

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РАХИМОВ ДАВРАН ГАНИЕВИЧ

**ҚЎЗҒАТИЛГАН ХОС СОНЛАР МАСАЛАЛАРИНИ
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛАШ УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2014

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the abstract of doctoral dissertation

Рахимов Давран Ганиевич

Қўзғатилган хос сонлар масалаларини регуляризациялаш усули билан ечиш	3
--	---

Рахимов Давран Ганиевич

Решение возмущенных задач на собственные значения методом регуляризации	29
--	----

Rakhimov Davran Ganievich

Solution of perturbed eigenvalue problems by the regularization method . . .	55
--	----

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works	78
-----------------------------------	----

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

РАХИМОВ ДАВРАН ГАНИЕВИЧ

**ҚЎЗҒАТИЛГАН ХОС СОНЛАР МАСАЛАЛАРИНИ
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛАШ УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2014

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/В2014.5.FM130 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Докторлик диссертациясининг тўлиқ матни Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 16.07.2013.FM.01.01 рақамли фан доктори илмий даражасини берувчи илмий кенгаш веб-саҳифасида nauka@nu.uz манзилига жойлаштирилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) веб-саҳифада nauka@nu.uz манзилига ҳамда «ZIYONET» Ахборот-таълим порталида www.ziyonet.uz манзилига жойлаштирилган.

**Илмий
маслаҳатчи:**

Алимов Шавкат Арифджанович
физика-математика фанлари доктори, академик

**Расмий
оппонентлар:**

Ганиходжаев Расул Набиевич
физика-математика фанлари доктори, профессор

Холмухамедов Олим Рахимович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Карачик Валерий Валентинович
физика-математика фанлари доктори, профессор

**Етакчи
ташкилот:**

Ургенч давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 16.07.2013.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «__»_____2014 й. соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100202, Тошкент, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz)

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида ____рақами билан рўйхатга олинган, диссертация билан АРМда танишиш мумкин (Манзил: 100202, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2014 йил «__» _____ тарқатилди.
(2014 йил «__» _____даги № _____ рақамли реестр баённомаси)

Б.А.Шоимкулов

Фан доктори илмий даражасини берувчи
илмий кенгаш раиси ф.-м.ф.д., профессор

М.Тухтасинов

Фан доктори илмий даражасини берувчи
илмий кенгаш илмий котиби ф.-м.ф.д., доцент

М.С.Салахитдинов

Фан доктори илмий даражасини берувчи
илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси
ф.-м.ф.д., академик

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИНING АННОТАЦИЯСИ

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти. Ночизикли масалалар назарияси билан боғлиқ барча тадқиқотлар замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан бири ҳисобланади. Бундай масалаларнинг қўйилишига амалий математика, биология, иқтисодиёт, гидродинамика, эгилувчанлик назарияси, назарий ва математик физикада вужудга келадиган математик моделлар сабаб бўлади. Тенгламанинг бошқарув параметрлари критик қийматлардан ўтаётганда янги ечимлар пайдо бўлишига сабаб бўлувчи бифуркация ва тармоқланиш феномени ночизикли масалаларни ечишда муҳим фактор саналади. Бу ечимлар орасида турғун ечимлар ҳамда дарҳол сўнувчи ёки амалий вазиятларда умуман рўй бермайдиган ечимлар мавжуд. Ночизикли масалаларнинг тармоқланувчи нукталарда пайдо бўлувчи янги ечимларини ўрганувчи йўналиш “турғунлик ва бифуркация назарияси” деб аталади. Бифуркацион (критик) ҳодисаларнинг яққол мисоли сифатида дивергенция (статик бифуркация) ва газ ёки суюқликдаги флаттер (платина ва қобикларнинг, хусусан, самолёт қанотларининг динамик тебранувчи турғунликни йўқотиши) ҳодисасини келтириш мумкин. Флаттер муаммоси, айниқса, товушдан тез оқимлар аэродинамикасида ўз татбиқини топди. Ўтган асрнинг ўрталарида аэродинамика масалаларини ечиш учун фақат вариацион ва тўр усуллари қўлланган. Фақат ХХІ асрга келиб, бу соҳаларда бифуркация назарияси жорий қилина бошлади.

Туғилаётган статик ва динамик ечимларнинг турғунликлари қўзғалиш назариясининг усуллари билан ўрганилади. Аниқроқ қилиб айтсак, ночизикли тенглама (тенгламалар системаси)нинг чизикли қисми, яъни Фреше ҳосиласининг тривиаль ечимдаги қийматининг хос сонлари маълум деб ҳисобланиб, Фреше ҳосиласининг тармоқланган ечимдаги қиймати спектри чизикли операторларнинг спектрал назариясидаги қўзғалиш назарияси усуллари ёрдамида қидирилади.

Шу сабабли, қўзғалиш назарияси усуллари билан ечиладиган соҳалар билан боғлиқ тадқиқотлар оқими ўтган асрнинг ўрталаридан бошлаб, экспоненциал тезлик билан ортиб бормоқда ва қўзғалиш назариясида олинадиган ҳар қандай чуқур натижа нафақат қўзғалиш назарияси, шунингдек, ночизикли масалаларни ечиш учун қўллашда ҳам долзарб ҳисобланади.

Ушбу диссертация мавзуси билан боғлиқ тадқиқотларнинг зарурияти бифуркация жараёнларининг чизикли операторлар дискрет спектрининг қўзғалишини ифода этувчи масалалар билан яқин муносабатда эканлигидадир. Каррали хос сонларнинг қўзғалиш ҳолларини тадқиқ қилиш ўзига хос махсус ҳолларни ўз ичига оладики, уларни ҳар доим ҳам ҳал қилиб бўлмайди. Масалан, фредгольм хос сонларини қўзғатиш масаласида умумлашган жордан тўпламлари (УЖТ) тўла деб қилинган фарзда қўзғатилган операторнинг бундай нукталар атрофида тармоқланувчи хос сонлари миқдори операторнинг каррали сони қанча бўлса, шунча бўлиши

аниқланган. Агар УЖТ тўла бўлмаса, тармоқланиш тенгламасининг махсуслашган ҳолати юз беради. Бунинг учун махсус алгоритм бўйича УЖТни тўлдиришни назарда тутувчи қўшимча ҳисоблашларни бажариш таклиф этилган. Бундан ташқари, тармоқланиш тенгламасининг барча коэффициентлари n -тартибли детерминантлар бўлгани учун уларни аниқлаш жуда кўп ҳисоблашларни талаб қилади. Бу ҳолат каррали хос сонларни оддий хос сонларга ёки УЖТ тўла бўлган каррали хос сонларга айлантирувчи махсус операторларни қуриш заруриятига олиб келади. Бундай операторларни қуриш жараёни берилган чизиқли операторларни регуляризациялаш деб аталади.

Чизиқли операторларни регуляризациялаш жараёни нетер нукталарни фредгольм нукталарга айлантиргани боис, бундай нукталар учун тармоқланиш тенгламасини қуриш ва ундан қўзғатилган операторнинг барча хос сонларини топиш ҳамда каррали фредгольм нукталар оддий хос сонларга айлангани сабабли, тармоқланиш тенгламасида пайдо бўладиган махсусликни йўқотиш имконияти юзага келади.

Кўп ҳажмдаги ҳисоблашларни камайтирувчи бундай усуллар ушбу диссертация мавзусига алоқадор тадқиқот натижаларидан фойдаланиш заруриятини тақозо этади.

Тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар тараққиётининг устувор йўналишларига мослиги. Диссертация Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялар тараққиётининг Ф4 «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мос равишда бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича халқаро илмий тадқиқотлар шарҳи

Ночизиқли масалаларни ечиш билан боғлиқ ёндашувлар орасида, биринчи навбатда, вариацион усулларни, қўзғалмас нукта ҳақидаги теоремаларни, катастрофалар ва бифуркациялар назариясини, топологик қурилмаларни қўлловчи ва ошқормас функциялар ҳақидаги теоремаларни мисол қилиб келтириш мумкин.

АҚШ (Колифорния университети), Буюк Британия (Эдинбург университети), Япония (Токио университети), Канада (Калгари университети), Россия (МДУ, Бауман номидаги МФТУ), Словения (Люблян университети) ва Олмония (Берлин университети)нинг илмий марказлари ва олий таълим муассасаларида ночизиқли тенгламаларни ечиш бўйича кенг қўламли тадқиқот ишлари олиб борилмоқда. Бунда ечимларнинг бифуркацияланиш ҳолати ва чизиқли операторларнинг дискрет ҳамда узлуксиз спектрларини қўзғатиш ҳоллари ўрганилмоқда. Тарқалиш назарияси ва квант майдонлари назариясида кенг қўлланиладиган узлуксиз спектрнинг қўзғалиш муаммолари билан Токио (Япония) ва Колифорния (АҚШ) университетларида шуғулланмоқдалар.

Бауман номидаги Москва (Россия) физика ва техника университетида абстракт параболик тенгламаларнинг тармоқланувчи ечимларини ночизиқли жараёнларга қўллаб турғунликка текширилмоқда. Текширилган ҳар бир масалада қўзғатишнинг редукион усуллари билан бўлмиш сонли

моделлаштириш орқали мос ечимлар оиласи турғун бўладиган бошқарувчи (физик) параметрларнинг қийматлар соҳаси аниқланган. Шу жумладан, Шмидт спектридаги стационар ва динамик масалалар тармоқланиш тенгламалари ва илдиз фазоости тармоқланиш тенгламаларининг потенциаллик ва псевдопотенциаллик шартлари ўрганилган.

Иркутск (Россия) давлат университетида Бауман номидаги Москва физика ва техника университети билан ҳамкорликда тескариланмайдиган операторлар учун оператор тенгламаларни тақрибий ечишда кенг ишлатиб келинаётган тармоқланиш назарияси масалаларида регуляризациялаш муаммолари ўрганилган.

Берлин (Олмония) университетининг илмий марказларида ночизикли хос сонлар масаласи учун кўзғалиш масалалари ечилмоқда. Ночизикли кўзғалишларни қўллаган ҳолда топологик ва конструктив усуллар ёрдамида хос векторларнинг тўлалиги ва базис ташкил этишлиги аниқланмоқда. Бундан ташқари кўп параметрли хос сонлар масаласи билан боғлиқ тадқиқотлар ўтказилмоқда.

Колифорния университети (АҚШ), Эдинбург (Буюк Британия) университети, Калгари (Канада) университети, Люблян (Словения) университети, Берлин (Олмония) университети ва Москва давлат университетида (Россия) кўп параметрли спектрал масалалар учун эргашувчи хос элементлар ва спектрнинг жордан тузилмаларини ўрганиш бўйича кенг илмий изланишлар олиб борилмоқда. Эдинбург (Буюк Британия) университети Люблян (Словения) университети ва Калгари (Канада) университети билан ҳамкорликда кўп параметрли спектрал масалалар учун илдизавий таркибини ўрганишни бошлашди. Шу кунларда хос векторларга эргашувчи элементлар тушунчаси киритилган. Бу изланишлар бошланғич ҳолатда бўлгани сабабли, махсус ёндашувларни талаб этади. Бундай масалаларга қизиқиш хос тебранишларнинг частоталари бўйича техник тизимларни ташҳис қилиш назариясида ва ҳар хил техник ускуналарнинг частотали характеристикаларини бошқариш бўйича амалий масалалардаги изланишлар туфайли кучайди. Қозон (Россия) давлат университетида ўтказилган тадқиқотлар бу масалаларда юз берадиган ҳолатлар Аткинсон талқинидаги кўп параметрли спектрал назариядаги кўзғатилган масалалар билан боғлиқ эканини кўрсатди.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Чизикли операторлар назариясида ва спектрнинг кўзғалтирилган хос сонлар масалаларида кўп ишлар қилинган бўлса-да, қаррали хос сонлар ҳолатида рўй берадиган махсуслик, жумладан, УЖТи тўла бўлмаган операторларнинг кўзғатилган хос сонларини топиш масаласи ҳалигача муаммо бўлиб келмоқда. Операторларнинг тўла бўлмаган УЖТини тўлдириш усуллари ишлаб чиқилган ва уни кўзғатилган операторнинг хос сонларини топишга қўллаш таклиф этилган бўлса-да, бу усул кўзғатилмаган операторнинг фредгольм типидagi хос сони атрофида кўзғатилган операторнинг хос сонлари миқдори қанча бўлишини аниқлаб бермайди. Ҳатто топилган хос сонларнинг кўзғатилиш параметрига қай даражада боғлиқ эканини кўрсата олмайди.

Нетер типдаги хос сонлар учун қўзғатилган операторнинг хос сонлар масаласи эса бутунлай ўрганилмаган, чунки бунда қўзғатилмаган оператор илдиз фазоостисининг ўлчами билан дефект фазоостиси ўлчами тенг бўлмагани учун бу масалага оид тармоқланиш тенгламасини куриб бўлмайди. Шунинг учун чизиқли операторларнинг спектрларини қўзғалтириш масалаларида бу ҳолатлар жаҳон миқёсида йирик муаммо бўлиб келмоқда. Мавжуд ишларнинг таҳлилидан келиб чиқиб айтиш жоизки, қўзғатилган хос сонлар масаласида каррали хос сонларнинг қўзғалтириш масалалари ҳануз ҳал этилмаган. Бу муаммоларни бартараф этиш уларга янгича ёндашувни талаб этади.

Диссертациянинг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги қуйидаги:

фундаментал илмий лойиҳалар: Ф-1.1.12 «Хос сонлар масалаларини ёлғон қўзғатилиш усули ёрдамида регуляризациялаш» (2003-2007 йй.); Ф – 4 – 02 «Математик физика ва оптимал бошқарув масалаларининг янги ечимларини дифференциал операторларнинг спектрал назарияси асосида ишлаб чиқиш» (2012-2016 йй.)да ўз аксини топган.

Тадқиқотнинг мақсади бир параметрли ва кўп параметрли хос сонлар масаласининг умумлашган жордан тўплamlари тўла бўлмаган каррали нетер ва фредгольм хос сонларини регуляризациялаш усули ёрдамида топишдан иборат.

Мақсадга эришиш учун қуйидаги **тадқиқот вазифалари** белгиланган:

регуляризация усули ёрдамида жордан тўплamlари тўла бўлмаганда хос сонларнинг аниқ миқдорини ва уларга мос келувчи хос векторларни, уларнинг ε параметрнинг бутун ва каср даражалари бўйича яқинлашувчи қаторлар кўринишидаги ифодаларини умумлашган жордан тўплamlарини (УЖТ) тўлдирмасдан топиш; қўзғатилмаган операторнинг дискрет спектрини нетер нуқтаси атрофида тармоқланувчи барча хос сонларини топиш, уларнинг қўзғатиш параметрига боғлиқлик даражасини аниқлаш;

берилган операторни регуляризациялаб ва ёлғон қўзғатиш усулларини қўллаб, фредгольм ва нетер хос сонларини уларга берилган етарлича яхши яқинлашишларига асосланиб топиш учун итерацион жараён куриш;

кўп параметрли хос сонлар масаласини ўрганиб, уларнинг бир параметрли оператор-функцияларнинг спектрларига бўлиниш шартларини аниқлаш;

кўп параметрли хос сонлар масаласига регуляризациялаш усулини қўллаш. Каррали ҳолни оддий ҳолатга келтириб, қўзғатилган масаланинг хос сонларини ва уларга мос келувчи хос элементларни топиш алгоритминини куриш. Олинган натижаларнинг татбиқи сифатида ёлғон қўзғатиш усулларини қўллаб, кўп параметрли спектрал масалаларнинг хос сонларини топиш имконини берувчи итерацион жараёнлар куриш.

Тадқиқот объекти сифатида уч хил: классик бир параметрли, Э. Шмидт талқинидаги ва кўп параметрли хос сонлар масаласи олинган.

Тадқиқот предмети – хос сонлар масалаларида каррали фредгольм ва нетер хос сонларининг қўзғатилиш ҳолатларини ўрганиш.

Тадқиқот усуллари. Диссертация натижаларини олиш давомида ночизикли таҳлил ва ночизикли тенгламалар усуллари, чизикли операторлар назарияси, алгебраик тенгламаларни ечиш учун Ньютоннинг диаграммалар усули, тақрибий ҳисоблаш усулларида модификациялаштирилган Ньютон ва Стеффенсен усуллари қўлланилган.

Диссертация тадқиқотининг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

УЖТ тўла бўлмаган ҳол учун қўзғатилган операторнинг барча хос сонларининг миқдорини аниқловчи ва уларнинг қўзғатиш параметрига боғлиқлик даражасини ўрнатувчи теоремалар исбот қилинган. Бу теоремалар исботи талабгор томонидан ишлаб чиқилган регуляризаторни қўллаш туфайли бажарилган;

қурилган регуляризатор ёрдамида дискрет спектрнинг нетер нуқталарини фредгольм нуқталарга айлантириб, нетер нуқталарнинг қўзғатилиш масаласи ҳал қилинган;

ёлғон қўзғалиш усулини қўллаган ҳолда хос сонларни топиш учун тақрибий ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқилган. n -каррали хос сонларни оддий хос сонларга айлантирувчи регуляризатор қурилиб, натижада бажариладиган амаллар сони 2^n мартаба камайтирилган;

биринчи мартаба нетер типдаги ва Э. Шмидт талқинидаги хос сонларни топиш учун итерация жараёнлари тузилган;

Ф. Аткинсон талқинидаги кўп параметрли хос сонлар масаласи учун хос сонларнинг қўзғатилишига оид Реллих-Треногин теоремаси исбот қилинган. «Нетер хос сонлари» тушунчаси киритилиб, талабгор томонидан қурилган регуляризатор ёрдамида нетер нуқталарнинг қўзғатилиш масаласи ўрганилган;

Ф. Аткинсон талқинидаги кўп параметрли спектрал масала учун хос сонларни тақрибий ҳисоблашга оид алгоритмлар тузилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

бир чегараси қўзғатилган кесма учун Штурм-Лиувиль хос сон масаласининг тармоқланиш тенгламаси қурилган, сўнгра унга регуляризациялаш усули ва Ньютон диаграммасини қўллаб, барча хос сонлари топилган;

ҳал этилмаган қўзғатилган квадрат ва эллиптик соҳа учун Лаплас операторининг барча хос сонлари аниқланган ва уларнинг қўзғалтириш параметрига боғлиқлик даражаси топилган;

каррали фредгольм хос сонларининг ҳаммасини ёлғон қўзғатиш усули ёрдамида аниқлаш имкони бўлмаганлиги учун регуляризациялаш усули билан барча, наинки фредгольм, балки нетер хос сонларини ҳам тақрибий ҳисоблаш учун итерацион жараёнлар қурилган.

