретным физическим задачам возникла необходимость рассмотрения нелинейных эволюционных уравнений не только в классе «быстроубывающих» функций, но в классах функций специального вида, а именно: конечнозонных, ступенчатых, периодических, периодических плюс убывающих и др.

Теория конечнозонных решений нелинейных эволюционных уравнений берет своё начало из работ С.П.Новикова. Как теория конечнозонного интегрирования она оформилась в работах Б.А.Дубровина, С.П.Новикова, А.Р.Итса, В.Б.Матвеева и др.

В работе Е.Я.Хрусова, с помощью метода обратной задачи рассеяния, была решена задача Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа «ступеньки», т.е. данных, которые «быстроубывают» на одной бесконечности и определенным образом стремятся к постоянной отличной от нуля при стремлении координаты к другой бесконечности. Эта задача впервые рассматривалась в работах А.В.Гуревича и А.П.Питаевского, где приближенным методом Уизема было построено асимптотическое решение уравнения КдФ, выраженное через эллиптические функции Якоби с медленно меняющимися параметрами. Задача рассеяния, для оператора Штурма-Лиувилля со «ступенчатым» потенциалом, была решена в работах В.Буслаева, В.Фомина и А.Кохена. Хорошо известно, что для «быстроубывающего» потенциала непрерывный спектр оператора Штурма-Лиувилля заполняет положительную полуось и является двукратным. В случае «ступенчатого» потенциала на положительной оси появляется участок простого непрерывного спектра конечной длины, что является причиной возникновения у уравнения КдФ бесконечного числа невзаимодействующих солитонов в окрестности переднего фронта при $t \rightarrow \infty$.

Во второй главе диссертации выводится эволюция данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения КдФ и общего уравнения КдФ с источником, в классе ступенчатых функций.

В работе В.К.Мельникова были получены эволюции данных рассеяния по t самосопряженного оператора Дирака с потенциалом являющимся решением нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником интегрального типа.

В случае несамосопряженного оператора Дирака ситуация усложняется. Как показано в работах М.А.Наймарка, Б.С.Павлова, В.Э.Лянце и В.А.Блашака несамосопряженный оператор может иметь спектральные особенности, которые лежат на непрерывном спектре. Кроме этого, несамосопряженный оператор имеет конечное число (в общем случае кратных) комплексных собственных значений. Данные рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, уже включают в себя вклад дискретного спектра и спектральных особенностей.

Третья глава диссертации посвящена интегрированию нелинейных эволюционных уравнений $\sin$ -Гордон, мКдФ и НУШ с самосогласованным источником в случае, когда соответствующий оператор Дирака имеет простые собственные значения.

Идея Ньюэлла о разложении решения нелинейного уравнения по квадратам собственных функций соответствующего оператора Дирака относится к случаю, когда этот оператор имеет простые собственные значения. В связи с этим, задача о решении нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, соответствующим кратным собственным значениям оператора Дирака является актуальной.

В четвертой главе диссертации исследуется вопрос об интегрировании уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником, который соответствует кратным собственным значениям оператора Дирака.

В недавних работах китайских математиков Xing-Biao Hu, Hong-Yan Wang, Da-jun Zhang, Xiaojun Liu, Yunbo Zeng, Da-jun Zhang, Deng-yuan Chen методы Хироты и преобразования Дарбу применены для решения различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в случае простых собственных значений соответствующей спектральной задачи. В частности, в работе Xiaojun Liu и Yunbo Zeng рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником и методом преобразования Дарбу строятся его решения.

Пятая глава данной диссертации посвящена интегрированию цепочки Тоды с различными самосогласованными источниками методом обратной задачи рассеяния. Отметим, что в работе Xiaojun Liu и Yunbo Zeng самосогласованный источник ставится для цепочки Тоды вида (5), а в настоящей диссертации в виде (6).

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР.

Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Ургенчского государственного университета имени Аль-Хорезми (протокол № 1 от 12 сентября 2002 г.) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры «Математическая физика и прикладная математика » УрГУ.

Цель исследования. Основной целью настоящей работы является вывод эволюции данных рассеяния спектральной задачи, связанной с нелинейными эволюционными уравнениями с самосогласованным источником.

Задачи исследования. Основные задачи решаемые в данной работе следующие:

- изучение динамики изменения по t спектральных характеристик оператора Штурма-Лиувилля, с потенциалом являющимся решением общего

уравнения Кортевега – де Фриза с источником, в классе «быстроубывающих» функций;

- вывод эволюции данных рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения КдФ и общего уравнения КдФ с источником, в классе ступенчатых функций;

- исследование нелинейных эволюционных уравнений, с самосогласованным источником в случае простых собственных значений, соответствующей несамосопряженной спектральной задачи;

- определение эволюции данных рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, с кратными собственными значениями, потенциал которого является решением уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником;

- интегрирование цепочки Тоды с самосогласованным источником.

Объект и предмет исследования. Интегрирование различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы математической физики, дифференциальных уравнений, теории функций комплексных переменных, спектральной теории дифференциальных и разностных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

- 1) выведена динамика изменения по t спектральных параметров оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом являющимся решением общего уравнения Кортевега – де Фриза с источником, в классе «быстроубывающих» функций.

- 2) определена эволюция данных рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения Кортевега – де Фриза в классе ступенчатых функций.

- 3) изучена интегрируемость общего уравнения КдФ с источником при начальных данных типа «ступеньки».

- 4) метод обратной задачи рассеяния применен к решению различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в случае простых собственных значений соответствующей несамосопряженной спектральной задачи.

- 5) показана возможность применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником в случае кратных собственных значений оператора Дирака.

- 6) решение цепочки Тоды с самосогласованным источником выражено в рамках метода обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Выведена динамика изменения по t спектральных характеристик оператора Штурма-Лиувилля, с потенциалом являющимся решением общего

уравнения Кортевега – де Фриза с источником, в классе «быстроубывающих» функций.

2. Определена эволюция данных рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения Кортевега – де Фриза, в классе ступенчатых функций.

3. Изучена интегрируемость общего уравнения КдФ с источником, при начальных данных типа «ступеньки».

4. Метод обратной задачи рассеяния применен к решению различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в случае простых собственных значений соответствующей несамосопряженной спектральной задачи.

5. Показана возможность применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником, в случае кратных собственных значений оператора Дирака.

6. Решение цепочки Тоды с самосогласованным источником выражена в рамках метода обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля.

Научная и практическая значимость результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

Апробация работы. Диссертационная работа выполнена в Ургенчском государственном университете. Основные задачи, решённые в диссертации, были сформулированы в результате многочисленных обсуждений с профессором А.Б.Хасановым.

Результаты диссертации систематически докладывались на семинаре «Спектральная теория дифференциальных операторов и их приложения» Ургенчского государственного университета (руководитель: проф. А.Б.Хасанов); на семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» Национального университета Узбекистана (руководитель академик АН РУз Ш.А.Алимов); на общегородском семинаре по дифференциальным уравнениям «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных» Института математики АН РУз (руководители академики АН РУз М.С.Салахиддинов и Т.Д.Джураев).

Результаты диссертации докладывались также на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика АН РУз Ш.А.Аюпова в Институте математики и информационных технологий АН РУз, на семинаре кафедры «Математическая физика» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (руководитель проф. Э.А.Тропп); на международной конференции по функциональному анализу посвященной 200-летию со дня рождения М.В.Остроградского, Киев, 22-26 августа 2001 года; на второй международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посвящённой 80-летию члена-корреспондента РАН Л.Д.Кудрявцева, Москва, 24-26 марта 2003 года; на школе-конференции «Геометрический анализ и его

приложения» ВолГУ, Волгоград 24-30 мая 2004 года; на международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий», Алма-Аты, 20-22 сентября 2006 года; на международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии», Ташкент, 26-29 ноября 2003 года; на международной научной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики», Ташкент 16-19 ноября 2004 года; на международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационных технологий», Ташкент, 18-24 апреля 2005 года; на республиканской научной конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа», Нукус, 25-27 июня 2006 года; на международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» посвященной 100 – летию академика И.Н.Векуа, Новосибирск, 28 мая – 2 июня 2007 года; на международной конференции «Symmetry in nonlinear mathematical physics», Киев, 24-30 июня 2007 года; на традиционных научных конференциях преподавателей УрГУ (2001-2006 гг.).

Опубликованность результатов. Результаты диссертации опубликованы в работах [1-34], список которых приводится в конце автореферата. В совместных с А.Б.Хасановым работах А.Б.Хасанову принадлежит постановки задач, Г.У.Уразбоевым получены их решения. В работе [13] автору данной диссертации принадлежит постановка задачи и идея доказательства соответствующей теоремы, Мамедову К.О. техническая реализация. Результат совместной с К.О.Мамедовым работы в диссертацию не входит.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из 5 глав и 22 параграфов. Параграфы, теоремы, леммы, определения и формулы занумерованы двумя цифрами, первая из которых указывает номер главы. Первый параграф введения разбит на пункты. В конце приведен список литературы из 112 наименований.