Олинган натижаларнинг ишончлилиги чизикли операторлар ва қўзғатилиш назариясининг асосий теоремаларини қўллаш, жиддий математик мулоҳазалар қилиш ҳамда машҳур Ньютон ва Стеффенсен усуллари қўллаш билан асосланади. Даражали қаторларнинг яқинлашувчилиги машҳур Пюизе теоремасидан келиб чиқади.

Натижаларнинг ишончлилигини аниқлаш мақсадида бу хос сонларни тақрибий аниқлаш учун итерацион жараёнлар қурилган.

Тадқиқот натижаларининг назарий ва амалий аҳамияти. Олинган натижаларнинг назарий аҳамияти уларни ночизикли таҳлил ва ночизикли тенгламаларда олиб бориладиган масалаларга қўллаш ва математик физиканинг дифференциал ва интеграл тенгламаларининг хос сонларини бевосита аниқлашга татбиқ қилишдан иборат.

Ишнинг амалий аҳамияти каррали хос сонларни оддий хос сонларга айлантириш ҳисобига бу хос сонларни аниқлаш жараёнида бажариладиган амалларни бир неча маротаба камайтиришга эришилгани билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Олинган натижалар математик физика масалаларига ва каррали хос сонларни ҳисоблаш учун итерацион жараёнлар қуришда ҳисоблаш математикасига ҳамда қуйидаги хорижий лойиҳаларга татбиқ этилган: Россия фундаментал тадқиқотлар фонди-Руминия Фанлар академиясининг 07-01-91680 (2007-2009 й.) рақамли «Абстракт параболик тенгламаларнинг тармоқланувчи ечимларининг турғунлигини А.М. Ляпунов усули ёрдамида тадқиқ этиш ва ночизикли масалаларда қўллаш» ҳамкорликдаги лойиҳасида диссертацияда таклиф этилган қўзғатилишнинг редукцион усули ечимларнинг турғунлигини исботлашда қўлланилган; Россия илмий фондининг 14-11-00640 рақамли «Ноклассик эволюцион тенгламалар, уларнинг ечимлари мавжудлиги ва турғунлигини Морс-Конлининг топологик индекси орқали текшириш ва операторлар ярим группасининг қўзғалиш назарияси» мавзуидаги лойиҳасида қўзғатилишнинг редукцион усули ёрдамида каррали хос сонларни тадқиқ этиш оддий хос сонларни аниқлаш ҳолатига келтирилган. n каррали хос сонларни топишдаги ҳисоблаш жараёнларга қўлланган регуляризациялаш усули барча ҳисоблашларни 2^n маротаба камайтириш имконини берди. Бу ҳолат чекли сондаги зарралар физик системасининг қувват савиясини аниқлаш масалаларидаги ҳисоблаш жараёнларида кенг қўлланиб келмоқда.

Ишнинг апробацияси. Диссертацияда баён этилган асосий ҳолатлар семинарларда ва 8та илмий конференцияда маъруза қилинган, шу жумладан, Ўзбекистон Миллий университетининг (собиқ ТошДУ, 1985-2000й.) «Функционал анализ» кафедраси қошидаги шаҳар семинарида, Россиянинг Москва пўлат ва қуйиш институти «Олий математика» кафедраси семинарида (1985-1991 йй.), Ўзбекистон Миллий университети «Математик физика» кафедраси семинарида (2000-2013 йй.), Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Дифференциал тенгламаларнинг ноклассик масалалари» (2013 й.) семинарида, «Махсуслашган ва аралаш типдаги тенгламалар» Халқаро илмий конференциясида (Тошкент, 1993 й.), «Техника ва технологияларда математик методлар» 16-халқаро илмий конференциясида (С.-Петербург, 2003 й.), «Техника ва технологияларда математик методлар» 17-халқаро илмий конференциясида (Кострома, 2004 й.), «Математик физика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2005 й.) Халқаро

илмий конференциясида, «Дифференциал тенгламалар, операторлар назарияси ва космик тадқиқотларнинг замонавий муаммолари» (Алма-Ата, 2006 й.) Халқаро илмий конференциясида, «Дифференциал тенгламалар, функциялар назарияси ва амалиёти» (Новосибирск, 2007 й.) Халқаро илмий конференциясида, «Замонавий топологиянинг муаммолари ва унинг амалиёти» (Тошкент, 2013 й.) Халқаро илмий конференциясида, «Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2013 й.) республика илмий конференциясида, «SIAM – 2013» (Бухарест, 2013 й.) Халқаро илмий конференциясида маъруза қилинган.

Натижаларнинг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича 30 та мақола, шу жумладан, 22та илмий мақола (улардан 11таси хорижий журналларда) ва 8та тезис чоп этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулосалар ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Ишнинг умумий ҳажми 144 бетдан, адабиётлар рўйхати 149та номдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация ишининг долзарблиги ва зарурлиги асосланган, Ўзбекистон Республикаси фан ва технологияларни тараққий эттириш йўналишларининг тадқиқотларига мос равишда тадқиқот мақсади ва вазибалари ёритиб берилган, натижаларнинг илмий янгилиги ва илмий-амалий аҳамияти баён этилган, олинган натижаларнинг ишончлилиги асосланган, тадқиқот натижаларининг амалиётга қўлланилиши, чоп этилган ишлар рўйхати ва диссертация таркиби ҳақида маълумот келтирилган. Сўнгра диссертация мавзуси бўйича олиб борилаётган илмий тадқиқотларнинг халқаро шарҳи, муаммони ўрганганлик даражаси ва олинган натижаларнинг қисқа шарҳи баён этилган.

Спектрал назария Б.Тейлорнинг 1713 йилда торнинг тебраниши бўйича олиб борган изланишларидан сўнг шакллана бошлаган. Кейинчалик бу назария 19 асрда Штурм ва Лиувилль, Г.Вейль, В.Вольтер ва М.Рисс, Д.Гильберт, С.Банах, Мазур, Шаудер ва 20 аср бошқа кўп математикларининг ишларида ривожлантирилган. Охирги 60 йил мобайнида бу ишлар собиқ иттифокда Гельфанд, М.Г.Крейн ва Наймарк, Японияда Какутани, Като, Курода ва Иосида, Руминияда Коложоар ва Фойаш, АҚШда Хилль ва Филлипс, Фридрихс, фон Нейман, Пэли ва Винернинг ишларида давом эттирилган. Бу давр мобайнида ўз-ўзига қўшма операторлар назариясига асос солиниб, бу назариянинг асосий муаммолари етарлича ҳал қилинган эди. Замонавий физиканинг ривожини бу назариянинг атом физикаси, тарқалиш назарияси, уч жисмнинг квант механикаси масалаларига, квант майдонлар назарияси ва математик физика масалаларига тадқиқ қилинишига сабаб бўлди.

Дифференциал операторларнинг тескариланиш ва чегаравий масалаларнинг ечилиш муаммолари псевдодифференциал операторларни,

ечимларнинг сифат ўзгаришлари масалалари бу операторларнинг спектрал хоссаларини тадқиқ этиш заруриятига олиб келди.

Спектрал ёйилманинг ва каррали тригонометрик қаторларнинг яқинлашини таъминловчи аниқ шартлар В.А. Ильин томонидан ўрнатилган. Бу тадқиқотлар кейинчалик унинг шогирдлари Ш.А. Алимов ва Е.И. Моисеевлар томонидан умумийроқ операторлар учун давом эттирилган. Улар томонидан наинки спектрал ёйилмалари, балки уларнинг Рисс ўрта қийматларини ҳам текис яқинлашишини таъминловчи шартлари аниқланган. Ш.А. Алимов раҳбарлигида унинг шогирдлари Р.Р. Ашуров, О.Р. Холмухамедов, Б. Турметов, А.А. Рахимов ва Ш.Г. Касимовлар бу натижаларни m –тартибли эллиптик дифференциал операторлар ва каср тартибли дифференциал операторлар учун Соболев $W_p^\alpha(\Omega)$, Никольский $H_p^\alpha(\Omega)$, Лиувилль $L_p^\alpha(\Omega)$, Бесов $B_p^\alpha(\Omega)$ ва Зигмунд-Гёлдер $C^\alpha(\Omega)$ синфига тегишли функциялар ҳоли учун ривожлантиришган.

Қўзғатиш назарияи Рэлей ва Шредингер томонидан яратилган. Рэлей тебранишларнинг частоталари ва модаларини тўла ифода этувчи содда системалардан кам фарқ қилувчи системаларнинг хос частоталари ва модаларини ҳисоблаш формуласини берган. Математик нуқтаи-назардан бу услуб хос сонлар масаласи аввалдан ҳал бўлган соддароқ чизиқли операторлардан кам фарқ қилувчи чизиқли операторларнинг хос сонларини тақрибий ҳисоблаш масаласига эквивалентдир. Шредингер бу услубни квант механикасида вужудга келадиган хос сонлар масаласи учун ривожлантирган.

Бу дастлабки ишлар математик нуқтаи-назардан формал тусда бўлиб, тўла эмас эди. Бунда хос сонлар ва хос элементлар қўзғатилган операторнинг тўлғаланмаган оператордан фарқини ифода этувчи кичик параметрга нисбатан даражали қаторга ёйилади деб фараз қилинган. Бу қаторларни яқинлашишга текширишга уринишлар бўлмаган. Қаторларнинг яқинлашиш масаласи Ф. Реллихнинг чоп этилган қатор ишларидан сўнг ҳал бўлган.

Қаторларнинг яқинлашишини Ф. Реллих мажорантлар усули билан исботлаган. Кейинги изланишлар у қўзғатилган операторнинг ҳамма хос сонлари ва уларга мос келувчи хос векторларни топа олмаганлигини кўрсатди.

Кейинчалик, унинг бу изланишлари Т. Като, М.И.Вишик, Л.А.Люстерник, Н.Н.Назаров, К.Т. Ахмедов, П.Г. Айзенгендлер, М.М. Вайнберг, В.А. Треногин, Б.В. Логинов ва Н.А. Сидоровларнинг ишларида ўз-ўзига қўшма бўлмаган операторлар учун давом эттирилган. В.А. Треногин бу масалани тармоқланиш назарияси усуллари ёрдамида ўрганган. У А.М.Ляпунов ва Э.Шмидт усулини ва Ньютоннинг диаграммалар усулини қўллаб, қўзғатилган операторнинг ҳамма хос сонлари ва уларга мос келувчи хос векторларини топишга муваффақ бўлган ва улар ε нинг бутун ва каср даражалари бўйича яқинлашувчи даражали қаторлар кўринишида ифодаланишини кўрсатган. Бунда хос сонлар сони билан қўзғатилмаган Фредгольм операторларнинг карралик сони ўртасида муносабат ўрнатилган. Ҳамма тасдиқлар Жордан занжирлари тўпламини тўла деб қилинган фаразда

исботланган. Хусусан, Жордан занжирлари тўплами тўла бўлмаган ҳол учун уни тўлдириш усули кўрсатилган. Кейинчалик унинг бу ғояси асосида Б.В. Логинов ва Ю.Б. Русак умумий ҳолларни қамраб олиб чуқур тадқиқ этганлар. Жордан тўпламларини тўлдириш тармоқланиш тенгламасига Реллих-Треногин теоремасини қўллаш имконини берса-да, у ўзига яраша ноаниқликларга олиб келади. Масалан, Жордан тўпламлари ҳажми ошиши мумкин, яъни қўшимча хос сонлар пайдо бўлиши мумкин. Бундан ташқари тўлдириш жараёни кўп амаллар бажаришга мажбур этади.

Чизиқли тенгламаларни чизиқли кичик қўшилувчилар билан қўзғалтириш масалаларида ва қўзғатилган фредгольм операторларининг хос сонларини топиш масалаларида УЖТлари тўла бўлганда аниқ ва лўнда натижалар олинган. УЖТлари тўла бўлмаганда бундай натижаларга қўшимча қурилмалар ёрдамида келиш мумкин. Шу сабабли, савол туғилади: 1) Шунга ўхшаш натижаларни берилган УЖТни тўлдирмасдан олиш мумкинми? 2) Нетер операторлари учун айнан худди шундай натижалар олиш мумкинми? Бу саволлар ечимига **диссертациянинг биринчи боби** бағишланган. У 5 та параграфга бўлинган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида чизиқли операторларнинг спектрал назариясидан ночизиқли тенгламалар ечимларининг тармоқланиш назариясида кенг қўлланиладиган асосий таърифлар келтирилган ва чизиқли тенгламаларни чизиқли кичик қўшилувчилар билан қўзғатиш масаласининг ечими ва унинг қўзғалтириш параметрига нисбатан боғлиқлик даражаси ҳақидаги теорема УЖТлари тўла бўлмаган ҳолат учун исбот қилинган.

Шу бобнинг иккинчи параграфида спектрал параметрга нисбатан аналитик бўлган чизиқли оператор-функцияларнинг фредгольм хос сонларининг қўзғатилиш масаласи кўрилган.

E_1, E_2 - қандайдир банах фазолари, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ эса $t \in G \subset C$ спектрал параметрга нисбатан аналитик бўлган оператор-функция бўлсин.

Фараз қилайлик, λ берилган оператор-функциянинг фредгольм хос сони бўлиб, унга мос келувчи хос фазоостиси $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$ ва дефект фазоостиси $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$ бўлсин. Хан-Банах теоремасининг натижасига кўра $\{\varphi_i\}_1^n, \{\psi_i\}_1^n$ системаларга биортогонал бўлган $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*, \{z_i\}_1^n \subset E_2$ системалар мавжуд. У ҳолда $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ проекторлар берилган фазоларни $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \oplus E_{2,\infty-n}$ тўғри йиғиндиларга ажратади.

Таъриф 1.1.7. Агар $A(\lambda_0)$ ва $\sum_{s=1}^{\infty} A_s (\lambda - \lambda_0)^s$ операторларнинг умумий ноллари бўлмаса, бундай шартни «махсусликни йўқотиш шarti» деб атаймиз.

Махсусликни йўқотиш шarti диссертацияда кўрилатган қўзғатилишга оид барча масалаларда қўлланиладиган регуляризация жараёнининг бажарилишини таъминлайди.

Фараз қилайлик, $\varepsilon \in C$ кичик параметр, $|\varepsilon| \leq \rho_0$ ва $A(t; \varepsilon) = \sum_{k+l=0}^{\infty} A_{lk} \mu^l \varepsilon^k : E_1 \rightarrow E_2$, $\mu = \lambda - \lambda_0$ кўзғатилган шундай оператор-функцияки, $A(t; 0) = A(t)$ бўлсин.

Ҳар бир $i = \overline{1, n}$ учун $\bar{A}_i(t) = A(t) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$ операторларни киритиб, $A(t; \varepsilon)$ операторнинг ёйилмасида $A(t)$ операторни $\bar{A}_i(t)$ операторга алмаштирсак, қуйидаги "регуляризацияланган" операторларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{A}_i(t; \varepsilon) \equiv A(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0} . \quad (1)$$

Қуйидаги теоремалар ўринли.

Теорема 1.2.1. Махсусликни йўқотиш шарти бажарилсин. Агар $\lambda_i(\varepsilon)$ ва $\varphi_i(\varepsilon)$, $\psi_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ лар $A(t; \varepsilon)$ операторнинг операторнинг хос сонлари ва уларга мос келувчи хос ва дефект элементлари бўлса, у ҳолда ҳар бир $i = \overline{1, n}$ ва етарлича кичик ε учун $\lambda_i(\varepsilon)$ (1) операторнинг ҳам хос сонлари бўлиб, уларга мос келувчи хос элементлар ва дефект функционаллар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{j \neq i} c_{is} \varphi_s, \quad \tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i + \sum_{j \neq i} d_{is} \psi_s . \quad (2)$$

Теорема 1.2.2. Агар барча $i = \overline{1, n}$ лар учун $\dim N(A(\lambda_0)) = \dim N^*(A(\lambda_0)) = n$ ва $\langle A_1 \varphi_{i0}, \psi_{i0} \rangle \neq 0$ бўлса, у ҳолда етарлича кичик ε лар учун ε га нисбатан аналитик бўлган роппа-роса n та $\lambda_i(\varepsilon)$ ($\lambda_i(0) = \lambda_0$) хос сонлар мавжуд. Уларга мос келувчи $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ хос элементлар ва $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$ дефект функционаллар ҳам ε га нисбатан аналитик бўлади.

Параграфнинг асосий теоремаси қуйидагича.

Теорема 1.2.3. Кўзғатилмаган оператор-функциянинг λ_0 фредгольм хос сонига мос келувчи УЖТ чекли узунликли жордан занжирларидан тузилган бўлиб, N унинг каррали сони бўлсин. Агар $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ ва $L_{11} \neq 0$, бўлса, у ҳолда $A(t; \varepsilon)$ оператор-функциянинг N та $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қатор кўринишида ифодаланувчи хос сонлари ва уларга мос келувчи хос элементлари мавжуд. Агар $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}$, $L_{0q_i} = 0$, $L_{11} \neq 0$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда роппа-роса N та хос сон мавжуд бўлиб, улардан n таси ўз хос элементлари билан ε нинг бутун даражалари бўйича яқинлашувчи қатор шаклида ифодаланса, қолган $N-n$ таси ўз хос элементлари билан $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қатор кўринишида ифодаланади.

§1.3 аналитик оператор-функциялар нетер хос сонларининг кўзғатилишига бағишланган.

Фараз қилайлик, λ_0 $A(t)$ оператор-функциянинг нетер хос сони ва $N(A(\lambda_0)) = \{\varphi_{i0}\}_1^n$, $N^*(A(\lambda_0)) = \{\psi_{i0}\}_1^m$, $n > m$ бўлсин.

E_2 фазода $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ идеал элементлар (E_2^* фазода $\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$ элементлар) киритиб, қуйидаги регуляризацияни бажарамиз:

$$\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}. \quad (3)$$

Теорема 1.3.1. $A(t)$ оператор-функциянинг берилган λ_0 нетер хос сони (3) оператор-функциянинг фредгольм хос сонидир ва аксинча.

Агар иккинчи мартаба регуляризацияласак:

$$\tilde{A}_i(t, \varepsilon) \equiv \bar{A}(t, \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

Теорема 1.3.2. Ҳар бир $i = \overline{1, m}$ ва етарлича кичик ε лар учун $\lambda_i(\varepsilon)$ хос сон (4) операторнинг оддий хос сони бўлиб, унга мос келувчи хос элемент $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} a_{is} \varphi_s(\varepsilon)$ ва дефект функционал $\tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} b_{is} \psi_s(\varepsilon)$ бўлади.

Қуйидаги теорема параграфнинг асосий натижасидир.