Общее число страниц диссертационной работы - 220.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации посвящена применению метода обратной задачи рассеяния для интегрирования общего уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) с источником, в классе «быстроубывающих» функций.

В первом параграфе приведены хорошо известные, но необходимые для дальнейшего изложения, сведения о прямой и обратной задаче рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с «быстроубывающим» потенциалом на всей оси. Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на оси

$$L(0)y = -y'' + u(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \quad (7)$$

с действительной функцией $u(x)$ (потенциалом), удовлетворяющей условию «быстроубываемости»

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u(x)| dx < \infty. \quad (8)$$

Обозначим через $f(x, k)$ и $g(x, k)$ решения Йоста уравнения (7) с асимптотиками

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, k) \exp(-ikx) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x, k) \exp(ikx) = 1, \quad \text{Im } k = 0. \quad (9)$$

При условии (8) такие решения существуют, определяются асимптотиками (9) однозначно.

При вещественных k пары функций $\{f(x, k), f(x, -k)\}$ и $\{g(x, k), g(x, -k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (7), поэтому

$$f(x, k) = b(k)g(x, k) + a(k)g(x, -k).$$

Функция $a(k)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } k > 0$ и имеет там конечное число простых нулей $k_n = i\chi_n$, ($\chi_n > 0$), $n = 1, 2, \dots, N$, причем $\lambda_n = -\chi_n^2$ собственное значение оператора $L(0)$, поэтому

$$g(x, i\chi_j) = B_j f(x, i\chi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Набор $\left\{ r^+(k) \equiv \frac{b(-k)}{a(k)}, B_1, B_2, \dots, B_N, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N \right\}$ называется данными

рассеяния для задачи (7)-(8). Прямая задача рассеяния состоит в определении данных рассеяния по потенциалу $u(x)$, а обратная в восстановлении по данным рассеяния потенциала уравнения (7).

Второй параграф первой главы диссертации посвящен определению общего уравнения КдФ и выводу преобразования данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля, «быстроубывающий» потенциал которого является решением общего уравнения КдФ с источником. Пусть

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^3}{dx^3} + 2u \frac{d}{dx} + u',$$

где $u = u(x, t)$, а штрих означает производную по x . Существуют полиномы P_k (от u и производных u по x) такие, что

$$HP_k = P'_{k+1}.$$

Пусть $c_0, c_1, \dots, c_p$ произвольные действительные числа. Введем обозначения

$$X_q = -P'_{q+1}, \quad Z_p = \sum_{q=0}^p c_q X_q.$$

Уравнение

$$u_t = Z_p(u),$$

называется общим уравнением КдФ.

В частности, при $p = 1$, $c_0 = 0$, $c_1 = 4$ мы получаем классическое уравнение КдФ (1).

Рассмотрим уравнение

$$u_t - Z_p(u) = G(x, t), \quad (10)$$

где $G(x, t)$ - некоторая функция обладающая достаточной гладкостью и удовлетворяющая условию

$$G(x, t) = o(1) \text{ при } x \rightarrow \pm\infty,$$

для любого неотрицательного t . Решение уравнения (10) ищется в классе функций $u(x, t)$ обладающих достаточной гладкостью и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|) |u(x, t)| + \sum_{j=1}^{2p+1} \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| \right) dx < \infty, \quad (11)$$

при $t \geq 0$.

Основным результатом второго параграфа первой главы является следующая лемма

Лемма 1.2. Если потенциал оператора $L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$ является решением уравнения (10) в классе функций (11), то данные рассеяния оператора $L(t)$ изменяются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= ik \sum_{l=0}^p c_l (2k^2)^l r^+ - \frac{1}{2ika^2(k)} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 G dx, \quad \text{Im } k = 0, \\ \frac{dB_n}{dt} &= -\chi_n \sum_{l=0}^p c_l (-2\chi_n^2)^l B_n - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} G g(x, i\chi_n, t) h_n(x, t) dx, \\ \frac{\partial \chi_n}{\partial t} &= -\frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} G \Phi_n^2 dx, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $h_n(x) = \frac{\frac{d}{dk}(g(x, k) - B_n f(x, k)) \Big|_{k=i\chi_n}}{\dot{a}(i\chi_n)}$, а $\Phi_n(x, t)$ нормированная собственная

функция оператора $L(t)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n = -\chi_n^2(t)$.

В третьем параграфе первой главы лемма 1.2 применяется для интегрирования общего уравнения КдФ, с различными самосогласованными источниками. Рассмотрим следующее уравнение

$$u_t - Z_p(u) = 4 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} |\varphi_m|^2, \quad (12)$$

где $\varphi_m(x, t)$ - собственная функция оператора $L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$,

соответствующая собственному значению $\lambda_m(t) = -\chi_m^2(t)$, нормированная условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_m(x, t)|^2 dx = A_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (13)$$

$A_m(t)$ - заданные, положительные, непрерывные функции.

Задача (12) - (13) рассматривается относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $\varphi_m(x, t)$, $\lambda_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, N$. Предполагается, что функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью, достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$ и удовлетворяет условию (11).

В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Если функции $u(x, t)$, $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, ..., $\varphi_m(x, t)$ являются решением задачи (11) – (13), то данные рассеяния оператора $L(t)$ меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= ik \sum_{l=0}^p c_l (2k^2)^l r^+, \quad \text{при } \text{Im} k = 0, \\ \frac{dB_n(t)}{dt} &= \left(-\chi_n \sum_{l=0}^p c_l (-2\chi_n^2)^l + 2A_n(t) \right) B_n(t), \\ \frac{\partial \chi_n}{\partial t} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Отметим, что для классического уравнения КдФ этот результат был получен в работе В.К.Мельникова.

В этом же параграфе рассматривается общее уравнение КдФ с другим самосогласованным источником

$$u_t - Z_p(u) = 2 \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_m \psi_m), \quad (14)$$

где $\varphi_m(x, t)$ - собственная функция оператора $L(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$,

соответствующая собственному значению $\lambda_m(t) = -\chi_m^2(t)$, а $\psi_m(x, t)$ линейно независимое с $\varphi_m(x, t)$ решение уравнения $L(t)y = \lambda_m(t)y$, такое, что

$$W\{\varphi_m(x, t), \psi_m(x, t)\} = \omega_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Здесь $\omega_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, N$ заданные непрерывные функции, при любом неотрицательном t удовлетворяющие условию

$$\int_0^t \omega_m(\tau) d\tau < -\lambda_m(0), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (16)$$

Предполагается, что функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью, достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$ и удовлетворяет условию (11).

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Если функции $u(x, t)$, $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, ..., $\varphi_m(x, t)$, $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$, ..., $\psi_m(x, t)$ являются решением задачи (11), (14) – (16), то данные рассеяния оператора $L(t)$ меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{dr^+}{dt} &= \left(ik \sum_{l=0}^p c_l (2k^2)^l - \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m k}{\chi_m (k^2 + \chi_m^2)} \right) r^+, \text{ при } \operatorname{Im} k = 0, \\ \frac{dB_n(t)}{dt} &= \left(-\chi_n \sum_{l=0}^p c_l (-2\chi_n^2)^l - \frac{i\dot{a}(i\chi_n)\omega_n(t)\beta_n(t)}{2\chi_n} \right) B_n(t), \\ \frac{d\chi_n}{dt} &= -\frac{\omega_n(t)}{2\chi_n}, \quad n=1, 2, \dots, N,\end{aligned}$$

где $\beta_n(t)$ определяется из равенства $h_n(x, t) = \alpha_n(t)\psi_n(x, t) + \beta_n(t)g(x, i\chi_n, t)$.

Для классического уравнения КдФ этот результат был получен в работе В.К.Мельникова, а необходимость выполнения условия (16) была установлена в работе автора данной диссертации.

В четвертом параграфе первой главы приводится схема метода обратной задачи рассеяния и его применение для решения задачи (11) – (13) при конкретном начальном условии.

Вторая глава диссертационной работы посвящена решению общего уравнения КдФ и общего уравнения КдФ с источником, в классе ступенчатых функций.

В первом параграфе второй главы приведены необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля со «ступенчатым» потенциалом на всей оси.