Теорема 1.3.4. Берилган λ_0 учун УЖТ мавжуд ва барча $i = \overline{1, m}$ лар учун $\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_{i0}^{p_i+1-k}, \psi_{i0} \right\rangle \neq 0$ бўлсин. $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ ва $L_{11} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $A(t, \varepsilon)$

оператор-функциянинг $N = p_1 + \dots + p_m$ та $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қатор кўринишида ифодаланувчи хос сонлари ва уларга мос келувчи хос элементлари мавжуд. Агар $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}$, $L_{0q_i} = 0$ ва $L_{11} \neq 0$ шартлар ўринли бўлса, у ҳолда роппа-роса N та хос сон мавжуд бўлиб, улардан m таси ўз хос элементлари билан ε нинг бутун даражалари бўйича яқинлашувчи қатор шаклида ифодаланса, қолган $N-m$ таси ўз хос элементлари билан $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$ нинг даражалари бўйича яқинлашувчи қатор кўринишида ифодаланади.

2-эслатма. Агар $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ ва $L_{11} = 0$ бўлса, Ньютон диаграммаси усули $\{L_{1j}\}$ коэффициентлар кетма-кетлигининг биринчи нолдан фарқли ҳади орқали барча хос сонларни ε нинг каср даражалари бўйича яқинлашувчи даражали қаторлар кўринишида топиш имконини беради.

Амалий татбиқ сифатида §4 да учта масала кўрилган: Штурм-Лиувилль дифференциал оператори хос сонининг кўзғатилиши, Лаплас операторининг кўзғатилган квадрат ва эллиптик соҳалар учун Дирихле масалаларининг хос сонлари. Уларга §2нинг натижалари қўлланиб, уларнинг $(\lambda_0, 0)$ дан тармоқланувчи хос сонлари ва уларга мос келувчи хос функциялари топилган.

20-аср бошларида Э.Шмидт ўз ишларида s -сонлар тушунчасини, яъни H сепарабел Гильберт фазосини ўзига акслантирувчи $B: H \rightarrow H$

операторнинг λ хос сони ва унинг $B\varphi = \lambda\psi$, $B^*\psi = \lambda\varphi$ тенгликларни қаноатлантирувчи φ ва ψ хос элементларини киритган. Бу билан у ўз-ўзига қўшма бўлмаган операторлар учун Гильберт-Шмидт назариясини умумлаштирган. Кейинчалик, улар Б.В.Логинов ва О.В.Макееваларнинг ишларида Э.Шмидт хос сонлари деб атала бошлаган. Улар Гильберт фазоларида чизикли операторларнинг Шмидт спектри бўйича спектрал ёйилмасини куришган ва бу натижалар Диракнинг релятивистик квант назариясида ва электромагнит жараёнларнинг айрим муаммоларини ўрганишда учрашини таъкидлаб ўтишган.

§5да §2 натижалари асосида Э.Шмидтнинг хос сонлари ва мос хос элементларининг қўзғалиши ўрганилган. Хос сонларнинг тармоқланиш тенгламалари курилиб, тармоқланувчи хос сонлар ва уларга мос келувчи хос элементлар мавжудлиги исботланиб, уларнинг ε параметрга боғлиқлик даражалари аниқланган.

Қўйилган масалаларнинг мураккаблиги сабаб, кўп хос сонлар масалаларини аналитик тарзда ечиб бўлмайди. Шу боис, уларга тақрибий ечиш усуллари кўллашга мажбур бўлинган. Бунинг оқибатида сонли усуллар назарияси тез ривожланиб кетди. Содда матрицалардан тортиб, то ўз-ўзига қўшма операторларнинг хос сонларини топиш учун жуда кўп тақрибий ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқилди.

Ўтган асрнинг 60-йилларида М.К.Гавурин қўзғалтириш назарияси ғояларига асосланган, ёлғон қўзғалтириш усули деб аталган, Гильберт фазоларини ўзига акслантирувчи ўз-ўзига қўшма операторларнинг хос сонлари ва хос векторларини топиш имконини берувчи усул таклиф этди. Бу усул, хос сон ва хос векторга берилган бошланғич мифдорларни қўзғаланган операторнинг аниқ хос сони ва аниқ хос векторига айлантирадиган D_0 операторни куриш ғоясига асосланади. М.К.Гавуриннинг натижалари ўз-ўзига қўшма бўлмаган операторларнинг хос сонлари ҳоли учун Ф.Кунерт томонидан давом эттирилган. Ёлғон қўзғаланиш усули ўзининг кейинги ривожини Б.В.Логинов, Н.А.Сидоров ва Д.Г.Рахимовлар ишида топди. Бу натижалар кўп параметрли спектрал масалалар учун Д.Г.Рахимов томонидан тадқиқ қилинган. Бизнинг аср бошида Б.В.Логинов ва О.В.Макеевалар бу усулни яна давом эттиришди.

Диссертациянинг **иккинчи боби** 1-боб натижаларининг татбиқи сифатида банах фазоларини акслантирувчи спектрал параметрга нисбатан аналитик бўлган оператор-функциялар хос сонлари ва уларга мос келувчи хос элементлар ва эргашувчи элементларни ҳисоблашга бағишланган.

§2.1 спектрал параметрга нисбатан етарлича силлиқ бўлган оператор-функциянинг карралиги бирдан катта бўлган фредгольм хос сонларини аниқлашга бағишланган.

Фараз қилайлик, E_1, E_2 - қандайдир банах фазолари, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ эса $t \in G \subset C$ спектрал параметрга нисбатан етарлича силлиқ бўлган оператор-функция бўлсин. λ берилган оператор-функциянинг дискрет спектрнинг бошқа қисмидан ажралган n каррали фредгольм хос сони бўлиб, унга мос

келувчи хос фазоостиси $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$ ва дефект фазоостиси $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$, $k = \det\|\langle A'(\lambda)\varphi_i, \psi_i \rangle\| \neq 0$ бўлсин. Фараз қилайлик, қидирилатган λ φ_i, ψ_i , $i=1,2,\dots,n$ спектрал микдорларга етарлича яхши яқинлашувлар φ_{i0}, ψ_{i0} и $\Lambda: \|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $|\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$ маълум бўлсин.

Қидирилатган хос сонга дастлабки яқинлашув λ_0 сифатида қуйидаги тенгламанинг ечимларидан бирини оламиз:

$$F^0(t - \Lambda) \equiv f^0(t) \equiv \det\|\langle A(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| = 0.$$

Етарлича кичик ε учун $k_0 = \det\|\langle A'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| \neq 0$. Шунинг учун $\{\varphi_{i0}\}, \{\psi_{i0}\}$ элементларга биортогонал системаларни қуйидагича қуриш мумкин:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^0 A^{*'}(\lambda_0) \psi_{i0}, \quad z_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{s=1}^n K_{sj}^0 A'(\lambda_0) \varphi_{s0},$$

бу ерда K_{is}^0 лар $k_{is}^0 = \langle A'(\lambda_0)\varphi_{s0}, \psi_{i0} \rangle$ элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари. $k_0 \neq 0$ бўлгани сабабли, шундай i_0 номер топиладики, $k_{i_0 1}^0 = \langle A'(\lambda_0)\varphi_{i_0 0}, \psi_{10} \rangle \neq 0$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Қуйидаги $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{j=2}^n \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$ оператор-функцияни киритамиз.

Теорема 2.1.1. $A(t)$ операторнинг қидирилатган λ хос сони $\bar{A}(t)$ операторнинг ажралган фредгольм хос сони бўлиб, унга мос келувчи хос элементи ва дефект элементи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\tilde{\varphi} = \varphi_{10} + \sum_{s=2}^n c_s \varphi_{s0}, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i_0 0} + \sum_{j \neq i_0} d_j \psi_{j0}.$$

Бунда $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$ лар $\tilde{\varphi}$ ва $\tilde{\psi}$ ларга етарлича яхши яқинлашишлар бўлади.

Ёлғон кўзғатиш усулини

$$\bar{A}(t)x = 0 \tag{5}$$

тенгламага қўллаймиз. Бунинг учун дастлабки яқинлашув λ_0 сифатида қуйидаги тенгламанинг ечимларидан бирини оламиз: $f(t) \equiv \langle \bar{A}(t)\varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle = 0$.

φ_{10} ва $\psi_{i_0 0}$ элементларга биортогонал бўлган

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}^{*'}(\lambda_0) \psi_{i_0 0} \in E_1^*, \quad \tilde{z}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}'(\lambda_0) \varphi_{10} \in E_2$$

элементларни аниқлаймиз.

Ёлғон кўзғатиш оператори қуйидаги кўринишда қурилади:

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \bar{A}(\lambda_0) \varphi_{10} + \langle x, \bar{A}^*(\lambda_0) \psi_{i_0 0} \rangle \tilde{z}_0.$$

У ҳолда $N(\bar{A}(\lambda_0) - D_0) = \{\varphi_{10}\}$, $N(\bar{A}^*(\lambda_0) - D_0^*) = \{\psi_{i_0 0}\}$.

Ляпунов-Шмидт усулини (5) тенгламага татбиқ этсак, λ қуйидаги тармоқланиш тенграмаси деб аталувчи

$$F(t) \equiv \left\langle (D_0 + \overline{A}(t) - \overline{A}(\lambda^0)) [I + \overline{\Gamma}_0 (D_0 + \overline{A}(t) - \overline{A}(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{i_0}, \psi_{i_0} \right\rangle = 0 \quad (6)$$

тенграманинг оддий илдизи бўлиб қолади, бу ерда $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{A}(\lambda^0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Теорема 2.1.2. Агар бошланғич яқинлашишлар етарлича яхши бўлса, у ҳолда шундай C, C_1, L_1 ва K сонлар топиладики, $h = C\varepsilon(|k_{i_0}| - C_1\varepsilon)^{-1}(1 + L_1)K < 1$ шарт бажарилганда, λ хос сонни (6) тенгламадан

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0 \quad (7)$$

Эйткен-Стеффенсен усули ёрдамида топиш мумкин, бу ерда $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = \frac{(F(t') - F(t''))}{(t' - t'')}$.

Теорема 2.1.3. $A(\lambda)$ операторнинг λ хос сонига мос келувчи $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$ хос элементлар қуйидаги тенграмалар ечими бўлади:

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Параграф охирида олинган натижалар татбиқи сифатида тўртта масала: матрица учун, Штурм-Лиувиль масаласи учун, Лаплас операторининг қўзғатилган квадрат ва эллиптик соҳа учун қўйилган хос сон масалалари кўрилган.

2.2 параграфда битта занжирли хос сонни ҳисоблаш усули кўрилган. Хос соннинг алгебраик карралигини биргача камайтирувчи, яъни каррали хос сонни регуляризацияланган операторнинг оддий хос сонига айлантирувчи оператор қурилган.

2.3 параграфда спектрал параметрга нисбатан чизикли бўлган оператор-функция учун УЖТ бўлган каррали хос сонини ҳисоблаш масаласи кўрилган.

Фараз қилайлик, E_1 ва E_2 - банах фазолари, $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \rightarrow E_2$, $A_1 : E_1 \supset D(A_1) \rightarrow E_2$ зич аниқланган ёпиқ чизикли операторлар бўлиб, $D(A_0) \subset D(A_1)$ ва A_1 оператор A_0 га бўйсунувчи (яъни $D(A_0)$ да $\|A_1 x\|_{E_2} \leq \|A_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$) ёки $D(A_1) \subset D(A_0)$ ва A_0 оператор A_1 га бўйсунувчи (яъни $D(A_1)$ да $\|A_0 x\|_{E_2} \leq \|A_1 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$) бўлсин.

Қуйидаги хос сон масаласини кўрайлик:

$$(A_0 - tA_1)x = 0.$$

Фараз қилайлик, $N(A_0 - \lambda A_1) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ ва унга эргашувчи A_1 - ва A_1^* - жордан занжири узунлиги $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$,

$$(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1\varphi_i^{(s-1)}, \quad (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s-1)} = A_1^*\psi_i^{(s-1)}, \quad s = \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K = \det \left\| \langle A_1\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle \right\| \neq 0, \quad L = \det L_{ij} \neq 0, \quad L_{il} = \left\| \langle A_1\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k^{(1)} \rangle \right\|,$$

$$i(k) = \overline{1, n}, \quad j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}$$

бўлсин.

Номалум λ хос сон ва УЖЗ элементларига етарлича яхши $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}$ яқинлашишлар маълум бўлсин: $\|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \|\psi^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$.

Қуйидаги регуляризацияни бажарамиз:

$$\overline{A}(t) \equiv \overline{(A_0 - tA_1)} = A_0 - tA_1 + \sum_{k=2}^{p_1} \langle \cdot, \gamma_{i0}^{(k)} \rangle z_{i0}^{(p_1+1-k)} + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_{i0}^{(k)} \rangle z_{i0}^{(p_i+1-k)}. \quad (8)$$

Теорема 2.3.1. Изланаётган λ хос сон (8) операторнинг оддий хос сони бўлиб, унинг хос элементи ва дефект элементи қуйидагича аниқланади:

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1^{(p_1)} + \sum_{i=1}^n c_{i1} \varphi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{s=2}^{p_i} c_{is} \varphi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s} \varphi_1^{(s)}, \quad (9)$$

$$\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{i=2}^n d_{i1} \psi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} d_{is} \psi_i^{(s)}. \quad (10)$$

$\tilde{\varphi}$ ва $\tilde{\psi}$ ларга бошланғич яқинлашишлар сифатида $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{i0}^{(p_1)} - \varphi_{i0}^{(p_1-1)}$ ва $\tilde{\psi}_0 = \psi_{i0}$ ларни қабул қиламиз. У ҳолда $\lambda_0 = \frac{\langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle + 1}{\langle A_0 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle}$ деб олиш мумкин.

Бундан $k_0 = \langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_{i0}^{(p_1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle A_1 \varphi_{i0}^{(p_1-1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_{i0}^{(p_1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle \neq 0$

эканлигини ҳисобга олсак, $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_0} A_1^* \psi_{i0}, \tilde{z}_0 = \frac{1}{k_0} A_1 \tilde{\varphi}_0$ дейиш мумкин. У

ҳолда, $\langle \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 1, \langle \tilde{z}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 1$ бўлади.

Ёлғон қўзғаланиш операторини қуйидаги шаклда курамиз:

$$\begin{aligned} D_0 x &= \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0 + \langle x, \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0 \rangle \tilde{z}_0, \\ D_0^* y &= \langle \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}, x \rangle \tilde{\gamma}_0 + \langle \tilde{z}_0, \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0 \rangle \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0. \end{aligned}$$

У ҳолда $D_0 \tilde{\varphi}_0 = \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0, D_0^* \tilde{\psi}_0 = \overline{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0$, яъни $N(\overline{A}(\lambda^0) - D_0) = \{\tilde{\varphi}_0\}, N(\overline{A}^*(\lambda^0) - D_0^*) = \{\tilde{\psi}_0\}$.

Тармоқланиш тенгламаси бу ҳол учун қуйидагича бўлади:

$$F(t) \equiv 1 - \left[I + \overline{\Gamma}_0 (D_0 + \overline{A}(t) - \overline{A}(\lambda_0)) \right]^{-1} \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 = 0, \quad (11)$$

бу ерда $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{A}(\lambda_0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Фараз қилайлик, $S(\lambda_0; \rho)$ - радиуси ρ маркази λ_0 нуқтада бўлган бирор шар бўлсин.

Теорема 2.3.2. Агар бошланғич яқинлашишлар етарлича яхши бўлса, у ҳолда шундай $S(\lambda_0; \rho)$ шар мавжудки, бу ерда $\eta = \|F'(\lambda_0)\| F(\lambda_0)$,

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} \eta \leq \rho, \quad h = |F'(\lambda_0)|^{-1} L |F(\lambda_0)| \leq \frac{1}{4}, \quad (11) \quad \text{тенглама ягона } \lambda \text{ ечимга}$$

эга бўлиб, уни қуйидаги

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - [F'(\lambda_0)]^{-1} F(\lambda_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

модификациялаштирилган Ньютон усули билан ҳисоблаш мумкин.

Айтиш лозимки, (12) итерацион жараённинг ҳар бир қадамида биттадан қуйидаги оператор тенгламани ечиш керак:

$$[\bar{A}(\lambda_m) + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0] x = \tilde{z}_0.$$

Теорема 2.3.3. УЖТ элементлари $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^p, \{\psi^{(i)}\}_{i=1}^p$ қуйидаги рекуррент системанинг ечимларидир:

$$\begin{aligned} \left[A_0 - \lambda A_1 + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} \right] x &= z_{i0}, \quad \left[A_0^* - \lambda A_1^* + \sum_{s=1}^n \langle z_{s0}, \cdot \rangle \gamma_{s0} \right] y = \gamma_{i0}, \\ \left[A_0 - \lambda A_1 + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} \right] x_{j,i} &= A_1 x_{j-1,i} + z_{i0}, \quad x_{1i} = \varphi_i, \quad x_{j,s} = \varphi_i^{(j)}, \\ \left[A_0^* - \lambda A_1^* + \sum_{s=1}^n \langle z_{s0}, \cdot \rangle \gamma_{s0} \right] y_{j,i} &= A_1^* y_{j-1,i} + \gamma_{i0}, \quad y_{1i} = \psi_i, \quad y_{j,i} = \psi_i^{(j)}, \\ j &= \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

§ 2.3.2да аналитик оператор-функциялар ҳолати ўрганилган. Бунинг учун юқорида келтирилган хоссаларга эга биортогонал системаларни қуриб бўлмаслиги сабабли, линеаризациялаш усули ёрдамида аналитик ҳолат чизиқли оператор-функциялар ҳолатига келтирилган. Сўнгра 2.3.1 параграфнинг натижалари қўлланиб, керакли натижалар олинган.

Параграф охирида аналитик оператор-функцияларнинг хос сонлари ва уларга мос келувчи УЖТ элементларини қўзғатилиш назариясига асосланган усул ёрдамида топиш масаласи кўрилган.

§ 2.4да нетер хос сонлари бўлган ҳол ўрганилган.

Фараз қилайлик, $A(t) \quad t \in G \subset C$ га нисбатан етарлича силлиқ, E_I банах фазосини E_2 банах фазосига акслантирувчи чизиқли оператор-функция бўлиб, λ унинг дискрет спектрини ажралган нетер нуқтаси, $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{p_i}}$ эса унга мос келувчи УЖТ бўлсин. Айнан шундай $\{\psi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{m}}^{j=1, \overline{p_i}}$ унга қўшма бўлган $A^*(\lambda)$ операторнинг УЖТи бўлсин. Аниқлик учун $n > m$ ва $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{p_i}}$ УЖТ m -тўла бўлсин деб ҳисоблаймиз. Умумийликни бузмаган ҳолда $p_j > \max_{1 \leq i \leq m} p_i, j > m$ деб фараз қиламиз, қандайдир етарлича яхши $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}$:

$$\|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \quad \|\psi_i^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \quad |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon \quad i = \overline{m+1, n}, \quad s \leq \max_{1 \leq j \leq m} p_j + 1,$$

$i = \overline{1, m}, s = \overline{1, p_i}$ лар учун, яқинлашишлар маълум бўлсин.