Рассмотрим уравнение Штурма-Лиувилля на всей оси ($-\infty < x < \infty$)

$$Ly \equiv -y'' + u(x)y = k^2 y,$$

с вещественным, локально суммируемым потенциалом $u(x)$, имеющим разные пределы на бесконечностях

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = c^2 \quad (c > 0).$$

Предполагается, что $u(x)$ достаточно быстро стремится к своим пределам, так что

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|u(x)|dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} (1+x)|u(x) - c^2|dx < \infty. \quad (17)$$

Положим, $l = \sqrt{k^2 - c^2}$ выбирая ветвь корня в плоскости с разрезом $[-c, c]$ такую, что $\operatorname{Im} l > 0$ при $\operatorname{Im} k > 0$ и $\operatorname{sign} l = \operatorname{sign} k$ при действительных k и $|k| > c$.

Обозначим через $f^+(x, k)$ и $f^-(x, k)$ решения Йоста для уравнения Штурма-Лиувилля с асимптотиками

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^+(x, k) \exp(-ilx) = 1, \quad (\operatorname{Im} l \geq 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^-(x, k) \exp(ikx) = 1, \quad (\operatorname{Im} k \geq 0).$$

При условии (17) такие решения существуют, единственны и являются регулярными функциями l и k при $\operatorname{Im} l > 0$ и $\operatorname{Im} k > 0$ соответственно. Кроме

этого, существуют решения $\psi_1(x, k)$ и $\psi_2(x, k)$ уравнения Штурма-Лиувилля с асимптотиками

$$\begin{aligned}\psi_1(x, k) &\sim \begin{cases} e^{ikx} + S_{21}(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \\ S_{22}(k)e^{ikx}, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \\ \psi_2(x, k) &\sim \begin{cases} S_{11}(k)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-ikx} + S_{12}(k)e^{ikx}, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (|k| > c).\end{aligned}$$

Коэффициенты $S_{ij}(k)$ являются непрерывными функциями k ($-\infty < k < \infty$). $S_{11}(k)$ и $S_{22}(k)$ являются предельными значениями функций, мероморфных в верхней полуплоскости с простыми полюсами в точках $k_n = i\chi_n$, ($\chi_n > 0$), $n = 1, 2, \dots, N$. Числа $\lambda_n = -\chi_n^2$ являются собственными значениями оператора L , поэтому

$$f^-(x, i\chi_n) = B_n f^+(x, i\chi_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Матрица $\|S_{ij}\|_{i,j=1,2}$ называется S -матрицей уравнения Штурма-Лиувилля.

Введем обозначения

$$m_n^\pm = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^\pm(x, i\chi_n)^2 dx \right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

S -матрица в комплекте с одним из наборов $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N, m_1^+, m_2^+, \dots, m_N^+\}$ или $\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N, m_1^-, m_2^-, \dots, m_N^-\}$ называется данными рассеяния уравнения Штурма-Лиувилля.

Во втором параграфе второй главы показывается, что общее уравнение КДФ

$$u_t = Z_p(u), \quad (18)$$

в классе ступенчатых функций, может быть решено методом обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля со ступенчатым потенциалом. Рассмотрим уравнение (18) в классе функций обладающих требуемой гладкостью и удовлетворяющих условию ($c > 0$)

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|u(x, t)|dx + \int_0^{\infty} (1+x)|u(x, t) - c^2|dx + \sum_{k=1}^{2p+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| dx < \infty. \quad (19)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Если потенциал $u(x, t)$ оператора $L(t)y \equiv -y'' + u(x, t)y = k^2 y$ является решением уравнения (18) в классе функции (19), то $S_{21}(k, t)$, $S_{22}(k, t)$, $\chi_n(t)$ и $B_n(t)$ меняются во времени следующим образом ($\text{Im } k = 0$)

$$S_{21}(k, t) = S_{21}(k, 0) \exp \left\{ -ik \sum_{q=0}^p c_q (2k^2)^q t \right\};$$

при $|k| > c$

$$S_{22}(k, t) = S_{22}(k, 0) \exp \left\{ \sum_{q=0}^p c_q \left(i l \eta_q(k) - \frac{1}{2} i k (2k^2)^q \right) t \right\};$$

а при $|k| \leq c$

$$S_{22}(k, t) = S_{22}(k, 0) \exp \left\{ - \sum_{q=0}^p 2^{q-1} c_q \left(\frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\pi} I_q + i k^{2q+1} \right) t \right\};$$

$$\chi_n(t) = \chi_n(0);$$

$$B_n(t) = B_n(0) \exp \left\{ \sum_{q=0}^p c_q \left((-2)^{q-1} \chi_n^{2q+1} - \sqrt{\chi_n^2 + c^2} \eta_q(i \chi_n) \right) t \right\},$$

где

$$\eta_q(k) = \sum_{s=0}^q \frac{(2s)! (2k^2)^{q-s} c^{2s}}{2^{s+1} (s!)^2}, \quad I_q = \frac{c^{2q} \sqrt{\pi}}{q!} \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) + k^2 I_{q-1}, \quad I_0 = \sqrt{\pi}.$$

Третий параграф второй главы посвящен изучению общего уравнения КДФ с источником

$$u_t - Z_p(u) = G(x, t), \quad (20)$$

в классе функций обладающих требуемой гладкостью и удовлетворяющих условию (19). Здесь $G(x, t)$ заданная достаточно гладкая функция, с достаточно быстрым стремлением к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Основным результатом этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.2. Если потенциал $u(x, t)$ оператора $L(t)y \equiv -y'' + u(x, t)y = k^2 y$ является решением уравнения (20) в классе функции (19), то функции $S_{21}(k, t)$, $S_{22}(k, t)$, $B_n(t)$ и $\chi_n(t)$ меняются во времени следующим образом ($\text{Im } k = 0$)

$$\frac{dS_{21}}{dt} = -ik \sum_{q=0}^p c_q (2k^2)^q S_{21} + \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} G \psi_1^2 dx;$$

при $|k| > c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = \left(\sum_{q=0}^p c_q \left(i l \eta_q(k) - \frac{1}{2} i k (2k^2)^q \right) + \frac{1}{2il} \int_{-\infty}^{\infty} G f^+ \psi_2 dx \right) S_{22},$$

а при $|k| \leq c$

$$\frac{dS_{22}}{dt} = \left(- \sum_{q=0}^p 2^{q-1} c_q \left(\frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\pi} I_q + i k^{2q+1} \right) + \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{4\pi} J_1 + \frac{i}{4k} \int_{-\infty}^{\infty} G |\psi_1|^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\sqrt{\chi_n^2 + c^2} (k^2 + \chi_n^2)} \int_{-\infty}^{\infty} G \Phi_n^2 dx \right\} + \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{2\pi} \text{Im } J_2 \right) S_{22};$$

$$\frac{d\chi_n}{dt} = - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} G \Phi_n^2 dx;$$

$$\frac{dB_n}{dt} = \left\{ - \sum_{q=0}^p c_q \left(\sqrt{\chi_n^2 + c^2} \eta_q(i\chi_n) - (-2)^{q-1} \chi_n^{2q+1} \right) - \frac{1}{2\chi_n} \int_{-\infty}^{\infty} G f_n^+ h_n dx \right\} B_n,$$

где $I_q = \frac{c^{2q} \sqrt{\pi}}{q!} \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) + k^2 I_{q-1}, \quad I_0 = \sqrt{\pi}, \quad \eta_q(k) = \sum_{s=0}^q \frac{(2s)! (2k^2)^{q-s} c^{2s}}{2^{s+1} (s!)^2},$

$$J_1(t) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^c \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G |\psi_1|^2 dx}{k' \sqrt{c^2 - k'^2} (k' - k)} dk', \quad J_2(t) = \left(\int_{-\infty}^{-c} + \int_c^{\infty} \right) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} G f^+ \psi_2 dx}{(k'^2 - c^2)(k' - k)} dk',$$

$$f_n^+ = f_n^+(x, i\chi_n, t), \quad h_n = \text{res}_{k=i\chi_n} S_{22}(k, t) \frac{d}{dk} (f^-(x, k, t) - B_n f^+(x, k, t)) \Big|_{k=i\chi_n},$$

а $\Phi_n(x, t)$ нормированная собственная функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению $\lambda_n = -\chi_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, N$.

В четвертом параграфе второй главы результаты теоремы 2.2 применяются к общим уравнениям КдФ с различными самосогласованными источниками (Теорема 2.3 и Теорема 2.4).

Третья глава диссертации посвящена интегрированию нелинейных эволюционных уравнений sin-Гордон, мКдФ и НУШ с источником, в случае простых собственных значений соответствующей спектральной задачи.

В первом параграфе третьей главы приводятся необходимые сведения о задаче рассеяния для системы уравнений Дирака

$$\begin{cases} v_{1x} + i\xi v_1 = q(x)v_2 \\ v_{2x} - i\xi v_2 = r(x)v_1, \end{cases} \quad (21)$$

на всей оси $(-\infty < x < \infty)$, с функциями $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяющими условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |q(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |r(x)| dx < \infty. \quad (22)$$

С помощью оператора Дирака

$$D = \sigma_1 \frac{d}{dx} + q(x)\sigma_2 + r(x)\sigma_3,$$

систему уравнений (21) можно переписать в виде $Dv = \xi v$, где $v = (v_1, v_2)^T$.

При условии (22) система уравнений (21) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad \left. \begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

(Отметим, что $\bar{\varphi}$ не является комплексным сопряжением к φ).

При действительных ξ , пары вектор-функций $\{\varphi(x, \xi), \bar{\varphi}(x, \xi)\}$ и $\{\psi(x, \xi), \bar{\psi}(x, \xi)\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений (21), поэтому

$$\begin{cases} \varphi = a(\xi)\bar{\psi} + b(\xi)\psi, \\ \bar{\varphi} = -\bar{a}(\xi)\psi + \bar{b}(\xi)\bar{\psi}. \end{cases}$$

Функция $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) допускает аналитическое продолжение в верхнюю (нижнюю) полуплоскость $\text{Im } \xi > 0$ ($\text{Im } \xi < 0$). При $|\xi| \rightarrow \infty$, $\text{Im } \xi \geq 0$ функция $a(\xi)$ обладает асимптотикой $a(\xi) = 1 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$. Функция $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) может иметь в полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$ ($\text{Im } \xi < 0$) только конечное число нулей $\xi_k, k = 1, 2, \dots, N$ ($\bar{\xi}_k, k = 1, 2, \dots, \bar{N}$). Нули ξ_k ($\bar{\xi}_k$) функции $a(\xi)$ ($\bar{a}(\xi)$) соответствуют собственным значениям оператора D в верхней (нижней) полуплоскости.

В отличие от самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля несамосопряженный оператор Дирака может иметь кратные собственные значения. Кроме того, несамосопряженный оператор может иметь спектральные особенности, которые лежат на непрерывном спектре. Непрерывный спектр оператора D заполняет вещественную ось, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(D(t)) = (-\infty, \infty)$. Всюду в третьей главе, предполагается, что оператор Дирака не имеет спектральных особенностей, и все его собственные значения простые, так, что

$$\varphi_k(x) \equiv \varphi(x, \xi_k) = C_k \psi(x, \xi_k), k = 1, 2, \dots, N \quad (\bar{\varphi}(x, \bar{\xi}_k) = \bar{C}_k \bar{\psi}(x, \bar{\xi}_k), k = 1, 2, \dots, \bar{N}).$$

Требование отсутствия у оператора Дирака спектральных особенностей означает отсутствие действительных нулей у функций $a(\xi)$ и $\bar{a}(\xi)$.

Замечание. При $r = q^*$ оператор Дирака D является самосопряженным, и, поэтому не имеет собственных значений.

Во втором параграфе третьей главы изучается уравнение sin-Гордон с самосогласованным источником

$$u_{xt} = \sin u + G, \quad (23)$$

где $G = G(x, t)$ достаточно гладкая функция, при любом неотрицательном t удовлетворяющая условию

$$G(x, t) = o(1) \text{ при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Решение $u(x, t)$ задачи (23) ищется в классе функций обладающих достаточной гладкостью и достаточно быстро стремящихся к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.ч.

$$u(x, t) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1 + |x|)|u_x(x, t)| + |u_{xx}(x, t)|) dx < \infty. \quad (24)$$

Основным результатом этого параграфа является следующая лемма.

Лемма 3.2. Если потенциал $u(x, t)$ оператора

$$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3,$$

является решением уравнения (23), в классе функций (24), то данные рассеяния оператора $D(t)$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = -\frac{i}{2\xi} r^+ + \frac{1}{2a^2} \int_{-\infty}^{\infty} (G\varphi_2^2 + G\varphi_1^2) dx, \quad (\text{Im } \xi = 0),$$

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(-\frac{i}{2\xi_n} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(h_{n1}\psi_{n1} + h_{n2}\psi_{n2}) dx \right) C_n,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} (G\varphi_{n2}^2 + G\varphi_{n1}^2) dx}{4 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n1}\varphi_{n2} dx},$$

где $h_n(x) = \frac{\frac{d}{d\xi}(\varphi - C_n\psi)}{\dot{a}(\xi_n)} \Big|_{\xi=\xi_n}, \quad \varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \xi_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$

Третий параграф третьей главы посвящен применению леммы 3.2 к интегрированию уравнения sin-Гордон с самосогласованным источником, который соответствует движущимся собственным значениям. Рассмотрим систему уравнений

$$u_{xt} = \sin u + \sum_{k=1}^{2N} (f_{k1}g_{k1} - f_{k2}g_{k2}), \quad (25)$$

$$Df_k = \xi_k f_k, \quad Dg_k = \xi_k g_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N,$$

где $f_k = (f_{k1}, f_{k2})^T$ является собственной вектор-функцией оператора

$$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3,$$

соответствующей собственному значению ξ_k , а $g_k = (g_{k1}, g_{k2})^T$ линейно независимое с f_k решение уравнения $Dg_k = \xi_k g_k$, причем

$$W\{f_k, g_k\} \equiv f_{k1}g_{k2} - f_{k2}g_{k1} = \omega_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (26)$$

$\omega_k(t)$ - изначально заданные непрерывные функции t , удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &= -\omega_k(t) \quad \text{при} \quad \xi_n = -\xi_k, \\ \text{Re} \left\{ \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau \right\} &< 2 \text{Im} \{ \xi_k(0) \}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (27)$$

при всех неотрицательных значениях t . Предполагается, что в сумме участвующей в правой части (25) сначала идут члены с $\text{Im} \xi_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Пусть, функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, так что выполнено (24).

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Если функция $u(x, t)$ и вектор функции $f_k(x, t), g_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, N$ являются решением задачи (24)-(27), то данные рассеяния оператора $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$ меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \sum_{k=1}^N \omega_k(t) \left(\frac{1}{\xi + \xi_k} + \frac{1}{\xi - \xi_k} \right) \right) r^+, \quad (\text{Im} \xi = 0),$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = -\frac{i\omega_n(t)}{2},$$

$$\frac{dC_n}{dt} = -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{\xi_n} + \beta_n(t) \omega_n(t) \right) C_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где $\beta_n(t)$ определяются из равенств

$$h_n(x) = \frac{\beta_n}{\dot{a}(\xi_n)} \varphi(x, \xi_n) + \alpha_n g_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В конце этого параграфа рассмотрен пример иллюстрирующий применение теоремы 3.1.

В четвертом параграфе третьей главы рассматривается уравнение sin-Гордон с самосогласованным источником интегрального типа

$$u_{xt} = \sin u + \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_1^2 - \phi_2^2) d\eta, \quad (28)$$

$$D\phi = \eta\phi.$$

В рассматриваемой задаче вектор-функция $\phi = (\phi_1(x, \eta, t), \phi_2(x, \eta, t))^T$ решение системы уравнений $D\phi = \eta\phi$ определяемое асимптотикой

$$\phi \rightarrow M(\eta, t) \begin{pmatrix} \exp(-i\eta x) \\ \exp(i\eta x) \end{pmatrix}, \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$, а $M(\eta, t)$ - изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$M(-\eta, t) = M(\eta, t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |M(\eta, t)|^2 d\eta < \infty, \quad (30)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Пусть, функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, так что выполнено (24).

Используя лемму 3.2 доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. Если функции $u(x, t)$, $\phi_1(\eta, x, t)$, $\phi_2(\eta, x, t)$, являются решением задачи (28)-(30), в классе функции (24), то данные рассеяния оператора $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$ с потенциалом $u(x, t)$ меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= \left(-\frac{i}{2\xi} + \pi M^2(\xi, t) + iV.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2(\eta, t)}{\xi + \eta} d\eta \right) r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ \frac{d\xi_n}{dt} &= 0, \quad \frac{dC_n}{dt} = \left(-\frac{i}{2\xi_n} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2(\eta, t)}{(1+r^+(\eta, t)r^+(-\eta, t))(\eta + \xi_n)} d\eta \right) C_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $V.p.$ означает интеграл в смысле главного значения.

В заключении этого параграфа рассмотрена реализация теоремы 3.2 на конкретном примере.

В пятом параграфе третьей главы рассматривается уравнения мКдФ с самосогласованным источником

$$\begin{cases} u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = \sum_{k=1}^{2N} (\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2), \\ D\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k=1, 2, \dots, 2N, \quad x \in R, \end{cases} \quad (31)$$

где $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} + u(x, t) \sigma_2 - u(x, t) \sigma_3$, а $\Phi_k = (\Phi_{k1}, \Phi_{k2})^T$ - собственная вектор-функция оператора $D(t)$, соответствующая собственному значению ξ_k . Предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1} \Phi_{k2} dx = A_k(t), \quad k=1, 2, \dots, 2N, \quad (32)$$

с заданными непрерывными, ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \text{ при } \xi_k = -\xi_n. \quad (33)$$

Пусть, функция $u(x, t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)u(x, t) + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (34)$$

Для получения представлений для решения задачи (31) – (34), следующая теорема.