Берилган $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ ва $\{\psi_{i0}\}_1^m$ системаларга биортогонал бўлган системаларни мос равишда $\{\gamma_{i0}\}_1^n$ ва $\{z_{i0}\}_1^m$ деб белгилаймиз.

E_2 (худди шундай E_2^*) фазони 1-бобнинг §1.3 идаги каби идеал $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ ($\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$) элементларга тортилган фазоостисига кенгайтирамиз.

Умумийликни бузмаган ҳолда, $\langle A'(\lambda)\varphi_1, \psi_1 \rangle \neq 0$ дейиш мумкин.

Қуйидаги $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$ оператор-функцияни курамиз.

Лемма 2.4.1. $A(t)$ операторнинг нетер типидagi λ хос сони $\vec{A}(t)$ операторнинг фредгольм типидagi хос сони бўлади. Бунда унга мос келувчи хос элемент $\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{k=2}^n c_k \varphi_k$ ва дефект функционал $\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{k=2}^n d_k \psi_k$ бўлади.

φ_{10}, ψ_{10} элементлар $\vec{A}(\lambda)$ ва $\vec{A}^*(\lambda)$ операторларнинг $\tilde{\varphi}$ ва $\tilde{\psi}$ нол элементларига бошланғич яқинлашиш бўлиши мумкинлиги исбот қилинади..

$\tilde{n}_k, d_k, k = \overline{2, n}$, коэффициентлар етарлича кичик бўлганлиги сабабли, $\tilde{k} = \langle \vec{A}'(\lambda)\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$ бўлади.

λ хос сонни аниқлаш мақсадида қуйидаги

$$\bar{A}(t)x = 0$$

масалага ёлғон қўзғаланиш усулини қўллаймиз, бунинг учун бошланғич яқинлашиш λ_0 сифатида $f(t) \equiv \langle \bar{A}(t)\varphi_{10}, \psi_{10} \rangle = 0$ тенгламанинг илдизи олинади.

Изланаётган хос сон учун тармоқланиш тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$F(t) \equiv \left\langle (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda_0)) [I + \bar{\Gamma}_0 (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda_0))]^{-1} \varphi_{10}, \psi_{10} \right\rangle = 0. \quad (13)$$

Теорема 2.4.1. Агар бошланғич яқинлашишлар етарлича яхши бўлса, у ҳолда шундай C, C_1, L_1 и K сонлар мавжудки, $h = C\varepsilon \left(|k_{i_0}| - C_1\varepsilon \right)^{-1} (1 + L_1)K < 1$ шарт бажарилганда, λ хос сонни (13) тенгламадан

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0$$

Эйткен-Стеффенсен усули ёрдамида топиш мумкин, бу ерда $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = \frac{(F(t') - F(t''))}{(t' - t'')}$.

Берилган $A(\lambda)$ операторнинг изланаётган λ хос сонига мос келувчи $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, \delta$ хос элементлари қуйидаги

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, \delta}$$

тенгламаларнинг ечими сифатида аниқланади.

Агар $A(t) = B - tA$ оператор-функция m - тўла УЖТга эга бўлса, қуйидагича

$$\overline{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$$

регуляризация бажарамиз.

Лемма 2.4.2. Изланаётган λ хос сон $\overline{A}(t)$ оператор-функциянинг, ноллари $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \sum_{k=m+1}^n c_{ik} \varphi_k$ ва дефект функционаллари

$\tilde{\psi}_i = \psi_i + \sum_{k=m+1}^n d_{ik} \psi_k$, $i = \overline{1, m}$ кўринишда бўлган фредгольм хос сони бўлади.

Лемма 2.4.3. Агар $\{\overline{\varphi}_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{\delta}}^{j=\overline{1, p_i}}$ тўплам $\overline{A}(\lambda)$ операторнинг λ хос сонига мос келувчи УЖТ бўлса, у ҳолда берилган $\varphi_{i0}^{(s)}$ яқинлашишлар $\overline{\varphi}_{i0}^{(s)}$, $s = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, m}$ элементлар учун ҳам яқинлашиш бўлади.

Шундай қилиб, биз §2.3 да кўрилган ҳолга келдик. §2.3 услубини қўллаб изланаётган λ хос сон ва унга мос келувчи УЖТ элементлари топилган.

A модел масаласининг каррали хос сонлари ва уларга мос келувчи хос элементларини топишга иккинчи параграфнинг бешинчи банди бағишланган. Берилган масалани регуляризациялаш ҳисобига каррали хос сон оддий хос сон ҳолига келтирилган. Сўнгра, ёлғон кўзғалиш усулини қўллаб, изланаётган хос сон ва мос келган УЖТ элементлари ҳисобланган.

Учинчи боб кўп параметрли спектрал масалаларга бағишланган. Умумий спектр тушунчаси чизиқли операторлар коммутатив йиғмаси учун улар орқали аниқланувчи операторларнинг алгебраси орқали киритилади. Умумий спектр алгебрани танлашга боғлиқ бўлгани учун у ягона бўлмайди. §3.1да А.Т.Дашнинг бир теоремаси чизиқли оператор-функцияларнинг нокоммутатив йиғмаси учун умумлаштирилган. Регуляр тўплам нуқталарининг муҳим сифати аниқланган.

Йиғманинг умумий спектри (дискрет спектри) шу йиғмага кирувчи операторларнинг спектрлари (дискрет спектрлари)нинг декарт кўпайтмасига тенг бўлиши кўрсатилган. Умумий нол фазоостиси йиғмага кирувчи операторлар нол фазоостиларининг тензор кўпайтмасига тенг эканлиги аниқланган. Умумий лимит спектрга таъриф берилиб, умумий спектр билан умумий лимит спектр ўртасидаги муносабат ўрнатилган. Умумий сонли тўплам тушунчаси киритилиб, умумий сонли тўпламнинг йиғмага кирувчилар сонли тўпламлари орқали ифодаланиши исботланган.

§3.2да Аткинсон талқинидаги кўп параметрли хос сонлар масаласи кўрилган. Асосий таърифлар берилиб, Ф.Реллихнинг бир натижаси кўп параметрли оператор-функциялар оиласи учун умумлаштирилган. Симметрик оператор-функциялар учун Г.А.Исаевнинг теоремаси исбот

қилинган. Аткинсон томонидан чекли фазолар учун олинган бир нечта теоремалар банах фазолари учун исбот қилинган. Бу натижалар кўп параметрли хос сонлар масаласида спектрнинг бўлинишида асосий омил бўлди. Ф.Аткинсонга тақлид қилиб, тензор кўпайтмалар назарияси асосида кўп параметрли хос сонлар масаласининг спектрини бўлувчи Δ операторлар оиласини ташкил этувчи махсус $\Delta_r - \lambda_r \Delta_0$ операторлар қурилган. Операторлар Δ оиласининг резольвент тўплами кўп параметрли хос сонлар масаласининг резольвент тўпламига тегишлилиги исботланган. Ф.Аткинсоннинг кўп параметрли хос сонлар масаласининг дискрет спектри нуқталарини Δ операторлар оиласининг умумий дискрет спектрига тегишли бўлиши ҳақидаги натижаси умумлаштирилган. Уларнинг устма-уст тушиш шarti аниқланган. Умумий сонлар соҳаси тушунчаси киритилиб, умумий ҳолда кўп параметрли спектрал масалаларнинг умумий сонли соҳаси бўлувчи операторлар оиласининг умумий сонли соҳасига тегишли бўлиши исботланган. Агар кўп параметрли хос сонлар масаласи w - эркин бўлса, бу икки тўплам устма-уст тушиши исботланган. Кўп параметрли хос сонлар масаласи лимит спектрининг бўлиниш шартлари аниқланган.

Кўп параметрли хос сонлар масаласида қўзғатилиш муаммоларига §3.3 бағишланган. Оддий хос сонлар қаторида каррали хос сонлар ҳолати ҳам ўрганилган.

Фараз қилайлик, E_j, F_j , $j = \overline{1, n}$ - банах фазолари, ва $T_j(t) \in L(E_j, F_j)$, $j = \overline{1, n}$ - қандайдир $G \subset C^n$ соҳада аналитик оператор-функциялар бўлсин. $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ - $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, кўп параметрли хос сонлар масаласи $\sigma_p(T)$ дискрет спектрининг шундай ажралган фредгольм нуқтасики, унинг учун $Ker(T_j(\lambda^0)) = \{\varphi_{j10}, \dots, \varphi_{jn0}\}$, $Ker(T_j^*(\lambda^0)) = \{\psi_{j10}, \dots, \psi_{jn0}\}$, $\{\gamma_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ ва $\{z_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ лар - $\{\varphi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ ва $\{\psi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ ларга биортогонал системалар бўлсин.

Қуйидаги қўзғатилган хос сонлар масаласини кўрайлик

$$T_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

бу ерда $T_j(t; 0) = T_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, ва $T_j(t; \varepsilon)$ - комплекс ε параметрга нисбатан аналитик.

Ҳар бир $j = \overline{1, n}$ учуни $\tilde{T}_{ji}(t; \varepsilon) = T_j(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{ji0} \rangle z_{ji0}$ операторларни курамиз.

Лемма 3.3.1. Етарлича кичик ε ва ҳар бир $i = 1, 2, \dots, n$ лар учун шундай c_{jis} , d_{jis} $j, s = 1, 2, \dots, n$, ўзгармаслар топиладики, қидирилаётган $\lambda_i(\varepsilon)$ хос сон қуйидаги кўп параметрли спектрал масала учун оддий фредгольм типидagi хос сон бўлади

$$\tilde{T}_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

(15) га Ляпунов-Шмидт усулини қўлласак, хос соннинг тармоқланиш тенгламаси қурилади

$$L_j^{(i)}(\mu_i; \varepsilon) \equiv \sum_{s+|\alpha| \geq 1} L_{jas}^{(i)} \mu_i^\alpha \varepsilon^s = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

$$\text{Бу ерда } L_{jas}^{(i)} = \sum_{(\alpha, s) = (\alpha^{(0)}, s_0) + k_1(\alpha^{(1)}, s_1) + \dots + k_m(\alpha^{(m)}, s_m) + \dots} \left\langle T_{j\alpha^{(0)}s_0} \left(\Gamma_j T_{j\alpha^{(1)}s_1} \right)^{k_1} \dots \left(\Gamma_j T_{j\alpha^{(m)}s_m} \right)^{k_m} \dots \varphi_{ji0}, \psi_{ji0} \right\rangle = 0.$$

(16) тенгламага Кронекернинг ййқотиш усулини қўллаб, уни бир ўлчамли тенгламага олиб келамиз. Сўнгра бу тармоқланиш тенгламасига Ньютоннинг диаграммалар усулини қўлласак, барча хос сонлар ва уларнинг қўзғатувчи параметрга боғлиқлик даражаси аниқланади.

Боб охирида нетер хос сонларининг тармоқланиш масаласи қўрилган. Биринчи бобнинг § 1.3 натижалари Аткинсон талқинидаги кўп параметрли спектрал масалага умумлаштирилган. Бунда 1-тур ҳамда 2-тур нетер нуқталари тадқиқ қилинган.

Тўртинчи бобда дастлабки боблар натижалари кўп параметрли спектрал масалаларга ўтказилган. Жордан занжирлари мавжуд бўлмаган оддий ва каррали хос сонлар ўрганилган. § 4.1 да дискрет спектрнинг фредгольм нуқталари ҳоли қўрилган.

Фараз қилайлик, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, кўп параметрли хос сонлар масаласи $\sigma_p(T)$ дискрет спектрининг шундай ажралган фредгольм нуқтасики, унинг учун $\text{Ker}(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jn}\}$ бўлсин. $\varphi_{ji}, \psi_{ji}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$ ва λ ларга етарлича яхши $\varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$, ва Λ яқинлашишлар мавжуд бўлсин: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

Бошланғич $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ яқинлашиш сифатида қуйидаги системанинг ечимини оламиз

$$F_j(t - \Lambda) \equiv \det \left\| \left\langle T_j(t) \varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{js}^{(0)} \right\rangle \right\| = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

$\{\varphi_{ji}^{(0)}\}, \{\psi_{ji}^{(0)}\}$ ларга биортогонал бўлган $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}, \{z_{ji}^{(0)}\}$ системаларни

$$\gamma_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jsi}^0 \frac{\partial T_j^*(\lambda^0)}{\partial t_j} \psi_{js}^{(0)}, \quad z_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jis}^0 \frac{\partial T_j(\lambda^0)}{\partial t_j} \varphi_{js}^{(0)}$$

қўринишда курамиз.

Қуйидаги регуляризацияни бажарамиз:

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i \neq s_0} \left\langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \right\rangle z_{ji}^{(0)}.$$

Теорема 4.1. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ қуйидаги масаланинг

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

шундай оддий хос соники, унга мос келувчи хос элемент $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\varphi}_n$ ва дефект функционал $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\psi}_n$ учун, $\tilde{\varphi}_j = \varphi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} c_{ji} \varphi_{ji}$, $\tilde{\psi}_j = \psi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} d_{ji} \psi_{ji}$.

(17) масаланинг тармоқланиш тенгламаси қуйидаги қўринишга эга:

$$f_j(t) \equiv \left\langle (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0)) [I + \Gamma_{j0} (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{js_0}^{(0)}, \psi_{js_0}^{(0)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (18)$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ни топиш учун (18) системага Ньютон усулини қўллаймиз:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [\mathfrak{Z}(\lambda^{(m)})]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

бу ерда $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $\mathfrak{Z}(\lambda^{(m)}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right) (\lambda^{(m)})$.

Хос сон $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ топилгач, унга мос келувчи хос элементлар куйидаги чизикли тенгламалардан топилади:

$$\left[T_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)} \right] x_j = z_{jk}^{(0)}, \left[T_j^*(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle z_{ji}^{(0)}, \cdot \rangle \gamma_{ji}^{(0)} \right] y_j = \gamma_{jk}^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Дискрет спектрни нг нетер нукталарини регуляризациялашга § 4.2 бағишланган.

Фараз қилайлик, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, масала $\sigma_p(T)$ дискрет спектрининг ажралган шундай нетер нуктаси бўлсинки, унинг учун $\text{Ker}(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn_j}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jm_j}\}$ бўлсин. Умумийликни бузмаган ҳолда барча j лар учун $n_j > m_j$ деб, яъни λ 1-тур нетер нуктаси деб фараз қиламиз.

φ_{ji}, ψ_{ji} , $j = \overline{1, n}$ ва λ ларга етарлича яхши $\varphi_{ji}^{(0)}$, $i = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, n}$, $\psi_{ji}^{(0)}$, $i = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, n}$, ва Λ яқинлашишлар мавжуд бўлсин: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

F_i^* фазоларни $\psi_{i, m_i+1}^{(0)}, \psi_{i, m_i+2}^{(0)}, \dots, \psi_{i, n_i}^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, идеал элементлар ҳисобига кенгайтирамиз, ва $k_{ij} = \det \left\| \frac{\partial T_i(\lambda)}{\partial t_j} \varphi_{ij}^{(0)}, \psi_{ij}^{(0)} \right\| \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$ деб фараз қиламиз.

Биортогонал $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}$, $\{z_{ji}^{(0)}\}$ системларни куриб, куйидаги регуляризацияни бажарамиз

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i=m_j+1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Теорема 4.2. Аниқлаштирилаётган $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ хос сон

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

масаланинг ажралган фредгольм типдаги хос сонидир.

Яна бир марта регуляризацияласак: $\bar{\bar{T}}_j(t) = \bar{T}_j(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}$ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ куйидаги

$$\bar{\bar{T}}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

хос сонлар масаласининг оддий хос сонига айланади.

(19) масалага Ляпунов-Шмидт усулини қўллаб, тармоқланиш тенгламасини курамиз. Сўнгра, унга Ньютон усулини қўллаб, қидирилаётган $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ хос сонни топамиз.

Эслатма. Агар $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - 2-тур нетер нуктаси, яъни $j = \overline{1, k}$ лар учун $n_j > m_j$ ва $j = \overline{k+1, n}$ лар учун $n_j < m_j$ бўлса, у ҳолда $j = \overline{1, k}$ лар учун $\tilde{T}_j(t) = T_j(t)$ ва $j = \overline{k+1, n}$ лар учун $\tilde{T}_j(t) = T_j^*(t)$ деб $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ни $\tilde{T}_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$ масаланинг 1-тур нетер нуктасига айлантириб олиш мумкин.

Боб сўнгида олинган натижаларни қўлланишини намоёниш этиш мақсадида қуйидаги масалалар кўрилган

$$\text{А. } \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(x_0) = u_1(1),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(x_0) = u_2(1),$$

$$\text{В. } \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, \quad u_1(0) = u_1(1), \quad u_1'(0) = u_1'(1),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, \quad u_2(0) = u_2(1), \quad u_2'(0) = u_2'(1).$$

Барча ҳисоблашлар Maple 11 дастури доирасида бажарилган.

Х У Л О С А

Диссертацияда аналитик оператор-функцияларнинг бир параметрли ҳамда кўп параметрли спектрал масалаларида каррали фредгольм ва нетер хос сонлари ва уларга мос келувчи хос элементларини топиш учун регуляризациялаш усули кўрилган. Бу усуллар ёлғон кўзғатилиш усули билан биргаликда хос сонлар ва уларга мос келувчи умумлашган жордан тўплам элементларини тақрибий ҳисоблашга ҳам татбиқ этилган.

Диссертациянинг ҳамма асосий натижалари янги. Олинган натижалар қуйидаги хулосаларни чиқаришга имкон беради:

1) фредгольм операторларининг чекли УЖЗ лардан тузилган УЖТ тўла бўлмаганда регуляризация усули ёрдамида кўзғатилган чизиқли тенгламаларнинг қуйидаги

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \left[\xi \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_j \right]$$

кўринишдаги ягона ечими мавжудлиги исбот қилиниб, унинг кўзғатилиш параметрига боғлиқлик даражаси аниқланган;

2) УЖТ тўла бўлмаганда Ньютоннинг диаграммалар усулини хос соннинг тармоқланиш тенгламасига қўллаш қўшимча мураккаб ҳисоблашларни талаб қилгани учун бу ҳолларда регуляризациялаш усули ёрдамида каррали сони N бўлган каррали хос сонларни оддий хос сонларга айлантириш, кўзғатилган чизиқли оператор-функцияларнинг хос сонларини топиш, уларнинг сони N та бўлишини исботлаш ва уларнинг кўзғатилиш параметрига боғлиқлик даражасини аниқлаш имконини беради;

3) кўзғатилган чизиқли оператор-функцияларнинг хос сонларини кўзғатилмаган операторнинг нетер хос сони атрофидаги тармоқланиш тенгламасини амалда бажариб бўлмаслиги туфайли, $\hat{A}_2$ ва $\hat{A}_2^*$ фазоларни идеал элементларга тортилган фазоостиларига кенгайтириш ва бу янги фазоларда ишлайдиган регуляризацияланган оператор-функцияни куриш ҳисобига нетер нукта регуляризацияланган операторнинг фредгольм нуктасига айлантирилди. Сўнгра, Ляпунов-Шмидт усули ва Ньютоннинг диаграммалар усулини қўллаб, берилган кўзғатилган чизиқли оператор-

функция роппа-роса N та хос сонга эга эканлиги ва улар қўзғатилиш параметрининг бутун ёки каср даражалари бўйича яқинлашувчи қатор кўринишида бўлиши исботланган;

4) Э.Шмидт талқинидаги қўзғатилган хос сон масаласи кўрилган. Регуляризациялаш усули ёрдамида бу масала роппа-роса N та ε га нисбатан узлуксиз бўлган хос сонларга эга бўлиши исботланган;

5) регуляризациялаш усули ёлғон қўзғатилиш усули билан биргаликда бир параметрли ва кўп параметрли спектрал масалаларнинг n - каррали хос сонларини тақрибий ҳисоблашга татбиқ этилган. УЖТ тўла бўлмаган ҳолда бу усуллар хос сонларни аниқламаганлиги, УЖТга тўла бўлган n каррали хос сонларини тақрибий ҳисоблашда эса жуда кўп ҳисоблашларни талаб қилгани учун диссертант томонидан киритилган регуляризация усули барча ҳисоблашларни 2^n маротаба камайтириш имконини берди;

6) аналитик оператор-функцияларнинг каррали хос сонларини ҳисоблаш учун линеаризация усули ёрдамида алгоритм қурилди;

7) биринчи маротаба регуляризациялаш усули билан ёлғон қўзғатилиш усули комбинацияси ёрдамида нетер хос сонларини тақрибий ҳисоблаш учун итерацион жараён қурилди;

8) регуляризациялаш усули ёрдамида Лаплас операторининг қўзғатилган квадрат ва эллиптик соҳа учун хос сонлари аниқланди.

Диссертант илмий маслаҳатчиси академик Шавкат Арифджанович Алимовга қимматли маслаҳатлари, Юрий Борисович Русакга айрим муаммоларни ойдинлаштиришга ёрдам берган қимматли мунозаралари ва, айниқса, айрим масалаларни қўйгани, доимий қўллаб-қувватлаб тургани ва қимматли маслаҳатлари учун физика-математика фанлари доктори, профессор Борис Владимирович Логиновга чуқур миннатдорчилик билдиради.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
ДОКТОРА НАУК 16.07.2013.FM.01.01 ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

РАХИМОВ ДАВРАН ГАНИЕВИЧ

**РЕШЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ
ЗНАЧЕНИЯ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)**

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2014

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.5.FM130.

Докторская диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Полный текст докторской диссертации размещен на веб-странице научного совета 16.07.2013.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана по адресу nauka@nu.uz

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице по адресу nauka@nu.uz и информационно-образовательном портале «ZIYONET» по адресу www.ziyonet.uz

**Научный
консультант:**

Алимов Шавкат Арифджанович
доктор физико-математических наук, академик

**Официальные
оппоненты:**

Ганиходжаев Расул Набиевич
доктор физико-математических наук, профессор

Холмухамедов Олим Рахимович
доктор физико-математических наук, профессор

Карачик Валерий Валентинович
доктор физико-математических наук, профессор

**Ведущая
организация:**

Ургенчский государственный университет

Защита состоится «__» _____ 2014 г. в «__» часов на заседании научного совета 16.07.2013.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана по адресу: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (998-71-227-12-24, факс: 998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz

Докторская диссертация зарегистрирована в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана за № ____, с которой можно ознакомиться в ИРЦ (100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871) 246-02-24.

Автореферат диссертации разослан «__» _____ 2014 года.
(протокол рассылки № _____ от _____ 2014 года).

Б.А.Шоимкулов

Председатель научного совета по присуждению
учёной степени доктора наук д.ф.-м.н.,
профессор

М.Тухтасинов

Ученый секретарь научного совета по
присуждению учёной степени доктора наук
д.ф.-м.н., доцент

М.С.Салахитдинов

Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению учёной степени доктора
наук д.ф.-м.н., академик

АННОТАЦИЯ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Одним из актуальных направлений в современной математике являются исследования, связанные с теорией нелинейных задач. Источником постановок таких задач служат математические модели, используемые в прикладной математике, биологии, экономике, гидродинамике, теории упругости и пластичности, теоретической и математической физике. При решении нелинейных задач важным фактором является феномен бифуркации и ветвления в таких задачах, что влечет появление новых решений в случаях перехода управляющих параметров уравнений через критические значения. Среди этих новых решений имеются устойчивые решения, а также решения, которые либо сразу гаснут, либо вообще не реализуется в практической ситуации. Изучение новых появляющихся в точках ветвления решений нелинейных задач и есть направление, называемое «теорией устойчивости и бифуркаций». Наиболее ярким примером бифуркационных (критических) явлений служат дивергенция (статическая бифуркация) и флаттер (динамическая осцилляционная потеря устойчивости пластин и оболочек, в частности, крыльев самолетов) в потоке газа или жидкости (гидроупругость). Особенно важной указанная проблема флаттера стала в сверхзвуковой аэродинамике. В середине прошлого столетия для исследования задач аэродинамики применялись только вариационные и сеточные методы. И только в XXI веке в этой области стали использоваться методы теории бифуркаций.

Устойчивость рождающихся как статических, так и динамических решений исследуется методами теории возмущений. Более точно, изучается спектр производной Фреше нелинейного уравнения (системы уравнений) на ответвившемся решении. Предполагая, что известны собственные значения линеаризации, т.е. производной Фреше на тривиальном решении, ищут спектр Фреше на ответвившемся решении, что позволяет использовать методы теории возмущений из спектральной теории линейных операторов.

Именно поэтому поток исследований, связанных с решением нелинейных задач методами теории возмущений, нарастает (с середины прошлого столетия) с экспоненциальной быстротой, и всякий новый глубокий результат в теории возмущений является актуальным как для самой теории возмущений, так и для ее приложений к решениям нелинейных задач.

Основной причиной для востребованности исследований, связанных с тематикой настоящей диссертации, является тесная связь бифуркационных процессов с задачами описания возмущений дискретного спектра линейных операторов. Исследования ситуаций, относящихся к возмущению кратных собственных значений, связаны с определенными сложностями, которые, к сожалению, не всегда удается преодолеть. Так, например, в задаче возмущения фредгольмовых собственных значений установлено, что количество ответвляющихся от этих точек собственных значений возмущенного оператора будет столько, каково корневое число этого

оператора, но при этом необходимо требовать полноту обобщенного жорданового набора (ОЖН). В случае же неполноты ОЖН возникает вырождение уравнения разветвления. В этой ситуации необходимы дополнительные вычисления по специально построенному алгоритму пополнения ОЖН. При этом, коэффициентами уравнения разветвления являются определители n -го порядка, в связи с чем процесс их нахождения требует выполнения огромного количества вычислений.

В задаче возмущения нетеровых точек дискретного спектра подобные исследования проводить не удавалось по той причине, что уравнение разветвления собственного значения для таких операторов построить невозможно из-за неравенства размерностей нулевого и дефектного подпространств.

Такая ситуация приводит к необходимости построения специальных операторов, для которых рассматриваемые кратные собственные значения уже оказались бы простыми или кратными, но с полным ОЖН. Процесс построения таких операторов называется регуляризацией линейных операторов.

Процедура регуляризации линейных операторов позволяет нетеровы точки операторов превращать в фредгольмовы, что дает возможность построения уравнения разветвления, позволяющего определить все собственные значения и им соответствующие собственные элементы возмущенного оператора, при этом кратные собственные значения сводятся к простым, что снимает условия вырождения уравнений разветвления.

Указанные методы сокращения огромного объема вычислений объясняют необходимость и востребованность привлечения исследований, относящихся к тематике настоящей диссертации.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Обзор международный научных исследований по теме диссертации.

Среди различных подходов, связанных с возможностью решения нелинейных задач, в первую очередь следует выделить вариационные методы, использование теорем о неподвижной точке, методы теории катастроф и теорий бифуркаций, а также методы, использующие топологические конструкции и теоремы о неявных функциях.

В научных центрах, высших образовательных учреждениях США (Колифорнийский университет), Великобритании (Эдинбургский университет), Японии (Токийский университет), Канады (университет Калгари), России (МГУ, МФТУ имени Баумана), Словении (Люблянский университет) и Германии (Берлинский университет) ведутся научно-исследовательские работы по решению нелинейных уравнений, изучаются случаи бифуркации решений и возмущения как дискретного, так и непрерывного спектра линейных операторов.

Возмущение непрерывного спектра, которая чрезвычайно важна в исследованиях теории рассеяния и квантовой теории поля, исследуются в Токийском (Япония) и Калифорнийском (США) университетах.

В МФТУ имени Баумана (Россия) изучаются устойчивости разветвляющихся решений абстрактных параболических уравнений методами Ляпунова с приложениями к нелинейным явлениям. В каждой из исследованных задач численным моделированием редуцированных методов возмущений приведено построение областей управляющих (физических) параметров, для которых построенные семейства решений устойчивы. Также исследованы условия потенциальности и псевдопотенциальности уравнений разветвления и уравнений разветвления в корневых подпространствах для стационарных и динамических задач на спектре Шмидта.

В Иркутском государственном университете совместно с МФТУ имени Баумана изучаются регуляризации в задачах теории ветвления, которые широко используются в приближенных решениях операторных уравнений с необратимым оператором.

В научных центрах Германии решаются проблемы возмущения в нелинейных задачах на собственные значения. Используя нелинейные возмущения, топологическим и конструктивным методами, устанавливаются условия полноты и базисности собственных элементов. Там же активно развиваются исследования, связанные с многопараметрическими задачами на собственные значения.

В Калифорнийском университете (США), Эдинбургский университет (Великобритания), Калгарском университете (Канада), Люблянском университете (Словения), Берлинском университете (Германия) и Московском государственном университете и МФТУ имени Баумана (Россия) ведутся широкомасштабные исследования по изучению присоединенных элементов и жордановых структур спектра многопараметрических задач на собственные значения. В Эдинбургском университете (Великобритания) совместно с Люблянским университетом (Словения) и университетом Калгари (Канада) начали изучать корневую структуру многопараметрических спектральных задач. Определены понятия присоединенных элементов к собственным векторам. Так как эти исследования находятся в стадии разработки, то они требуют новых специальных подходов.

Интерес к этим задачам появился благодаря исследованиям в теории диагностики технических систем по частотам собственных колебаний, а также в прикладных задачах управления частотными характеристиками различных технических устройств. Как показали исследования, проведенные в Казанском университете (Россия) вопросы, обсуждаемые в этих задачах, напрямую связаны с возмущениями в многопараметрических задачах на собственные значения по Аткинсону.

Степень изученности проблемы. Несмотря на большое количество проведенных исследований в теории линейных операторов и в задачах возмущения спектра линейных операторов, случаи вырождения связанные с

кратными собственными значениями, особенно вопросы вычисления возмущенных собственных значений операторов с не полными ОЖН остаются не решенными. Хотя разработаны способы пополнения ОЖН и указаны методы их применения к нахождению возмущенных собственных значений, они не дают возможность определить точное количество собственных значений возмущенного оператора в окрестности фредгольмовых точек спектра не возмущенного оператора. Невозможно даже указать степень зависимости их от возмущающего параметра. Не исследована задача возмущения нетеровых точек спектра линейных операторов, т.к. невозможно построить уравнение разветвления собственного значения в силу неравенства размерностей собственного и дефектного подпространств. Поэтому эти ситуации в задачах возмущения спектра линейных операторов до сих пор остаются проблемными.

Исходя из анализа существующих работ, необходимо отметить, что исследования задач возмущения кратных собственных значений далеки от завершения. Решения этих вопросов требуют совершенно новых подходов.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ отражена в следующих фундаментальных научных проектах:

Ф-1.1.12 «Регуляризация задач на собственные значения с применением метода ложных возмущений» (2003-2007гг.); Ф – 4 – 02 «Разработка новых решений задач математической физики и оптимального управления на основе спектральной теории дифференциальных операторов» (2012-2016 гг.).

Целью исследования является методом регуляризации определить кратные фредгольмовы и нетеровы собственные значения с соответствующим неполным обобщенным жордановым набором в однопараметрических и многопараметрических спектральных задачах.

Для достижения цели ставились следующие **задачи исследования**:

методом регуляризации определить для неполного жорданова набора, точное количество собственных значений и соответствующих им собственных векторов, представление этих собственных значений как сходящихся рядов по целым или дробным степеням параметра ε в окрестности кратного фредгольмового собственного значения;

нахождение всех собственных значений, разветвляющихся в окрестности нетеровой точки дискретного спектра невозмущенного оператора, установление порядка их зависимости от возмущающего параметра ε ;

построение итерационного процесса (с помощью регуляризации заданного оператора и метода ложных возмущений), позволяющего определить кратные фредгольмовы и нетеровы собственные значения оператора и соответствующие им корневые элементы;

в многопараметрической задаче на собственные значения по Аткинсону-нахождение условий, обеспечивающих расщепление этого спектра на спектры однопараметрических оператор-функций;

применение метода регуляризации к многопараметрическим задачам на собственные значения. Построение алгоритма нахождения собственных

значений и соответствующих им собственных элементов возмущенной задачи. Построение итерационных процессов для определения собственных значений в многопараметрических спектральных задачах.

Объектом исследования являются случаи возмущений, происходящих в задачах на собственные значения трех разновидностей: классической однопараметрической задачи, задачи на собственные значения по Э.Шмидту и в многопараметрической задаче на собственные значения.

Предмет исследования – решение задач, связанных с возмущением дискретного спектра линейных операторов, как в случае кратных фредгольмовых, так и нетеровых собственных значений.

Методы исследования. Использовались методы нелинейного анализа и нелинейных уравнений, теория линейных операторов, метод диаграмм Ньютона для решения алгебраических уравнений. Для приближенного вычисления собственных значений применялись методы Ньютона и Стеффенсена.

Научная новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

в случае неполного обобщенного жорданового набора доказаны теоремы о наличии собственных значений возмущенного оператора и их степени зависимости от возмущающего параметра. Доказательств этих теорем стало возможным благодаря использованию регуляризатора, разработанного диссертантом;

задача о возмущении нетеровых собственных значений решена с помощью построения регуляризатора, позволившего свести нетеровы точки дискретного спектра к фредгольмовым;

определено количество собственных значений возмущенного оператора в окрестности нетеровой точки спектра и установлены степени их зависимости от возмущающего параметра;

разработаны приближенные методы вычисления собственных значений с использованием метода ложных возмущений. Построен регуляризатор, позволяющий свести n -кратный случай к простому, что позволило уменьшить число вычислительных операций в 2^n раз;

впервые построен итерационный процесс для нахождения нетеровых точек и собственных значений Э.Шмидта;

доказана теорема Реллиха-Треногина для задачи о возмущении дискретного спектра многопараметрической задачи на собственные значения по Аткинсону;

построены приближенные алгоритмы нахождения фредгольмовых и нетеровых собственных значений многопараметрической спектральной задачи по Аткинсону.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построено уравнение разветвления для задачи на собственные значения Штурма-Лиувилля при возмущении на одной границе отрезка; благодаря применению к нему метода регуляризации и диаграммы Ньютона, определены все его собственные значения;

определены все собственные значения оператора Лапласа для возмущенного квадрата. Установлены условия, при которых поставленная задача имеет собственные значения и найдены порядки их зависимости от возмущающего параметра;

так как метод ложных возмущений не дает возможность вычислить все собственные значения возмущенного оператора, то применяя метод регуляризации в комбинации с методом ложных возмущений, удалось построить итерационные процессы для вычисления всех собственных значений как фредгольмовых, так и нетеровых типов.

Достоверность полученных результатов обосновывается применением известных теорем из теории линейных операторов и теории возмущений, строгостью математических рассуждений и применением известных методов Ньютона и Стеффенсена. Доказательства сходимости степенных рядов следуют из известной теоремы Пюизе. Для установления достоверности результатов исследования построены итерационные процессы для приближенного вычисления этих собственных значений.

Теоретическая и практическая значимость результатов исследования. Теоретическая значимость полученных результатов состоит в использовании их как при исследованиях нелинейного анализа и нелинейных уравнений, так и в конкретных задачах определения собственных значений и соответствующих им собственных функций дифференциальных или интегральных уравнений математической физики.

Практическая ценность работы заключается в сведении кратного случая к простому, что позволило значительно уменьшить количество вычислительных операций, производимых в процессе определения собственных значений.

Внедрение результатов исследования. Результаты применены к задачам математической физики и к вычислительной математике при построении итерационных алгоритмов нахождения кратных собственных значений, а также в зарубежных проектах: Российского фонда фундаментальных исследований - Академия наук Румынии 07-01-91680 (2007-2009гг.) «Исследование устойчивости разветвляющихся решений абстрактных параболических уравнений методами А.М.Ляпунова с приложениями к нелинейным явлениям» для доказательства устойчивости решений был применен редукционный метод возмущений, предложенный в диссертации; Российского научного фонда 14-11-00640 «Неклассические эволюционные уравнения, существование и устойчивость решений на основе топологического индекса Морса-Конли и теории возмущений полугрупп операторов» с помощью редукционного метода возмущений, исследования кратного собственного значения сведены к исследованию простого собственного значения. Метод регуляризации, примененный к вычислительным процессам нахождения n -кратных собственных значений, дал возможность уменьшить число операций в 2^n раз, что активно используется в вычислительных процедурах, при решении задач описания уровней энергии физических систем с конечным числом частиц.

Апробация работы. Основные положения, изложенные в диссертации, представлены и доложены на семинарах и 8 научных конференциях, в частности, на городском семинаре кафедры «Функциональный анализ» Национального университета Узбекистана (бывший ТашГУ, 1985-2000 гг.), на семинаре при кафедре «Высшая математика» Московского Института Стали и Сплавов (1985-1991 гг.), на семинаре при кафедре «Математическая физика» Национального университета Узбекистана (2000-2013 гг.), на семинаре «Неклассические задачи дифференциальных уравнений» института математики при Национальном университете Узбекистана (2013 г.), на международной конференции «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа» (Ташкент, 1993 г.), на 16-ой международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (С.-Петербург, 2003г.), на 17-ой международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях» (Кострома, 2004г.), на международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологий» (Ташкент, 2005 г.), на международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических исследований» (Алматы, 2006г), на международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения» (Новосибирск, 2007г.), на международной конференции «Проблемы современной топологии и ее приложения» (Ташкент, 2013 г.), на республиканской конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений» (Ташкент, 2013 г.), на международной научной конференции «СИАМ-2013» (Бухарест, 2013г.).