Теорема 3.3. Если функции $u(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $k=1, 2, \dots, N$ являются решением задачи (31)-(34), то данные рассеяния оператора $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} + u(x, t) \sigma_2 - u(x, t) \sigma_3$ меняются по t следующим образом.

$$\frac{dr^+}{dt} = 8i\xi^3 r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0),$$

$$\frac{dC_n}{dt} = (8i\xi_n^3 + 2A_n(t))C_n, \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0, \quad n=1,2,\dots,N.$$

В конце пятого параграфа приведен пример решения задачи (31)-(34) при заданном начальном условии.

В шестом параграфе третьей главы показывается возможность применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником. Рассмотрим систему уравнений

$$iu_t + 2|u|^2 u + u_{xx} = i \sum_{k=1}^{2N} (f_{k1} g_{k1} - f_{k2}^* g_{k2}^*), \quad (35)$$

$$Df_k = \xi_k f_k, \quad Dg_k = \xi_k g_k, \quad k=1,2,\dots,2N,$$

где $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} + u(x,t)\sigma_2 - u^*(x,t)\sigma_3$, $f_k = (f_{k1}, f_{k2})^T$ собственная вектор-функция оператора $D(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k , а $g_k = (g_{k1}, g_{k2})^T$ линейно независимое решение уравнения $Dg_k = \xi_k g_k$, причем

$$W\{f_k, g_k\} \equiv f_{k1} g_{k2} - f_{k2} g_{k1} = \omega_k(t), \quad k=1, 2, \dots, 2N, \quad (36)$$

где $\omega_k(t)$ - изначально заданные непрерывные функции t , удовлетворяющие условиям

$$\omega_n(t) = -\omega_k^*(t) \quad \text{при} \quad \xi_n = \xi_k^*,$$

$$\text{Re} \left\{ \int_0^t \omega_k(\tau) d\tau \right\} > -\text{Im} \{ \xi_k(0) \}, \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (37)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Пусть, функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)|u(x,t)| + \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (38)$$

В данном параграфе получены представления для решений $u(x,t)$, f_k , g_k , $k=1, 2, \dots, 2N$, задачи (35)-(38) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $D(t)$. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. Если функции $u(x,t)$, $f_k(x,t)$, $g_k(x,t)$, $k=1,2,\dots,N$ являются решением задачи (35)-(38), то данные рассеяния оператора

$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} + u(x,t)\sigma_2 - u^*(x,t)\sigma_3$ меняются по t следующим образом

$$\frac{d\xi_n}{dt} = i\omega_n(t), \quad \frac{dC_n}{dt} = (4i\xi_n^2 + i\beta_n(t)\omega_n(t))C_n, \quad n=1,2,\dots,N,$$

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(4i\xi^2 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{i\omega_k}{\xi + \xi_k} + \frac{i\omega_k^*}{\xi - \xi_k} \right) \right) r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0),$$

где $\beta_n(t)$ определяются из равенств

$$h_n(x) = \frac{\beta_n}{\dot{a}(\xi_n)} \varphi(x, \xi_n) + \alpha_n g_n, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

В четвертой главе диссертации исследуется уравнение sin-Гордон с самосогласованным источником, в случае кратных собственных значений соответствующей спектральной задачи.

В первом параграфе этой главы приводится обобщение прямой и обратной задачи рассеяния для оператора

$$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3,$$

приведенной в первом параграфе третьей главы для простых собственных значений на случай кратных собственных значений.

Пусть при выполнении условия

$$u(x) \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |u'(x)| dx < \infty \quad (39)$$

функция $a(\xi) = W\{\varphi, \psi\} \equiv \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N нулей ξ_k с кратностями m_k , ($k = 1, 2, \dots, N$). Предполагается, что оператор D не имеет спектральных особенностей, что означает отсутствие действительных нулей у функции $a(\xi)$, т.е. $a(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^1$.

Функции

$$\varphi^{(s)}(x, \xi_k) \equiv \left. \frac{\partial^s}{\partial \xi^s} \varphi(x, \xi) \right|_{\xi = \xi_k}, \quad s = 1, 2, \dots, m_k - 1,$$

называются присоединенными функциями к собственной функции $\varphi(x, \xi_k)$. Аналогично определяются присоединенные функции к собственной функции $\psi(x, \xi_k)$. Собственные и присоединенные функции удовлетворяют уравнениям

$$L \varphi^{(s)}(x, \xi_k) = \xi_k^{(s)} \varphi^{(s)}(x, \xi_k) + s \varphi^{(s-1)}(x, \xi_k),$$

$$\varphi^{(0)}(x, \xi_k) \equiv \varphi(x, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad s = 0, 1, \dots, m_k - 1.$$

Согласно определению собственных и присоединенных функций существует, так называемая, цепочка нормировочных чисел $\{\chi_0^k, \chi_1^k, \dots, \chi_{m_k-1}^k\}$, что имеют место соотношения

$$\varphi^{(l)}(x, \xi_k) = \sum_{v=0}^l \chi_{l-v}^k \frac{l!}{v!} \varphi^{(v)}(x, \xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 0, 1, 2, \dots, m_k - 1.$$

Для функции ψ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\xi s} ds,$$

где $K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}$. В этом представлении ядро $K(x, s)$ не зависит от ξ и связано с $u(x)$ с помощью равенства

$$u'(x) = 4K_1(x, x), \quad (u'(x))^2 = 8 \frac{dK_2(x, x)}{dx},$$

т.е. $u(x)$ с точностью до постоянной выражается через $K_1(x, x)$.

Компоненты $K_1(x, y), K_2(x, y)$ ядра $K(x, y)$, в интегральном представлении решения Йоста, при $y > x$ являются решениями интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$K_1(x, y) - F(x + y) + \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) F(z + s) F(s + y) ds dz = 0,$$

$$K_2(x, y) + \int_x^\infty F(x + s) F(s + y) ds + \int_x^\infty \int_x^\infty K_2(x, z) F(z + s) F(s + y) ds dz = 0,$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty r^+(\xi) e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{k=1}^N \sum_{\nu=0}^{m_k-1} \chi_{m_k-\nu-1}^k \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu} \left[\frac{(z - \xi_k)^{m_k}}{a(z)} e^{izx} \right]_{z=\xi_k},$$

$r^+(\xi) \equiv \frac{b(\xi)}{a(\xi)}$, $a(z)$ - аналитическое продолжение функции $a(\xi)$, $\text{Im } \xi = 0$ в верхнюю полуплоскость $\text{Im } z > 0$.

Набор $\{r^+(\xi), \xi_k, \chi_j^k\}$, $\xi \in R^1$, $\text{Im } \xi_k > 0$; $k = 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, m_k - 1$

называется данными рассеяния для оператора $D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3$.

Во втором параграфе четвертой главы рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_{xt} = \sin u + 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{m_k-1}^j \left(f_{k1}^j f_{k1}^{m_k-1-j} - f_{k2}^j f_{k2}^{m_k-1-j} \right), \quad (40)$$

$$Df_k^0 = \xi_k f_k^0, \quad Df_k^j = \xi_k f_k^j + j f_k^{j-1}, \quad \text{Im } \xi_k > 0, \\ k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1, \quad (41)$$

при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R, \quad (42)$$

где

$$C_n^l = \frac{n!}{(n-l)!!}, \quad D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3, \quad u_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad u_{xt} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t},$$

вектор-функции $f_k^j = (f_{k1}^j(x, t), f_{k2}^j(x, t))^T$ при любом неотрицательном t принадлежат пространству квадратично суммируемых вектор-функций $L_2^2(-\infty, \infty)$, а $f_k^0 = (f_{k1}^0(x, t), f_{k2}^0(x, t))^T$ - собственная вектор-функция оператора

$D(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k ($\text{Im } \xi_k > 0$) кратности m_k , $k=1,2,\dots,N$, $j=0,1,\dots,m_k-1$.

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1) u_0(x) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u'_0(x)| + |u''_0(x)|) dx < \infty.$$

2) Оператор $D(0)$ не имеет спектральных особенностей и в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$.

Предполагается, что вектор-функции $f_k^j = (f_{k1}^j(x,t), f_{k2}^j(x,t))^T$ «нормированы» условиями

$$\frac{1}{(m_k-1-s)!} \int_{-\infty}^{\infty} (f_{k1}^{m_k-1} f_{k2}^{m_k-1-s} + f_{k2}^{m_k-1} f_{k1}^{m_k-1-s}) dx = A_{m_k-1-s}^k(t), \quad (43)$$

где $A_{m_k-1-s}^k(t)$ - изначально заданные непрерывные, неотрицательные функции от t ($t \geq 0$), $k=1,2,\dots,N$, $s=0,1,\dots,m_k-1$.