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 30 работ, из них 22 статьи (11 из которых в зарубежных журналах) и 8 тезисов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, заключения и списка использованной литературы, общий ее объем 144 страницы, в списке цитированной литературы 149 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии исследованиям приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, формулируются цель и задачи, а также объект и предмет исследования, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, обосновывается достоверность полученных результатов, раскрывается их теоретическая и практическая значимость, приведен список внедрений в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации. Затем излагается международный обзор научных исследований

по теме диссертации, степень изученности проблемы и краткий обзор полученных результатов.

Спектральная теория своим возникновением обязана исследованиям колеблющейся струны, предпринятым Б.Тейлором в 1713 г. В последующем эта теория развивалась в работах Штурма и Лиувилля в девятнадцатом веке, Г.Вейля, В.Вольтерра, М.Рисса, Д.Гильберта, С.Банаха, С.Мазура, Дж.Шаудера и многих других математиков двадцатого века. За последние шестьдесят лет она была продолжена в трудах И.М.Гельфанда, М.Г.Крейна и М.А.Наймарка в СССР, С.Какутани, Т.Като, С.Куроуды и К.Иосиды в Японии и в США, И.Коложоары и С.Фойаша в Румынии, Э.Хилле и Р.С.Филлипса, К.О.Фридрихса, фон Неймана, Э.Пэли и Н.Винера в США. В этот период были заложены основы теории самосопряженных операторов и в удовлетворительной форме решены многие основные проблемы этой теории. С развитием современной физики теория нашла свое приложение в проблемах атомной физики, теории рассеяния, квантово механической задаче трех тел, квантовой теории поля и в задачах математической физики.

Проблема обращения дифференциальных операторов и разрешимости краевых задач с необходимостью приводит к исследованию псевдодифференциальных операторов, а вопросы качественного поведения решения – к изучению спектральных свойств этих операторов.

Точные условия равномерной сходимости спектрального разложения и кратных тригонометрических рядов были установлены В.А.Ильиным. Эти исследования в дальнейшем были продолжены его учениками Ш.А.Алимовым и Е.И.Моисеевым для более общих операторов. Ими установлены условия равномерной сходимости как самых спектральных разложений, так и их средних Рисса. Под руководством Ш.А.Алимова его ученики Р.Р.Ашуров, О.Р.Халмухамедов, Б.Турметов, А.А.Рахимов и Ш.Г.Касымов развили эти результаты для эллиптических дифференциальных операторов m порядка, для операторов дробного дифференцирования из класса функций Соболева $W_p^\alpha(\Omega)$, Никольского $H_p^\alpha(\Omega)$, Лиувилля $L_p^\alpha(\Omega)$, Бесова $B_p^\alpha(\Omega)$ и Зигмунда-Гёлдера $S^\alpha(\Omega)$.

Теория возмущений была создана Рэлеем и Шредингером. Рэлей дал формулу для вычисления собственных частот и мод колебаний системы, мало отличающейся от более простой системы, которая допускает полное описание частот и мод колебаний. С математической точки зрения этот метод эквивалентен приближенному решению задачи на собственные значения для линейного оператора, мало отличающегося от более простого оператора, для которого эта задача полностью решена. Шредингер разработал аналогичный метод для задач на собственные значения, возникающих в квантовой механике.

Эти первоначальные работы были, однако, с точки зрения математики весьма формальными и неполными. Неявно предполагалось, что собственные значения и собственные элементы могут быть разложены в степенные ряды по малому параметру, характеризующему отклонение возмущенного

оператора от невозмущенного. Не было сделано никаких попыток доказать сходимость этих рядов.

Окончательный вопрос о сходимости рядов был разрешен только в серии работ Реллиха. Для доказательства сходимости соответствующих степенных рядов Ф.Реллих применял метод мажорант. Им не были определены все собственные значения и им соответствующие собственные векторы возмущенного оператора.

В дальнейшем эти исследования были развиты в работах Т.Като, М.И.Вишика, Л.А.Люстерника, Н.Н.Назарова, К.Т.Ахмедова, П.Г.Айзенгендлера, М.М.Вайнберга, В.А.Треногина, Б.В.Логинова и Н.А.Сидорова для несамосопряженных операторов. В.А.Треногин исследовал эту задачу методами теории ветвления. Благодаря применению методов Ляпунова и Шмидта и диаграммы Ньютона ему удалось определить все собственные значения и им соответствующие собственные векторы возмущенного оператора, т.е. определить точное количество собственных значений и им соответствующих собственных векторов, вид их представления как сходящиеся ряды по целым или дробным степеням параметра ε . При этом устанавливается связь между количеством собственных значений и длиной жордановых цепочек или корневого числа невозмущенного фредгольмовского оператора. Все утверждения доказаны при предположении полноты жорданового набора. В частности, для случая не полного жорданового набора предлагается метод продолжения его до полного набора. В дальнейшем эта идея была развита в работе Б.В.Логинова и Ю.Б.Русака, с тщательным анализом и для общих случаев. Хотя пополнение жорданового набора дает возможность применить теорему Реллиха-Треногина, но при таком пополнении кроится неопределенность: объем жорданового набора может возрасти, т.е. появятся лишние собственные значения. К тому же для пополнения требуется выполнить много операций.

В случае полного жорданова набора в задачах возмущения линейных уравнений малыми линейными слагаемыми и в задачах на собственные значения возмущенного фредгольмовского оператора получены исчерпывающие результаты. Для неполного же жорданова набора подобные результаты можно было получить только после дополнительных построений. Поэтому, возникают вопросы: 1) Можно ли получить подобные результаты для заданного набора без его пополнения? 2) Можно ли получить аналогичные результаты для нетеровских операторов? Этим вопросам посвящена **первая глава**, которая состоит из пяти параграфов.

В первом параграфе этой главы приводятся основные определения из спектральной теории линейных операторов, утверждения, часто используемые в теории ветвления решений нелинейных уравнений и доказана теорема о решении возмущенного линейного уравнения малыми линейными слагаемыми и установлена степень его зависимости от возмущающего параметра, в случае неполного ОЖН.

Во втором параграфе этой главы рассмотрена задача возмущения фредгольмовых собственных значений аналитической относительно спектрального параметра оператор-функции.

Пусть E_1, E_2 - некоторые банаховы пространства, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ оператор-функция, аналитически зависящая от спектрального параметра $t \in G \subset C$.

Пусть λ фредгольмова точка такая, что $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха существуют системы элементов $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, биортогональные соответственно к $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$. Тогда проекторы $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ порождают следующие разложения в прямые суммы: $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \oplus E_{2,\infty-n}$.

Определение 1.1.7. Условие отсутствия общих нулей операторов $A(\lambda_0)$ и $\sum_{s=1}^{\infty} A_s(\lambda - \lambda_0)^s$ назовем «условием снятия вырождения».

Условие снятия вырождения гарантирует возможность выполнения применяемого далее во всей диссертации процесса регуляризации в задачах о возмущении.

Пусть $\varepsilon \in C$ малый параметр, $|\varepsilon| \leq \rho_0$ и $A(t; \varepsilon) = \sum_{k+l=0}^{\infty} A_{lk} \mu^l \varepsilon^k : E_1 \rightarrow E_2$, $\mu = \lambda - \lambda_0$, возмущенная оператор-функция, такая, что $A(t; 0) = A(t)$.

Для каждого $i = \overline{1, n}$ построив, операторы $\overline{A}_i(t) = A(t) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$ и заменив, оператор $A(t)$ в разложении оператор-функции $A(t; \varepsilon)$ на оператор $\overline{A}_i(t)$, получим следующую “регуляризованную оператор-функцию”:

$$\overline{A}_i(t; \varepsilon) \equiv A(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}. \quad (1)$$

Справедливы теоремы.

Теорема 1.2.1. Пусть выполнено условие снятия вырождения (см. определение 1.1.7). Если $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\varphi_i(\varepsilon)$, $\psi_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ собственные значения и им соответствующие собственные элементы и дефектные функционалы оператора $A(t; \varepsilon)$, то при каждом $i = \overline{1, n}$ и достаточно малых ε $\lambda_i(\varepsilon)$ является также собственным значением оператора (1) с соответствующим собственным элементом и дефектным функционалом

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{j \neq i} c_{is} \varphi_s, \quad \tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i + \sum_{j \neq i} d_{is} \psi_s. \quad (2)$$

Теорема 1.2.2. Если $\dim N(A(\lambda_0)) = \dim N^*(A(\lambda_0)) = n$ и $\langle A_1 \varphi_{i0}, \psi_{i0} \rangle \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, то для достаточно малых ε существуют ровно n простых

собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ ($\lambda_i(0)=\lambda_0$) и соответствующих собственным элементам $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ и дефектным функционалов $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$, аналитических по ε .

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 1.2.3. Пусть ОЖН, соответствующий фредгольмовому собственному значению λ_0 невозмущенного оператора, состоит из ОЖЦ конечной длины, причем N его корневое число. Если $L_{0j}=0, j=\overline{1,\infty}$ и $L_{11}\neq 0$, то существуют N простых собственных значений и отвечающих им собственных элементов, представимых в виде рядов по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Если же $L_{0j}=0, j=\overline{1,q_i-1}, L_{0q_i}=0$ и $L_{11}\neq 0$, то существуют ровно N собственных значений, причем n из них - с соответствующими собственными элементами, представимыми по целым степеням ε , а остальные $N-n$ с соответствующими собственными элементами, представимыми по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

§1.3 посвящен возмущению нетеровых точек дискретного спектра аналитических оператор-функций.

Пусть λ_0 - нетерова точка дискретного спектра оператор-функции $A(t)$ с $N(A(\lambda_0))=\{\varphi_{i0}\}_1^n, N^*(A(\lambda_0))=\{\psi_{i0}\}_1^m, n>m$.

Вводом идеальных элементов $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ в пространстве E_2 ($\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$ в пространстве E_2^*) регуляризуется исходная оператор-функция:

$$\overline{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{j_0} \rangle z_{j_0}. \quad (3)$$

Теорема 1.3.1. Исходное собственное значение λ_0 является фредгольмовой точкой дискретного спектра оператор-функции (2).

Если произвести вторичную регуляризацию:

$$\tilde{A}_i(t; \varepsilon) \equiv \overline{A}(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j_0} \rangle z_{j_0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

то справедлива теорема

Теорема 1.3.2. Для каждого $i = \overline{1, m}$ и достаточно малых ε $\lambda_i(\varepsilon)$ является простым собственным значением оператора (4) с соответствующими собственным элементом $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} a_{is} \varphi_s(\varepsilon)$ и дефектным функционалом $\tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} b_{is} \psi_s(\varepsilon)$.

Основной теоремой этого параграфа является следующая теорема 1.3.4.

Теорема 1.3.4. Пусть существует ОЖН, причем $\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_{i0}^{p_i+1-k}, \psi_{i0} \right\rangle \neq 0$ для всех $i = \overline{1, m}$. Если $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ и $L_{11} \neq 0$, то существуют N простых собственных значений и отвечающих им собственных элементов, представимых в виде рядов по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Если же $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}, L_{0q_i} = 0$ и $L_{11} \neq 0$, то существуют ровно N собственных значений, причем m из них с соответствующими собственными элементами, представимыми по целым степеням ε , а остальные $N-m$ с соответствующими собственными элементами, представимыми по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Замечание 2. Когда $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ и $L_{11} = 0$, метод диаграммы Ньютона определяет все собственные значения с соответствующими собственными элементами одновременно по дробным степеням ε в представимых рядах по первому отличному от нуля коэффициенту $\{L_{1j}\}$.

В качестве приложения в §4 рассматриваются три примера: возмущение собственного значения дифференциального оператора Штурма-Лиувилля, собственное значение оператора Лапласа для возмущенного квадрата и для эллиптической области. Используя результаты §2 определяются все собственные значения, отвечающие от точки λ_0 и соответствующие им собственные функции.

В начале XX века Э. Шмидт в своих работах ввел понятие s -чисел, т.е. собственных значений λ оператора $B: H \rightarrow H$ и собственных элементов φ и ψ удовлетворяющих соотношениям $B\varphi = \lambda\psi$, $B^*\psi = \lambda\varphi$ и позволяющих обобщить теорию Гильберта-Шмидта на несамосопряженные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H . В дальнейшем они в работах Б. В. Логинова и О. В. Макеевой были названы собственными значениями Э. Шмидта, в которых предложено спектральное разложение линейных операторов в гильбертовом пространстве по спектру Шмидта и отмечено, что система подобного вида встречаются в релятивистской квантовой теории Дирака и при исследовании некоторых проблем электромагнитных процессов.

В §5 на основе результатов §2 исследованы возмущения собственных значений Шмидта и соответствующих им собственных элементов в модельной задаче A . Построены уравнения разветвления собственного значения и доказаны две теоремы, устанавливающие условия существования разветвляющихся собственных значений и соответствующих им собственных элементов и их зависимость от параметра ε .

Из-за сложности поставленных задач многие задачи на собственные значения аналитически не решаются. Поэтому для их решения применялись приближенные методы вычислений. В связи с этим сильное развитие получила теория численных методов. Было разработано много различных

приближенных методов нахождения собственных чисел, начиная с простейших матриц до самосопряженных операторов.

В начале 60-х годов прошлого века М.К.Гавурин в своих работах предложил, основанный на идеях теории возмущений, метод вычисления собственных чисел и векторов линейных самосопряженных операторов действующих в гильбертовом пространстве, названный им методом ложных возмущений. Идея его метода состоит в построении оператора D_0 такого, что известные приближения к собственным числам и элементам становятся точными для возмущенного оператора. Результаты М.К.Гавурина были развиты Ф.Кунертом для простых собственных чисел несамосопряженных операторов. Дальнейшее развитие метод ложных возмущений получил в работах Б.В.Логинова, Н.А.Сидорова и Д.Г.Рахимова. Затем диссертантом эти результаты были применены к нахождению собственных значений и собственных векторов многопараметрических спектральных задач. В начале нашего столетия метод ложных возмущений получил новое развитие в работах Б.В.Логинова и О.В.Макеевой.

Вторая глава посвящена изложению результатов, которые по сути являются применениями результатов первой главы к вычислениям собственных значений и соответствующих им собственных и корневых элементов линейных аналитически зависящих от спектрального параметра оператор-функций, действующих в банаховых пространствах.

В § 2.1 рассматривается уточнение фредгольмовых точек дискретного спектра достаточно гладкой относительно спектрального параметра линейной оператор-функции, геометрическая кратность которых больше единицы.

Пусть λ - изолированная фредгольмова точка дискретного спектра достаточно гладкой по t в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$ оператор-функции $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$, E_1, E_2 - банаховы пространства; $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$, причем $k = \det \|A'(\lambda)\varphi_i, \psi_i\| \neq 0$. Пусть известны достаточно хорошие приближения φ_{i0}, ψ_{i0} и Λ к собственным элементам φ_i, ψ_i , $i=1, 2, \dots, n$ и собственному числу λ , соответственно: $\|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $|\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$.

В качестве приближения λ_0 выбираем приближенное значение одного из решений уравнения

$$F^0(t - \Lambda) \equiv f^0(t) \equiv \det \|A(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0}\| = 0.$$

В силу малости ε $k_0 = \det \|A'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0}\| \neq 0$. Поэтому биортогональные системы элементов к $\{\varphi_{i0}\}, \{\psi_{i0}\}$ можно построить следующим образом:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^0 A^{*'}(\lambda_0) \psi_{i0}, \quad z_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{s=1}^n K_{sj}^0 A'(\lambda_0) \varphi_{s0},$$

где K_{is}^0 - алгебраическое дополнение элемента $k_{is}^0 = \langle A'(\lambda_0) \varphi_{s0}, \psi_{i0} \rangle$. Так как $k_0 \neq 0$, то найдется номер i_0 , такой что $k_{i_0 1}^0 = \langle A'(\lambda_0) \varphi_{i_0 0}, \psi_{i_0} \rangle \neq 0$.

Введем оператор-функцию $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{j=2}^n \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$.

Теорема 2.1.1. Точное собственное значение λ оператора $A(t)$ является простой изолированной фредгольмовой точкой дискретного спектра оператора $\bar{A}(t)$, причем соответствующие собственный вектор и дефектный функционал имеют вид

$$\tilde{\varphi} = \varphi_{i_0} + \sum_{s=2}^n c_s \varphi_{s0}, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} d_j \psi_{j0}.$$

При этом элементы $\varphi_{i_0}, \psi_{i_0}$ оказываются достаточно хорошими приближениями элементов $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$.

Для уточнения собственного значения λ применим метод ложных возмущений в одномерном варианте к задаче

$$\bar{A}(t)x = 0, \quad (5)$$

для чего в качестве начального приближения λ^0 выбирается корень уравнения $f(t) \equiv \langle \bar{A}(t) \varphi_{i_0}, \psi_{i_0} \rangle = 0$.

Определим элементы

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}^*(\lambda^0) \psi_{i_0} \in E_1^*, \quad \tilde{z}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}'(\lambda^0) \varphi_{i_0} \in E_2,$$

биортогональные к φ_{i_0} и ψ_{i_0} соответственно.

Оператор ложного возмущения строится в виде

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \bar{A}(\lambda^0) \varphi_{i_0} + \langle x, \bar{A}^*(\lambda^0) \psi_{i_0} \rangle \tilde{z}_0,$$

Тогда $N(\bar{A}(\lambda^0) - D_0) = \{\varphi_{i_0}\}$, $N(\bar{A}^*(\lambda^0) - D_0^*) = \{\psi_{i_0}\}$.

С помощью метода Ляпунова-Шмидта уравнение (5) сводится к уравнению разветвления, простым корнем которого является точное собственное значение λ :

$$F(t) \equiv \langle (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda^0)) [I + \bar{\Gamma}_0 (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{i_0}, \psi_{i_0} \rangle = 0, \quad (6)$$

где $\bar{\Gamma}_0 = [\bar{A}(\lambda^0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Теорема 2.1.2. Если начальные приближения достаточно хороши, то найдутся числа C, C_l, L_l и K такие, что при $h = C\varepsilon(|k_{i_0 0}| - C_l\varepsilon)^{-1}(1 + L_l)K < 1$ искомое λ можно вычислить из уравнения (6) методом Эйткена-Стеффенсена:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0, \quad (7)$$

где $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = (F(t') - F(t'')) / (t' - t'')$.

Теорема 2.1.3. Собственные векторы $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$ соответствующие собственному значению λ оператора $A(\lambda)$ являются решениями уравнений

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, n}.$$

В конце параграфа в качестве приложения рассмотрены четыре примера: задачи на собственные значения матрицы, задачи Штурма-Лиувилля, оператора Лапласа для возмущенного квадрата и для эллиптической области.

В § 2.2 рассмотрено вычисление собственного значения с одной цепочкой. Построен регуляризующий оператор, понижающий алгебраическую кратность до единицы, т.е. превращающий искомое собственное значение в простое для регуляризованного оператора.

В § 2.3 для линейной относительно спектрального параметра оператор-функции рассмотрен случай кратного собственного значения со многими конечными цепочками.