Пусть, функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.ч.

$$u(x,t) \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ при } |x| \rightarrow \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)|u_x(x,t)| + |u_{xx}(x,t)|) dx < \infty. \quad (44)$$

Основной результат этого параграфа заключается в доказательстве следующей теоремы

Теорема 4.1. Если функции $u(x,t)$, $f_k^j(x,t)$, $k=1,2,\dots,N$, $j=0,1,\dots,m_k-1$ являются решением задачи (40)-(44), то данные рассеяния оператора $D(t)$ меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dr^+}{dt} &= -\frac{i}{2\xi} r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0), \\ m_n(t) &= m_n(0), \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0, \\ \frac{d\chi_0^n}{dt} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{i}{\xi_n} + A_0^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_1^n}{dt} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{i}{\xi_n} + A_0^n(t) \right) \chi_1^n - \frac{1}{2} \left(-\frac{i}{\xi_n^2} + A_1^n(t) \right) \chi_0^n, \\ \frac{d\chi_{m_n-1-\nu}^n}{dt} &= -\frac{1}{2} \sum_{s=\nu}^{m_n-1} \left(\frac{(-1)^{m_n-1-s} i}{\xi_n^{m_n-s}} + A_{m_n-1-s}^n(t) \right) \chi_{s-\nu}^n, \\ n &= 1, 2, \dots, N, \quad \nu = m_n-1, m_n-2, \dots, 0. \end{aligned}$$

Задача, рассматриваемая в третьем параграфе четвертой главы, является обобщением задачи рассмотренной в четвертом параграфе третьей главы на

случай кратных собственных значений оператора Дирака. Рассмотрим уравнение sin-Гордон с самосогласованным источником интегрального типа (28), в случае кратных собственных значений оператора

$$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3,$$

Система уравнений (28) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R,$$

где начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

$$1) \quad u_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 2\pi m, \quad \int_{-\infty}^{\infty} ((1 + |x|)|u'_0(x)| + |u''_0(x)|) dx < \infty, \quad m \in Z.$$

2) Оператор $D(0)$ не имеет спектральных особенностей и в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$.

Основной результат этого параграфа следующая:

Теорема 4.2. Если функции $u(x, t)$, $\phi_1(\eta, x, t)$, $\phi_2(\eta, x, t)$, являются решением задачи (0.28), в классе функции (0.44), то данные рассеяния оператора

$$D(t) = \sigma_1 \frac{d}{dx} - \frac{u_x}{2} \sigma_2 + \frac{u_x}{2} \sigma_3,$$

меняются по t следующим образом

$$\frac{dr^+}{dt} = \left(-\frac{i}{2\xi} + \pi M^2(\xi, t) + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2(\eta, t)}{\xi + \eta} d\eta \right) r^+, \quad (\text{Im } \xi = 0)$$

$$m_n(t) = m_n(0), \quad \frac{d\xi_n}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\chi_{m_n-1-j}^n}{dt} = i \sum_{s=j}^{m_n-1} (-1)^{m_n-1-s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2(\eta, t)}{(1 + r^+(\eta, t)r^+(-\eta, t))(\eta + \xi_n)^{m_n-s}} d\eta - \frac{1}{2\xi_n^{m_n-s}} \right) \chi_{s-j}^n,$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad j = m_n - 1, m_n - 2, \dots, 0.$$

Заметим, что в отличие от случая простых собственных значений, в случае кратных собственных значений надо определить эволюцию нормировочной цепочки. Кроме этого доказательство инвариантности по t собственных значений оператора Дирака существенно отличается от случая простых собственных значений.

Пятая глава диссертации посвящена исследованию дискретных систем с самосогласованным источником.

В первом параграфе пятой главы приводятся необходимые сведения о прямой и обратной задаче рассеяния для разностного уравнения Штурма-Лиувилля

$$(Ly)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in Z, \quad (45)$$

где $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ - искомое решение, $\lambda = \frac{z + z^{-1}}{2}$ – спектральный параметр и

$$a_n > 0, \operatorname{Im} b_n = 0, n \in \mathbb{Z}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty. \quad (46)$$

При выполнении условия (46) уравнение (45) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z^n + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty, |z|=1, \\ \psi_n(z) &= z^{-n} + o(1) \text{ при } n \rightarrow -\infty, |z|=1. \end{aligned} \quad (47)$$

Такие решения существуют, определяются асимптотиками (47) однозначно и аналитически продолжается во внутренность круга $|z| < 1$.

Для функции $\varphi_n(z)$ справедливо представление

$$\varphi_n(z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'},$$

где коэффициент $K(n, n')$ не зависит от z , и связан с a_n и b_n с помощью равенств

$$a_n = \frac{1}{2} \frac{K(n+1, n+1)}{K(n, n)}, \quad b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{K(n, n+1)}{K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{K(n-1, n-1)} \right). \quad (48)$$

При $|z|=1$ пары $\{\varphi_n(z), \varphi_n(z^{-1})\}$ и $\{\psi_n(z), \psi_n(z^{-1})\}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (45), поэтому

$$\psi_n(z) = \alpha(z) \varphi_n(z^{-1}) + \beta(z) \varphi_n(z).$$

Функция рассеяния определяется с помощью равенства $R(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$.

Заметим, что

$$\alpha(z) = \frac{2}{z - z^{-1}} W\{\psi_n(z), \varphi_n(z)\}, \quad (49)$$

где $W\{\psi_n(z), \varphi_n(z)\} \equiv a_n(\psi_n(z)\varphi_{n+1}(z) - \psi_{n+1}(z)\varphi_n(z))$.

Функция $\alpha(z)$ аналитически продолжается во внутренность круга $|z| < 1$ и имеет там конечное число простых нулей $z_1, z_2, \dots, z_N$, причём $\lambda_k = \frac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $k=1, 2, \dots, N$ есть собственное значение оператора L .

Из (49) следует, что

$$\psi_n^k = \beta_k \varphi_n^k, \quad k=1, 2, \dots, N,$$

где $\psi_n^k = \psi_n(z_k)$.

Если $\lambda_k = \frac{z_k + z_k^{-1}}{2}$ собственное значение оператора L , то нормированным собственным вектором ξ_n^k мы будем называть собственный вектор, удовлетворяющий условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_n^k)^2 = 1,$$

и $\xi_n^k \sim C_k z_k^n$, при $n \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots, N$. Заметим, что

$$C_k^2 = -\frac{\beta_k}{z_k \dot{\alpha}(z_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Набор $\{R(z), z_1, z_2, \dots, z_N, C_1, C_2, \dots, C_N\}$ называется данными рассеяния для уравнения (45).

Дискретный аналог уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко имеет вид

$$\chi(n, m) + F(n + m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n, n') F(n' + m) = 0, \quad m > n,$$

$$(K(n, n))^{-2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n, n') F(n' + n),$$

$$\text{где } F(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} R(z) z^{n-1} dz + \sum_{k=1}^N C_k^2 z_k^n, \quad \chi(n, m) = \frac{K(n, m)}{K(n, n)}.$$

Теперь $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n\}_{-\infty}^{\infty}$ определяются с помощью данных рассеяния из равенств (48).

Во втором параграфе пятой главы рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum_{i=1}^N ((g_n^i)^2 - (g_{n+1}^i)^2), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) - 2 \sum_{i=1}^N g_n^i (a_n g_{n+1}^i - a_{n-1} g_{n-1}^i), \\ a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad n \in Z, \end{cases} \quad (50)$$

где $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}, k = 1, 2, \dots, N$ — неизвестные функции, причём $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ есть собственный вектор оператора

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

соответствующий собственному значению $\lambda_k = \frac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $k = 1, 2, \dots, N$, причём

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (g_n^k(t))^2 = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (51)$$

где $A_k(t)$ заданные непрерывные, положительные функции.

Система уравнений (50) рассматривается при начальном условии

$$a_n(0) = a_{n0}, \quad b_n(0) = b_{n0}, \quad n \in Z, \quad (52)$$

где $\{a_{n0}\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_{n0}\}_{-\infty}^{\infty}$ обладают следующими свойствами

1. $a_{n0} > 0$, $\text{Im} b_{n0} = 0$, $n \in Z$,
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_{n0} - \frac{1}{2} \right| + |b_{n0}| \right) < \infty$,

3. Оператор $L(0)$ имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$ лежащих вне отрезка $[-1; 1]$.

Решение задачи (50)-(52) ищется в классе функций удовлетворяющих условиям

$$a_n(t) > 0, \operatorname{Im} b_n = 0, n \in Z, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n(t) - \frac{1}{2} \right| + |b_n(t)| \right) < \infty. \quad (53)$$

Основной результат данного параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 5.1. Если $a_n(t), b_n(t), g_n^k(t), k=1,2,\dots,N, n \in Z$ являются решением задачи (50)-(53), то данные рассеяния оператора

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}$$

меняются по t следующим образом

$$R(z,t) = R(z,0) \exp\{(z^{-1} - z)t\}, |z|=1,$$

$$z_k(t) = z_k(0), C_k^2(t) = C_k^2(0) \exp\{(z_k^{-1} - z_k)t + 2 \int_0^t A_k(\tau) d\tau\}, k=1,2,\dots,N.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для нахождения решений задачи (50)-(53).

В конце параграфа приведен пример иллюстрирующий применение теоремы 5.1.

В третьем параграфе пятой главы рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником, который соответствует движущимся собственным значениям. Рассмотрим цепочку Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum_{i=1}^N (f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i), \\ \frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + a_n \sum_{i=1}^N (f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i) - a_{n-1} \sum_{i=1}^N (f_n^i g_{n-1}^i + f_{n-1}^i g_n^i), \\ a_{n-1} f_{n-1}^k + b_n f_n^k + a_n f_{n+1}^k = \lambda_k f_n^k, \\ a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, k=1,2,\dots,N, n \in Z, \end{cases} \quad (54)$$

при начальном условии (52) с начальными данными удовлетворяющими условиям 1-3. В рассматриваемой задаче $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}, k=1,2,\dots,N$ неизвестные функции, причём $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ есть собственный вектор оператора

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1},$$

соответствующий собственному значению $\lambda_k = \frac{z_k + z_k^{-1}}{2}, k=1,2,\dots,N$, а

$\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ линейно независимое с $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ решение уравнения

$$a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, k=1,2,\dots,N, n \in Z.$$

Предполагается, что

$$W\{f_n^k, g_n^k\} \equiv a_n(f_n^k g_{n+1}^k - f_{n+1}^k g_n^k) = \omega_k(t), \quad k=1,2,\dots,N, \quad (55)$$

где $\omega_k(t)$ - изначально заданные непрерывные функции от t , удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{\lambda_k(0)}{2} + \int_0^t \omega_k(t) dt \right| > \frac{1}{2}, \quad k=1,2,\dots,N, \quad (56)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Решение задачи (54)-(56) ищется в классе функций удовлетворяющих условиям (53).

В этом параграфе доказана следующая теорема.

Теорема 5.2. Если $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n^k(t)$, $g_n^k(t)$, $k=1,2,\dots,N$, $n \in Z$ являются решением задачи (54)-(56), в классе функций (53), то функции $\alpha(z,t)$, $\beta(z,t)$, $\lambda_k(t)$, $\beta_k(t)$ определяющие данные рассеяния оператора

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1},$$

меняются по t следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(z,t)}{dt} &= 2 \sum_{m=1}^N \left(\frac{1+z_m z}{1-z_m z} - \frac{1+z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}} \right) \frac{\omega_m}{z_m - z_m^{-1}} \alpha(z,t), \\ \frac{d\beta(z,t)}{dt} &= (z^{-1} - z) \beta(z,t), \quad |z|=1, \\ \frac{d\lambda_k}{dt} &= 2\omega_k(t), \quad \frac{d\beta_k}{dt} = \left(z_k^{-1} - z_k + \frac{4z_k^2 \gamma_k \omega_k}{z_k^2 - 1} \right) \beta_k, \quad k=1,2,\dots,N, \end{aligned}$$

где $\gamma_k(t)$ определяются из равенств

$$\left. \frac{d}{dz} (\psi_n(z) - \beta_k \varphi_n(z)) \right|_{z=z_k} = \delta_k g_n^k + \gamma_k \psi_n(z_k), \quad k=1,2,\dots,N.$$

Теперь нормировочные константы $C_k(t)$ определяются из равенств

$$C_k^2(t) = -\frac{\beta_k(t)}{z_k(t) \dot{\alpha}(z_k(t), t)}, \quad k=1,2,\dots,N.$$

В заключение автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору А.Б.Хасанову за постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена интегрированию различных нелинейных эволюционных уравнений с источником.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Выведена динамика изменения по t спектральных параметров оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом являющимся решением общего уравнения Кортевега – де Фриза с источником в классе «быстроубывающих» функций.

2. Определена эволюция данных рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения Кортевега – де Фриза в классе ступенчатых функций.

3. Изучена интегрируемость общего уравнения КдФ с источником при начальных данных типа «ступеньки».

4. Метод обратной задачи рассеяния применен к решению различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в случае простых собственных значений соответствующей несамосопряженной спектральной задачи.

5. Показана возможность применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником, в случае кратных собственных значений оператора Дирака.

6. Решение цепочки Тоды с самосогласованным источником выражено в рамках метода обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении целей исследований диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят значительный вклад в теорию интегрирования нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I. Статьи опубликованные в научных журналах

1. Хасанов А.Б., Уразбаев Г.У. Интегрирование уравнения Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа ступеньки методом обратной задачи рассеяния // Узб. матем. журнал. - Ташкент, 2000. № 2. С. 56-66.
2. Уразбоев Г.У. Об интегрировании уравнения КдФ с самосогласованным источником при начальных данных типа ступеньки // Доклады АН РУз -

- Ташкент, 2000. - №5. - С. 3-7.
3. Хасанов А.Б., Уразбаев Г.У. Об интегрировании одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений методом обратной задачи рассеяния // Узб. матем. журнал. –Ташкент, 2001. № 2. С. 64-73.
 4. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа «ступеньки»// Теор. и матем. физика. – Москва, 2001. – Т.129, № 1. – С.38-54.
 5. Уразбоев Г.У. Метод решения общего уравнения КдФ в классе ступенчатых функций // Доклады АН РУз–Ташкент,2002.№ 6. - С.10-14.
 6. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Метод решения уравнения мКдФ с самосогласованным источником // Узб. матем. журнал. –Ташкент, 2003. № 1. С. 69- 75.
 7. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций // Узб. матем. журнал. –Ташкент, 2003. № 2. С. 53-59.
 8. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. О формулах следов для несамосопряженного дифференциального оператора Дирака // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2003. - № 2. - С.13-17.
 9. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об уравнении sin-Гордон с самосогласованным источником // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2004. - № 3. - С.16-19.
 10. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об общем уравнении Кортевега-де Фриза с источником в классе ступенчатых функций //ДАН Россия. – Москва 2004. – Т.397, № 1. – С.32-36.
 11. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Решение общего уравнения КдФ в классе ступенчатых функций // Записки научных семинаров ПОМИ. – Санкт-Петербург, 2004. – Т. 317. С. 174 -198. [перевод: Khasanov A.B, Urazboev G.U. Solution of general KdV equation in the class step functions // Journal of Mathematical Sciences. - Springer, 2006. - v.136,№ 1.- pp.3625-3640.]
 12. Уразбоев Г.У. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником, соответствующим кратным собственным значениям // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2005. - № 5. - С.11-14.
 13. Уразбоев Г.У., Мамедов К.О. О модифицированном уравнении КдФ с самосогласованным источником в случае движущихся собственных значений// Вестник ЕГУ, сер.”Математика.Компьютерная математика”. – Елец (Россия), 2005. - вып.8, № 1. – С.84-94.
 14. Khasanov A.B, Urazboev G.U. On the Sine-Gordon Equation with a Self-Consistent Source of Integral Type // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.– Ukraine (Kharkov), 2006.- v.2., № 3. – pp. 287-298.
 15. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об уравнении sin-Гордон с самосогласованным источником, соответствующем кратным собственным значениям // Дифференц. уравнения. –Минск, 2007.– Т.43, № 4. – С.544-552.
 16. Уразбоев Г.У. Интегрирование цепочки Тоды с самосогласованным источником // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2007. - № 5. - С.3-7.

III. а) Статьи опубликованные в сборниках научных трудов

17. Хасанов А.Б., Уразбаев Г.У. Об интегрировании уравнения КдФ с самосогласованным источником при начальных данных типа ступеньки // Труды международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения». - Красноярск (Россия), 2000. С. 248-251.
18. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником// В книге Труды 2-й международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посв. 80-летию Л.Д.Кудрявцева. – М.ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 408 с.
19. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об интегрировании уравнения Синус –Гордон с самосогласованным источником // Современные проблемы математической физики и информационной технологии: Труды межд. науч. конф., 26-29 ноября 2003. - Ташкент, 2003. - С. 260.
20. Уразбоев Г.У. О нелинейном уравнении Гарри Дима с источником// Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды межд.науч.конф. 16-19 ноября, 2004. – Ташкент, 2004. - С.283-284.
21. Уразбоев Г.У. Об эволюции данных рассеяния оператора типа Дирака с потенциалом являющимся решением уравнения sin-Гордон с источником в случае кратных собственных значений// Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды межд. конф. 18-24 апреля 2005 г., Том 1. – Ташкент, 2005. - С.196-199.
22. Уразбоев Г.У. О дискретном эволюционном уравнении с самосогласованным источником // Родник знаний: Сборник науч. и метод. трудов СПбГПУ. – Санкт-Петербург, 2006. – С.43-45.