Пусть E_1 и E_2 - банаховы пространства, $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \rightarrow E_2$, $A_1 : E_1 \supset D(A_1) \rightarrow E_2$, плотно заданные замкнутые линейные операторы, причем $D(A_0) \subset D(A_1)$ и A_1 подчинен A_0 (т.е. $\|A_1 x\|_{E_2} \leq \|A_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_0)$) или $D(A_1) \subset D(A_0)$ и A_0 подчинен A_1 (т.е. $\|A_0 x\|_{E_2} \leq \|A_1 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на $D(A_1)$).

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(A_0 - tA_1)x = 0.$$

Пусть $N(A_0 - \lambda A_1) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, и отвечающими им A_1 - и A_1^* - жордановыми цепочками с длинами $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$,

$$(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1\varphi_i^{(s-1)}, \quad (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s-1)} = A_1^*\psi_i^{(s-1)}, \quad s = \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$K = \det \left\| \langle A_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle \right\| \neq 0, \quad L = \det L_{ij} \neq 0, \quad L_{il} = \left\| \langle A_1 \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k^{(l)} \rangle \right\|,$$

$$i(k) = \overline{1, n}, \quad j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}.$$

Предположим, что известны достаточно хорошие приближения $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}$ к неизвестному собственному значению λ и ОЖЦ: $\|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon$, $|\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$ с близкими к единице соответствующими значениями K_0 и L_0 .

Производим регуляризацию

$$\overline{A}(t) \equiv \overline{(A_0 - tA_1)} = A_0 - tA_1 + \sum_{k=2}^{p_1} \langle \cdot, \gamma_{10}^{(k)} \rangle z_{10}^{(p_1+1-k)} + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_{i0}^{(k)} \rangle z_{i0}^{(p_i+1-k)}. \quad (8)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1. Искомое собственное значение λ является простым собственным числом регуляризованной оператор-функции (8), причем

соответствующие собственный вектор и дефектный функционал определяются в виде:

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1^{(p_1)} + \sum_{i=1}^n c_{i1} \varphi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{s=2}^{p_i} c_{is} \varphi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s} \varphi_1^{(s)}, \quad (9)$$

$$\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{i=2}^n d_{i1} \psi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} d_{is} \psi_i^{(s)}. \quad (10)$$

В качестве начальных приближений к $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ следует взять $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{10}^{(p_1)} - \varphi_{10}^{(p_1-1)}$ и $\tilde{\psi}_0 = \psi_{10}$ соответственно. Начальное приближение к λ выберем как решение уравнения $\langle \bar{A}(t) \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 0$, т.е.

$$\lambda_0 = \frac{\langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle + 1}{\langle A_0 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle}.$$

Так как $k_0 = \langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_{10}^{(p_1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle A_1 \varphi_{10}^{(p_1-1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_{10}^{(p_1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle \neq 0$, то

полагая $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_0} A_1^* \psi_{10}$, $\tilde{z}_0 = \frac{1}{k_0} A_1 \tilde{\varphi}_0$, имеем $\langle \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 1$, $\langle \tilde{z}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 1$.

Оператор ложного возмущения строится в виде

$$\begin{aligned} D_0 x &= \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \bar{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0 + \langle x, \bar{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0 \rangle \tilde{z}_0, \\ D_0^* y &= \langle \bar{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}, x \rangle \tilde{\gamma}_0 + \langle \tilde{z}_0, \bar{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0 \rangle \bar{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0. \end{aligned}$$

Тогда $D_0 \tilde{\varphi}_0 = \bar{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0$, $D_0^* \tilde{\psi}_0 = \bar{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0$, т.е. $N(\bar{A}(\lambda^0) - D_0) = \{\tilde{\varphi}_0\}$, $N(\bar{A}^*(\lambda^0) - D_0^*) = \{\tilde{\psi}_0\}$.

Уравнение разветвления для рассматриваемого случая имеет вид:

$$F(t) \equiv 1 - \langle [I + \bar{\Gamma}_0 (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda_0))]^{-1} \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 0, \quad (11)$$

где $\bar{\Gamma}_0 = [\bar{A}(\lambda_0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Пусть $S(\lambda_0; \rho)$ - некоторый шар с радиусом ρ и центром λ_0 .

Теорема 2.3.2. Если начальные приближения достаточно хорошие, то существует шар $S(\lambda_0; r)$, где $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} \eta \leq \rho$, $h = |F'(\lambda_0)|^{-1} L |F(\lambda_0)| \leq \frac{1}{4}$, $\eta = |F'(\lambda_0)| |F(\lambda_0)|$, в котором уравнение (11) имеет единственное решение $t = \lambda$ и последовательные приближения, определяемые модифицированным методом Ньютона:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - [F'(\lambda_0)]^{-1} F(\lambda_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

сходятся к этому решению.

Заметим, что при реализации итерационного процесса (19) на каждом шаге необходимо решать одно операторное уравнение

$$[\bar{A}(\lambda_m) + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0] x = \tilde{z}_0.$$

Теорема 2.3.3. Элементы ОЖЦ $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^p, \{\psi^{(i)}\}_{i=1}^p$ являются решениями следующих рекуррентных систем:

$$\begin{aligned} \left[A_0 - \lambda A_1 + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} \right] x &= z_{i0}, \quad \left[A_0^* - \lambda A_1^* + \sum_{s=1}^n \langle z_{s0}, \cdot \rangle \gamma_{s0} \right] y = \gamma_{i0}, \\ \left[A_0 - \lambda A_1 + \sum_{s=1}^n \langle \cdot, \gamma_{s0} \rangle z_{s0} \right] x_{j,i} &= A_1 x_{j-1,i} + z_{i0}, \quad x_{1i} = \varphi_i, \quad x_{j,s} = \varphi_i^{(j)}, \\ \left[A_0^* - \lambda A_1^* + \sum_{s=1}^n \langle z_{s0}, \cdot \rangle \gamma_{s0} \right] y_{j,i} &= A_1^* y_{j-1,i} + \gamma_{i0}, \quad y_{1i} = \psi_i, \quad y_{j,i} = \psi_i^{(j)}, \\ j &= \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

В п. 2.3.2 рассмотрен случай аналитических оператор-функций. Так как для такого случая биортогональные системы, обладающие определенными свойствами, построить невозможно, то методом линеаризации аналитический случай сводится к линейному, разобранному в п. 2.3.1.

В конце параграфа приведен метод нахождения собственных значений и соответствующих элементов ОЖН, основанный на теории возмущений.

В § 2.4 рассмотрен нетеровский случай собственного значения.

Пусть $A(t)$ - достаточно гладкая относительно $t \in G \subset C$ оператор-функция, действующая из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 и пусть λ нетеровская точка ее дискретного спектра с ОЖН $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=\overline{1, p_i}}$. Аналогично предполагаем, что $\{\psi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{m}}^{j=\overline{1, p_i}}$ ОЖН оператора $A^*(\lambda)$. Для определенности считаем $n > m$ и ОЖН $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=\overline{1, p_i}}$ m -полным набором. Без ограничения общности можно предположить, что $p_j > \max_{1 \leq i \leq m} p_i, j > m$. Предполагаются известными некоторые достаточно

хорошие приближения $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}: \quad \|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \quad \|\psi^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \quad |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$ при $i = \overline{m+1, n}, s \leq \max_{1 \leq j \leq m} p_j + 1$, при $i = \overline{1, m}, s = \overline{1, p_i}$.

Через $\{\gamma_{i0}\}_1^n$ и $\{z_{i0}\}_1^m$ обозначим системы векторов, биортогональные к $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ и $\{\psi_{i0}\}_1^m$ соответственно.

Расширим пространство E_2 (соответственно E_2^*) на подпространство, натянутое на идеальные элементы $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ ($\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$), как это сделано в §1.3 главы 1.

Без ограничения общности можно положить $\langle A'(\lambda) \varphi_1, \psi_1 \rangle \neq 0$.

Строим оператор-функцию $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$.

Лемма 2.4.1. Собственное значение λ является фредгольмовой точкой для оператор-функции $\vec{A}(t)$ с нулем $\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{k=2}^n c_k \varphi_k$ и дефектным функционалом $\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{k=2}^n d_k \psi_k$.

Доказывается, что φ_{10}, ψ_{10} являются приближениями нулей $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ операторов $\vec{A}(\lambda)$ и $\vec{A}^*(\lambda)$.

В силу малости коэффициентов $\tilde{n}_k, d_k, k = \overline{2, n}, \tilde{k} = \langle \vec{A}'(\lambda) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$.

Далее для уточнения собственного значения λ применяется метод ложных возмущений к задаче $\vec{A}(t)x = 0$, для чего в качестве начального приближения λ_0 выбирается корень уравнения $f(t) \equiv \langle \vec{A}(t) \varphi_{10}, \psi_{10} \rangle = 0$.

Уравнение разветвления, из которого определяется искомое собственное значение имеет вид:

$$F(t) \equiv \langle (D_0 + \vec{A}(t) - \vec{A}(\lambda_0)) [I + \vec{\Gamma}_0 (D_0 + \vec{A}(t) - \vec{A}(\lambda_0))]^{-1} \varphi_{10}, \psi_{10} \rangle = 0. \quad (13)$$

Теорема 2.4.1. Если начальные приближения достаточно хороши, то найдутся числа C, C_l, L_l и K такие, что при $h = C\varepsilon(|k_{i_0}| - C_l\varepsilon)^{-1}(1 + L_l)K < 1$ искомое λ можно вычислить из уравнения (13) методом Эйткена-Стеффенсена:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \lambda^{(0)} = \lambda^0,$$

где $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = \frac{(F(t') - F(t''))}{(t' - t'')}$.

Собственные векторы $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, \delta$, соответствующие собственному значению λ оператора $A(\lambda)$, определяются как решение уравнений

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, \delta}.$$

Для оператор-функции $A(t) = B - tA$ в случае наличия m -полного обобщенного жорданова набора делается следующая регуляризация

$$\vec{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}.$$

Лемма 2.4.2. Собственное значение λ является фредгольмовой точкой для оператор-функции $\vec{A}(t)$ с нулями $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \sum_{k=m+1}^n c_{ik} \varphi_k$ и дефектными функционалами $\tilde{\psi}_i = \psi_i + \sum_{k=m+1}^n d_{ik} \psi_k, \quad i = \overline{1, m}$.

Лемма 2.4.3. Если $\{\overline{\varphi}_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{o}}^{j=1, \overline{p_i}}$ А-ОЖН оператор-функции $\overline{A}(\lambda)$, соответствующей λ , то данные приближения $\varphi_{i0}^{(s)}$ будут также приближениями для $\overline{\varphi}_{i0}^{(s)}$, $s = \overline{1, p_i}$, $i = \overline{1, m}$.

Применяя далее методику §2.3, определяется искомое собственное значение и ему соответствующие корневые элементы.

Нахождению кратных собственных значений и им соответствующих собственных элементов модельной задачи A посвящен § 2.5. Регуляризуя исходную задачу случай кратного собственного значения сводится к случаю простого собственного значения. Затем методом ложных возмущений уточняются искомое собственное число и ему соответствующие корневые элементы.

Третья глава целиком посвящена вопросам многопараметрической спектральной задачи. Понятие совместного спектра вводится для коммутативного набора линейных операторов через алгебру, порожденная этими операторами. Так как совместный спектр зависит от выбора алгебры, то он определяется неоднозначно. В § 3.1 результаты Даша переносятся на некоммутативный набор линейных оператор-функций. Установлен существенный признак точек регулярного множества. Доказано, что совместный спектр (совместный дискретный спектр) равняется декартовому произведению спектров (дискретных спектров) операторов, принадлежащих данному набору. Установлено, что совместное нулевое подпространство есть тензорное произведение нулевых подпространств, его составляющих. Определив понятие совместного предельного спектра, установлена взаимосвязь между совместным спектром и совместным предельным спектром. Введено понятие совместного числового множества и доказано представление совместного числового множества через числовые множества составляющих данный набор.

В § 3.2 рассматривается многопараметрическая задача на собственные значения по Аткинсону. Даются основные определения, переносятся на многопараметрические задачи один результат Ф.Реллиха. На случай симметричных оператор-функций обобщается результат Г.А. Исаева. Эти результаты являются основой для разделения спектра многопараметрических задач на собственные значения. Следуя Ф.Аткинсону, на основе теории тензорного произведения строятся специальные операторы $\Delta_r - \lambda_r \Delta_0$ составляющие семейство операторов Δ разделяющее спектр многопараметрических задач. Доказано, что совместное резольвентное множество ρ семейства Δ входит в резольвентное множество многопараметрической задачи. Определено условие, при котором они совпадают. Вводится понятие совместной числовой области и доказывается, что в общем случае совместная числовая область многопараметрической задачи принадлежит совместной числовой области разделяющего семейства операторов. Установлено также, что при w -независимости многопараметрической задачи эти две области совпадают. Возмущениям в

многопараметрических спектральных задачах посвящен § 3.3. Построены уравнения разветвления, затем применяя к одномерному уравнению разветвления метод диаграммы Ньютона, определяются все собственные значения и их порядок зависимости от возмущающего параметра.

Возмущениям в многопараметрических спектральных задачах посвящен п. 3.3. Исследованы как случай простого собственного значения, так и случай кратного собственного значения.

Пусть E_j, F_j , $j = \overline{1, n}$ - банаховы пространства, и $T_j(t) \in L(E_j, F_j)$, $j = \overline{1, n}$ - аналитические в некоторой области $G \subset C^n$ оператор-функции. Пусть далее, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ - изолированная фредгольмова точка дискретного спектра $\sigma_p(T)$ многопараметрической задачи на собственные значения $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, такая, что $\text{Ker}(T_j(\lambda^0)) = \{\varphi_{j10}, \dots, \varphi_{jn0}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda^0)) = \{\psi_{j10}, \dots, \psi_{jn0}\}$, $\{\gamma_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ и $\{z_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ - биортогональные системы к $\{\varphi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ и $\{\psi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ соответственно.

Рассматривается следующая возмущенная задача на собственные значения

$$T_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

где $T_j(t; 0) = T_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, и $T_j(t; \varepsilon)$ - аналитичны по малому комплексному параметру ε .

Для каждого $j = \overline{1, n}$ строим операторы $\tilde{T}_{ji}(t; \varepsilon) = T_j(t; \varepsilon) + \sum_{i \neq j} \langle \cdot, \gamma_{ji0} \rangle z_{ji0}$.

Лемма 3.3.1. При достаточно малых ε и при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ найдутся постоянные c_{jis}, d_{jis} , $j, s = 1, 2, \dots, n$, такие, что искомые собственные значения $\lambda_i(\varepsilon)$ окажутся простым фредгольмовым собственным значением для многопараметрической задачи

$$\tilde{T}_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

Применяя к (15) метод Ляпунова-Шмидта строится уравнение разветвления собственного значения

$$L_j^{(i)}(\mu_i; \varepsilon) \equiv \sum_{s+|\alpha| \geq 1} L_{jas}^{(i)} \mu_i^\alpha \varepsilon^s = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

где $L_{jas}^{(i)} = \sum_{(\alpha, s) = (\alpha^{(0)}, s_0) + k_1(\alpha^{(1)}, s_1) + \dots + k_m(\alpha^{(m)}, s_m) + \dots} \langle T_{j\alpha^{(0)}s_0} (\Gamma_j T_{j\alpha^{(1)}s_1})^{k_1} \dots (\Gamma_j T_{j\alpha^{(m)}s_m})^{k_m} \dots \varphi_{ji0}, \psi_{ji0} \rangle = 0$.

Применяя к (16) Кронекерский метод исключений, сводим его к одномерному уравнению. Затем применяя к одномерному уравнению разветвления метод диаграммы Ньютона, определяются все собственные значения и их порядок зависимости от возмущающего параметра.

В конце главы рассматривается ветвление нетеровских собственных значений. Результаты § 1.3 главы 1 переносятся на многопараметрические задачи по Аткинсону. Рассмотрены как случай нетеровой точки 1-рода, так и нетеровой точки 2-рода.

В четвертой главе результаты предыдущих глав переносятся на многопараметрические задачи на собственные значения. Рассмотрены случаи

простого и кратного собственных значений без жордановых цепочек. В § 4.1 рассмотрен случай фредгольмовых точек дискретного спектра.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ изолированная фредгольмова точка дискретного спектра $\sigma_p(T)$ многопараметрической спектральной задачи $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, такая, что $Ker(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn}\}$, $Ker(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jn}\}$. Предполагаются известными достаточно хорошие приближения $\varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$, и Λ к $\varphi_{ji}, \psi_{ji}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$ и λ соответственно: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

В качестве начального приближения $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ можно выбрать решение следующей системы

$$F_j(t - \Lambda) \equiv \det \|T_j(t)\varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{js}^{(0)}\| = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Системы $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}$, $\{z_{ji}^{(0)}\}$ биортогональные соответственно к $\{\varphi_{ji}^{(0)}\}$, $\{\psi_{ji}^{(0)}\}$ строятся в виде

$$\gamma_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jsi}^0 \frac{\partial T_j^*(\lambda^0)}{\partial t_j} \psi_{js}^{(0)}, \quad z_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jis}^0 \frac{\partial T_j(\lambda^0)}{\partial t_j} \varphi_{js}^{(0)}.$$

Производится регуляризация:

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i \neq s_0} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 4.1. Собственное значение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является простым собственным значением задачи

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

которому соответствует собственный элемент $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\varphi}_n$ и дефектный функционал $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\varphi}_j = \varphi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} c_{ji} \varphi_{ji}$, $\tilde{\psi}_j = \psi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} d_{ji} \psi_{ji}$.

Уравнение разветвления для задачи (17) имеет вид

$$f_j(t) \equiv \langle (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0)) [I + \Gamma_{j0} (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{js_0}^{(0)}, \psi_{js_0}^{(0)} \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Для определения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ к системе (18) применяется метод Ньютона:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [\mathfrak{Z}(\lambda^{(m)})]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $\mathfrak{Z}(\lambda^{(m)}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right) (\lambda^{(m)})$.

После того, как найдено $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, соответствующие собственные элементы определяются из следующих линейных уравнений:

$$\left[T_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)} \right] x_j = z_{jk}^{(0)}, \quad \left[T_j^*(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle z_{ji}^{(0)}, \cdot \rangle \gamma_{ji}^{(0)} \right] y_j = \gamma_{jk}^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Регуляризации нетеровых точек дискретного спектра посвящен § 4.2.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ изолированная нетерова точка дискретного спектра $\sigma_p(T)$ задачи $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, такая, что $Ker(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn_j}\}$

$Ker(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jm_j}\}$ и для определенности $n_j > m_j$ для всех i , т.е. λ является нетеровой 1-рода.