б) Работы опубликованные в материалах и сборниках тезисов конференций

23. Уразбоев Г.У. Об определении квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля по его спектральной функции // Обучение фундаментальным дисциплинам: Тез. докл. междун. науч. тех. конф. 9- 10 декабря 1999.- Ташкент (ТГТУ), 1999. – С. 74-75.
24. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об интегрировании одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений// Материалы научно-практической конференции КГУ им. Бердаха. - г.Нукус, 2001.- С. 15-17.
25. Khasanov A.B., Urazbaev G.U. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source from steplike initial data, by inverse scattering method// International conference on Functional Analysis: Abstracts. 22-26 August, 2001. – Kyiv, Ukraine, 2001. – pp.47.
26. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Интегрирование общего уравнения Кортевега-де Фриза с правой частью в классе быстроубывающих функций // Многомерный комплексный анализ: Тез. докл. межд. конф.5-10

- август 2002. – Красноярск, КрасГУ, 2002. – С. 46- 48.
27. Khasanov A.B., Urazboev G.U. The general Korteweg-de Vries equation and «stepike» initial data// Kolmogorov and Contemporary mathematics: International conference. June 16- 21, 2003. – Moscow, 2003. Part 2. – pp. 968-970.
 28. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Интегрирование уравнения мКдФ с самосогласованным источником // Вторая Межд. конф. посв. 80-летию чл. корр. АН России Л.Д.Кудрявцева: Тезисы докладов. - Москва, 2003.- С. 238- 240.
 29. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об уравнении $\sin$ – Гордон с самосогласованным источником интегрального типа // Геометрический анализ и его приложения: Тез. докл. межд. школы – конф. 24-30 мая, 2004. - Волгоград, 2004.- С. 195 -197.
 30. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об интегрировании уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником интегрального типа в случае кратных собственных значений // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа: Матер. респ. науч. конф. 25-27 июня, 2006. - Нукус, 2006. – С.130-133.
 31. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. О модифицированном уравнении КдФ с источником // Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий: Тезисы межд. конф. 20-22 сентября, 2006. - г.Алматы, 2006.- С.121-122.
 32. Уразбоев Г.У. Об интегрировании уравнения $\sin$ – Гордон с самосогласованным источником интегрального типа в случае кратных собственных значений // Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий: Тезисы межд. конф. 20-22 сентября, 2006. - г.Алматы, 2006.- С.118-119.
 33. Уразбоев Г.У. Об интегрировании цепочки Тоды с самосогласованным источником, соответствующим движущимся собственным значениям // Межд. конф. Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посв. 100 – летию акад. И.Н.Векуа: Тезисы докл. 28 мая- 2 июня, 2007. – г. Новосибирск, 2007. – С.324-325.
 34. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. Об интегрировании нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником // Прикладная математика, механика жидкости, газа и плазмы: Материалы межд. научно-технической конф. 28-29 июня 2007 г., Том 2. – г.Самарканд, 2007. - С.136-141.

Физика–математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Уразбоев Гайрат Уразалиевич 01.01.03–Математик физика ихтисослиги бўйича «Мосланган манбали ночизикли эволюцион тенгламаларни интеграллаш» мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: сочилиш назариясининг тескари масала усули, Штурм-Лиувилл тенгламаси, Дирак оператори, мосланган манбали ночизикли

эволюцион тенгламалар, Кортевег – де Фриз тенгламаси, ночизикли Шредингер тенгламаси, Тода занжири.

Тадқиқот объектлари: ночизикли эволюцион тенгламалар.

Ишнинг мақсади: мосланган манбали ночизикли эволюцион тенгламалар билан боғланган спектрал масаланинг сочилиш назариясининг берилганларини келтириб чиқариш.

Тадқиқот усули: диссертацияда математик физика, дифференциал тенгламалар, комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси, дифференциал ва чекли айирмалардаги операторлар спектрал назарияси усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

1) потенциалли «тез камаювчи» функциялар синфидаги манбага эга бўлган умумий Кортевег – де Фриз тенгламасининг ечими бўлган, Штурм-Лиувилл операторининг спектрал характеристикаларининг t буйича ўзгариш қонуни топилган;

2) потенциалли зинасимон функциялар синфидаги умумий Кортевег – де Фриз тенгламасининг ечими бўлган, Штурм-Лиувилл операторининг сочилиш назариясининг берилганлари топилган;

3) «зинасимон» бошланғич шартларга эга бўлган манбали умумий КДФ тенгламасини интегралланиши ўрганилган;

4) тескари масала усули мос спектрал масала оддий хос қийматларга эга бўлган турли мосланган манбали ночизикли эволюцион тенгламаларни ечишга қўлланилган;

5) Дирак оператори карралаи хос қийматларга эга бўлган ҳолида мосланган манбали $\sin$ -Гордон тенгламасини интеграллаш учун тескари масала усулини қўллаш мумкинлиги кўрсатилган;

6) мосланган манбали Тода занжирининг ечими дискрет Штурм-Лиувилл операторининг тескари масаласи усули доирасида ифодаланган.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантларга махсус курс ўқитилади.

Қўлланиш (фойдаланиш) соҳаси: олинган натижалар математик физикада ночизикли эволюцион тенгламаларни интеграллашда қўлланилиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации Уразбоева Гайрата Уразалиевича на тему: «Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником» на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.03 – Математическая физика

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, уравнение Штурма-Лиувилля, оператор Дирака, нелинейные уравнения с самосогласованным

источником, уравнение Кортевега- де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, цепочка Тоды.

Объекты исследования: нелинейные эволюционные уравнения с самосогласованным источником.

Цель работы: вывод эволюции данных рассеяния спектральной задачи связанной с нелинейными эволюционными уравнениями с самосогласованным источником.

Метод исследования: методы математической физики, дифференциальных уравнений, теории функций комплексных переменных, спектральной теории дифференциальных и разностных операторов.

Полученные результаты и их новизна: основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) выведен закон изменения по t спектральных характеристик оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом являющимся решением общего уравнения Кортевега – де Фриза с источником в классе «быстроубывающих» функций;

2) определена эволюция данных рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, потенциал которого является решением общего уравнения Кортевега – де Фриза в классе ступенчатых функций;

3) изучена интегрируемость общего уравнения КдФ с источником при начальных данных типа «ступеньки»;

4) метод обратной задачи рассеяния применен к решению различных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником, в случае простых собственных значений соответствующей несамосопряженной спектральной задачи;

5) показана возможность применения метода обратной задачи рассеяния для интегрирования уравнения $\sin$ -Гордон с самосогласованным источником, в случае кратных собственных значений оператора Дирака;

6) решение цепочки Тоды с самосогласованным источником выражено в рамках метода обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля.

Практическая значимость: Работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: на основе полученных результатов читается спецкурс для магистрантов.

Область применения: Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

RESUME

Thesis of Urazboev Gayrat Urazalievich on the scientific degree competition of the doctor of sciences in physics and mathematics speciality 01.01.03–Mathematical physics. Subject: “Integration of nonlinear evolution equations with self-consistent source”

Key words: The inverse scattering method, Sturm-Liouville equation, Dirac's operator, nonlinear equations with self-consistent source, Korteweg – de Vries equation, nonlinear Schrodinger equation, Toda lattice.

Subjects of the inquiry: nonlinear evolution equations with self-consistent source.

Aim of the inquiry: To deduce the scattering data of spectral problem connected with nonlinear evolution equations with self-consistent source.

Method of the inquiry: used research methods include the methods of mathematical physics, theory differential equations, the theory of functions of complex variables, spectral theory of differential and difference operators.

The results achieved and their novelty: The main results of this work are new and consist of the following:

1) the law of changing on t of spectral data of Sturm-Liouville operator with potential which is the solution of general Korteweg – de Vries equation with source in the class of 'rapidly decreasing' functions is deduced;

2) the evolutions of scattering data of Sturm-Liouville operator with potential which is the solution of general Korteweg – de Vries equation in the class of "steplike" functions is defined;

3) the integration of general Korteweg – de Vries equation with source from "steplike" initial data is studied;

4) the inverse scattering method is used to solve various nonlinear evolution equations with self-consistent source in the case the simple eigenvalues of corresponding spectral problems;

5) it is shown that the inverse scattering method may be used for integration of sin-Gordon equation with self-consistent source in the case the multiple eigenvalues of Dirac's operator;

6) the solution of Toda lattice with self-consistent source is expressed in terms of the inverse scattering method for the discrete Sturm-Liouville operator.

Practical value: the work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: a special course will be read for post-graduate students on the basis of the received results.

Sphere of usage: the obtained results may be used in mathematical physics for integration of nonlinear evolution equations.