Пусть известны достаточно хорошие приближения $\varphi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$, $\psi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, n}$, и Λ к $\varphi_{ji}, \psi_{ji}, j = \overline{1, n}$ и λ соответственно: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

Расширяя пространства F_i^* на идеальные элементы $\psi_{i, m_i+1}^{(0)}, \psi_{i, m_i+2}^{(0)}, \dots, \psi_{i, n_i}^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, предположим, что $k_{ij} = \det \left\| \left\langle \frac{\partial T_i(\lambda)}{\partial t_j} \varphi_{ij}^{(0)}, \psi_{ij}^{(0)} \right\rangle \right\| \neq 0, i, j = \overline{1, n}$.

Построив биортогональные системы $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}, \{z_{ji}^{(0)}\}$ производим регуляризацию

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i=m_j+1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}, j = \overline{1, n}.$$

Теорема 4.2. Уточняемое собственное значение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является изолированным фредгольмовым собственным значением задачи

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, j = \overline{1, n}.$$

Производя вторичную регуляризацию $\bar{\bar{T}}_j(t) = \bar{T}_j(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}$ доказывается, что $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ является простым собственным значением задачи

$$\bar{\bar{T}}_j(t)x_j = 0, j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Далее применяя к (19) метод Ляпунова-Шмидта строится уравнение разветвления, из которого затем методом Ньютона вычисляется искомое собственное значение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Замечание. Если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - нетерова точка второго рода, т.е. $n_j > m_j$ для $j = \overline{1, k}$ и $n_j < m_j$ для $j = \overline{k+1, n}$, то полагая $\tilde{T}_j(t) = T_j(t)$, для $j = \overline{1, k}$ и $\tilde{T}_j(t) = T_j^*(t)$, для $j = \overline{k+1, n}$ приходим к выводу, что $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - нетерова точка первого рода для задачи $\tilde{T}_j(t)x_j = 0, j = \overline{1, n}$.

В конце главы для иллюстрации приложения результатов главы рассматриваются задачи

$$\text{А. } \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, u_1(0) = 0, u_1(x_0) = u_1(1),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, u_2(0) = 0, u_2(x_0) = u_2(1),$$

$$\text{В. } \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, u_1(0) = u_1(1), u_1'(0) = u_1'(1),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, u_2(0) = u_2(1), u_2'(0) = u_2'(1).$$

Все вычисления выполнены с помощью пакетов программы Maple 11.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследуются регуляризации заданных аналитических оператор-функций для определения их кратных фредгольмовых и нетеровых собственных значений и соответствующих им собственных элементов как в однопараметрических так и в многопараметрических спектральных задачах. Данные методы в комбинации с методом ложных возмущений применяются к уточнению приближенно заданных собственных значений и им соответствующих корневых элементов.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Полученные результаты позволяют сделать следующие заключения:

1) В случае неполного ОЖН у фредгольмова оператора, состоящего из ОЖЦ конечной длины, аналитически возмущенное линейное уравнение имеет решение вида

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \left[\xi \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_j \right].$$

2) Доказано, что возмущенная оператор-функция имеет ровно N собственных значений. Установлены порядки зависимости этих собственных значений и им соответствующих собственных элементов от возмущающего параметра.

3) В диссертации, вводом идеальных элементов в пространстве A_2 (соответственно в пространстве A_2^*) осуществлена регуляризация, в результате чего нетерово собственное значение становится фредгольмовым для регуляризованного оператора. Применяя метод Ляпунова-Шмидта и метод диаграммы Ньютона, доказано, что регуляризованная, а, следовательно, и исходная оператор-функция имеют ровно N собственных значений, представимых сходящимися рядами по целым и дробным степеням ε .

4) Рассмотрена возмущенная задача на собственные значения по Э.Шмидту. Методом регуляризации доказано, что существуют N непрерывных по ε собственных значений, представимых сходящимися рядами по целым и дробным степеням ε .

5) Метод регуляризации в комбинации с методом ложных возмущений применен для приближенного вычисления кратных собственных значений, как в однопараметрических, так и в многопараметрических спектральных задачах. Так как эти методы в случаях неполного ОЖН не позволяли построить итерационные процессы для определения собственных значений, а для n -кратных собственных значений с полным ОЖН требовали огромных вычислений, то метод регуляризации, предложенный диссертантом, сокращает эти вычисления в 2^n раз.

6) Методом линеаризации построен алгоритм вычисления кратных собственных значений аналитических оператор-функций.

7) Впервые, используя комбинацию методов регуляризации и ложных возмущений, построены итерационные процессы для уточнения нетеровых собственных значений.

8) Методом регуляризации определены собственные значения оператора Лапласа для возмущенного квадрата и для эллиптической области.

Автор приносит свою признательность академику Алимову Шавкату Арипджановичу за полезные консультации и ценные советы, Русаку Юрию Борисовичу за ценные дискуссии, которые очень помогли при уточнении некоторых фактов, и особенно проф., доктору физико-математических наук Логинову Борису Владимировичу за постоянные консультации, поддержку и постановку некоторых задач.

**SCIENTIFIC COUNCIL ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF
DOCTOR OF SCIENCES 16.07.2013.FM.01.01 AT NATIONAL
UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

RAKHIMOV DAVRAN GANIEVICH

**SOLUTION OF PERTURBED EIGENVALUE PROBLEMS
BY THE REGULARIZATION METHOD**

**01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)**

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2014

The subject of doctoral dissertation is registered the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan in number 30.09.2014/B2014.5.FM130.

Doctoral dissertation is carried out at National University of Uzbekistan.

The full text of doctoral dissertation is placed on web page of Scientific council 16.07.2013. FM.01.01 at the National University of Uzbekistan to the address nauka@nu.uz.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian, English) is placed on web page to address nauka@nu.uz and information-educational portal «ZIYONET» to address www.ziyonet.uz

**Scientific
consultant:**

Alimov Shavkat Arifdjanovich
doctor of physical and mathematical sciences, academician

**Official
opponents:**

Ganikhodjaev Rasul Nabievich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Khalmukhamedov Olim Rakhimovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Karachik Valeriy Valentinovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

**Leading
organization:**

Urgench State University

Defense will take place «__» _____ 2014 at _____ at the meeting of scientific council number 16.07.2013.FM.01.01 at National University of Uzbekistan to adress: 100174, Uzbekistan, Tashkent, 4, University str. Ph.: (99871) (998-71) 227-12-24, fax: 998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.

Doctoral dissertation is registered in Information-resource centre at National University of Uzbekistan № _____, it is possible to review it in IRC (100174, Tashkent, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24.

Abstract of dissertation sent out on «__» _____ 2014 year
(mailing report № _____ on _____ 2014 year)

B.A.Shoimqulov
Chairman of scientific council on award of scientific degree of doctor of sciences D.F.M.S., professor

M.Tukhtasinov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree of doctor of sciences D.F.M.S., professor

M.S.Salakhitdinov
Chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degree of doctor of sciences, D.F.M.S., academician

ANNOTATION OF DOCTORAL DISSERTATION

Topicality and relevance of the subject of the dissertation. Researches related to the theory of nonlinear problems are one of the topical directions in the modern mathematics. Source of productions of such problems are mathematical models used in applied mathematics, biology, economics, hydrodynamics, elasticity and plasticity theory, theoretical and mathematical physics. When solving nonlinear problems, an important factor is the phenomenon of bifurcation and branching in problems, which leads to the emergence of new solutions in cases of transfer of controlling parameters of equations by means of the critical values. Among these new solutions, there are stable solutions, as well as solutions that are either immediately go out, or do not occur in a practical situation. Study of new solutions of nonlinear problems emerging at points of branching is the direction, which is called the “theory of stability and bifurcations”. The most striking examples of bifurcation (critical) phenomena are divergence (static bifurcation) and flutter (dynamic oscillatory buckling of plates and shells, in particular aircraft wings) in a stream of gas or liquid (hydro elasticity). This problem of a flutter has become particularly important in supersonic aerodynamics. In the middle of the last century, to study problems of aerodynamics only variation and grid methods were applied. And only in the twenty-first century, methods of the bifurcation theory have been used in this area.

Stability of produced both static and dynamic solutions is studied by the methods of the perturbation theory. More precisely, the spectrum of the Frechet derivative of the nonlinear equation (system of equations) is studied on the branched solution. Assuming that the eigenvalues of linearization, i.e. values of the Frechet derivative on the trivial solution are known, they look for the Frechet spectrum on the branched solution that allows the use of perturbation theory from the spectral theory of linear operators.

That is why the stream of research related to solving nonlinear problems of perturbation theory rises (from the middle of the last century) with exponential speed, and any new deep result in the perturbation theory is relevant both for the perturbation theory, and for its applications to solving nonlinear problems.

Closely relation of the bifurcation processes to problems of describing the perturbations of the discrete spectrum of linear operators is one of the main causes for the need of researches connected with the subjects of the dissertation. Researches of situations pertaining to the perturbation of multiple eigenvalues are associated with certain difficulties, which, unfortunately, can not always be overcome. For example, in the perturbation problem of Fredholm eigenvalues, it is found that the number of the eigenvalues branching of these points of the perturbed operator will be as much as a root number of the operator, but it is necessary in this case to require the completeness of the generalized Jordan set (GJS). In the case of an incomplete GJS, degeneracy of branching equation is arisen. In this situation, additional calculations on a specially-built algorithm of replenishment of GJS are needed. In addition, coefficients of the branching equation are determinants of the

n -th order, that's why the process of their finding requires a huge amount of computing.

Such studies could not be carried out in the perturbation problem for Noether points of the discrete spectrum. This is due to the fact that the branching equation of an eigenvalue for these operators can not be built because of inequality of dimensions of zero and defect subspaces.

This situation leads to necessity in the construction of special operators, for which considered multiple eigenvalues would have been simple or multiple but with a complete GJS. The constructing process of such operators is said to be regularization of linear operators.

The regularization procedure of linear operators allows to transform the Noether points of operators into the Fredholm ones, and it gives the possibility to construct the branching equation, which allows determining all the eigenvalues and corresponding eigenvalues of the perturbed operator. In addition, multiple eigenvalues are reduced to simple ones, that allows capturing the condition of degeneration for branching equations.

The mentioned methods of reducing the great volume of calculations explain the necessity and need of attraction of researches related to the subject of the dissertation.

Conformity of research to priority directions of development of science and technology of the Republic of Uzbekistan. This work was performed in accordance with priority directions of science and technology of the Republic of Uzbekistan No.F4 «Mathematics, Mechanics and Informatics».

Overview of international research on the topic of the dissertation. Among the different approaches associated with the possibility of solving nonlinear problems, we should select in the first place variational methods, the use theorems on the fixed point, methods of the catastrophe theory and bifurcation theory, and also methods using topological structures and implicit function theorems.

In research centers and higher education institutions of the USA (University of California), UK (University of Edinburgh), Japan (Tokyo University), Canada (University of Calgary), Russia (Moscow State University, Bauman Moscow State University), Slovenia (University of Ljubljana) and Germany (Berlin University) research work on solving nonlinear equations are carried out, cases of bifurcation of solutions and perturbation of both the discrete and continuous spectra of linear operators are studied.

Perturbations of the continuous spectrum, which is extremely important in studies of scattering theory and quantum field theory, are studied in Tokyo (Japan) and California (USA) universities.

In Bauman Moscow State University (Russia) stability of branching solutions of abstract parabolic equations with the help of the Lyapunov methods is studied with applications to nonlinear phenomena. In each of the studied problems, by means of numerical simulation methods of reduction of disturbances, construction of domains of control (physical) parameters is given for which constructed families of solutions are stable. Also the conditions of potentiality and pseudopotentiality of

branching equations and branching equations in the root spaces for stationary and dynamic problems on the spectrum Schmidt are studied.

In Irkutsk State University in collaboration with Bauman Moscow State University, regularizations in the branching theory are studied, which are widely used in the approximate solution of operator equations with irreversible operator.

In Germany research centers, perturbation problems in nonlinear eigenvalue problems are solved. Using nonlinear perturbations, topological and structural methods, conditions of completeness and basis property elements are set. Also researches related to multiparameter eigenvalue problems are actively developed.

In California University of California (USA), University of Edinburgh (UK), University of Calgary (Canada), University of Ljubljana (Slovenia), Berlin University (Germany), Moscow State University and Bauman Moscow State Technical University (Russia), large-scale studies on the associated elements and the Jordan structures of the spectrum of multiparameter eigenvalue problems are conducted.

In Edinburgh University (UK) in collaboration with the University of Ljubljana (Slovenia) and the University of Calgary (Canada), the root structure of multiparameter spectral problems are began to study. The concepts of associated elements to the eigenvectors are determined. Since these studies are in development, they require special new approaches.

Interest in these problems has appeared from research in the theory of diagnosis of technical systems on natural vibration frequencies, as well as in applied control the frequency characteristics of various technical devices. As studies, conducted at the University of Kazan (Russia), have been showed, the issues discussed in these problems are directly related to disturbances in the multiparameter eigenvalue problems by Atkinson.

Degree of scrutiny of the problem. In spite of the great number of conducted researches in the theory of linear operators and the perturbation problems of linear operators, the degeneration cases connected with the multiple eigenvalues and the questions of calculating the eigenvalues of the perturbed operators with the incomplete GJS, especially, have been remained unsolved. Although the completion methods of GJS are developed, and the methods of their use to finding the perturbed eigenvalues are indicated, they do not give the possibility to determine the exact number of eigenvalues of the perturbed operator in the neighborhood of the Fredholm points of the spectrum of the nonperturbed operator. Even the degree of their dependence from their perturbing parameter can not be indicated. The perturbation problem of the Noether points of the spectrum of linear operators has not been still investigated. This is due to the fact that the branching equation of an eigenvalue for these operators can not be built because of inequality of dimensions of zero and defect subspaces. That's why these situations in perturbation problems of the spectrum of linear operators have been remained problematic.

Starting from the analysis of existing works, it should be noted that researches of perturbation problems of multiple eigenvalues are distant from the end. Absolutely new approaches are needed to solve these questions.

Connection of the dissertation work with the plans of scientific researches is reflected in the following fundamental research projects:

F-1.1.12 «Regularization of problems on eigenvalues using the method of false perturbations» (2003-2007 yy); F-4-02 «Development of new solutions for problems of mathematical physics and optimal control in the base of the spectral theory of differential operators» (2012-2016 yy).

The aim of the research is to define by means of the regularization method multiple Fredholm and Noether eigenvalues with the corresponding incomplete generalized Jordan set in one-parameter and multiparameter spectral problems.

To achieve the aim, the following **research problems** were set:

with the help of the regularization method, to determine for an incomplete Jordan set the exact number of eigenvalues and corresponding eigenvectors, a view of their representation in the form of convergent series by integer or fractional powers of the parameter ε in the neighborhood of a multiple Fredholm eigenvalue;

to find all eigenvalues branching in a neighborhood of the Noether point of a discrete spectrum of the nonperturbed operator, to establish the order of their dependence on the perturbation parameter ε ;

to construct the iterative process (with the help of regularization of the given operator and the method of false perturbations) allowing to define multiple Fredholm and Noether eigenvalues of the operator and the corresponding root elements;

in the multiparameter eigenvalue problem by Atkinson, to find conditions that provide the splitting of the spectrum on the spectrums of one-parameter operator functions;

to apply the regularization method to multiparameter eigenvalue problems. To construct an algorithm of finding the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the perturbed problem. To construct iterative processes for calculating the eigenvalues in multiparameter spectral problems.

The object of research are cases of perturbations occurring in eigenvalue problems of three varieties: the classic one-parameter problem, eigenvalue problem by E. Schmidt and multiparameter eigenvalue problem.

The subject of research is to solve problems related to the perturbation of the discrete spectrum of linear operators in the case of both multiple Fredholm eigenvalues and Noether ones.

Methods of research. In the work, methods of the nonlinear analysis and nonlinear equations, the theory of linear operators, the method of the Newton diagrams for solving algebraic equations are used. To calculate approximately eigenvalues, the Newton and Steffensen methods are used.

Scientific novelty of the dissertation research consists of the following:

in the case of an incomplete generalized Jordan set, theorems are proved on the existence of eigenvalues of the perturbed operator and their degree of dependence on the perturbing parameter. The proof of these theorems has been made possible thanks to the use of the regularizer developed by the author of dissertation;

the perturbing problem of Noether eigenvalues is solved by the construction of the regularizer allowed to reduce Noether point of the discrete spectrum to Fredholm ones;

the number of eigenvalues of the perturbed operator is defined in a neighborhood of the noetherian point of the spectrum, and the degree of their dependence on the perturbing parameter is established;

approximate methods for computing the eigenvalues are developed using the method of false perturbations. The regularizer is constructed allowing us to reduce the n -multiple case to a simple one, thus reducing the number of computational operations in 2^n times;

at first, the iteration process is built to find the Noether points and the Shmidt eigenvalues;

the Rellich-Trenogin theorem is proved for a perturbation problem of the discrete spectrum of the multiparameter eigenvalue problem by Atkinson;

approximate algorithms for finding Fredholm and Noether eigenvalues of the multiparameter spectral problem by Atkinson are built.

Practical results of investigation are as follows:

the branching equation is built for the Sturm-Liouville eigenvalue problem at the perturbation on a boundary of the segment; through the application of the regularization method and the Newton diagram to this equation, all its eigenvalues are determined;

all eigenvalues of the Laplace operator are defined for the perturbed square. Conditions are established under which the posed problem has eigenvalues, and the orders of their dependence on the perturbing parameter are found;

since method of false perturbation does not give the possibility to calculate all eigenvalues of the perturbed operator, using the regularization method in combination with the method of false perturbation, iteration processes were successfully constructed for computing all eigenvalues of both the Fredholm and Noether types.

Reliability of the obtained results is substantiated using well-known theorems of the theory of linear operators and perturbation theory, strictness of mathematical reasoning and application of known methods of Newton and Steffensen. Proof of convergence of power series follows from the known Puiseux theorem. To establish the reliability of the research results, iterative processes are constructed for the approximate calculation of the eigenvalues.

The scientific and practical value of investigation results. The theoretical significance of the obtained results is to use them both in studies of non-linear analysis and non-linear equations, and in concrete problems of determining the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of differential or integral equations of mathematical physics.

The practical value of the work is contained in reduction of the multiple case to a simple one, which significantly reduces the number of computational operations performed in the process of determining the eigenvalues.

Implementation of the research results. The results are applied to problems of mathematical physics and computational mathematics on the part of the

construction of iterative algorithms for finding multiple eigenvalues and in the joint projects of Russian Foundation for Basic Research – Academy of Sciences of Romania 07-01-91680 (2007-2009 yy.) «Investigation of the stability of branching solutions of abstract parabolic equations with the help of the Lyapunov method with applications to nonlinear phenomena», to prove the stability of solutions of reducing the perturbation method is proposed in the thesis was applied; in the project of Russian Science Foundation 14-11-00640 «Non-classical evolution equations, the existence and stability of solutions on the basis of the Morse-Conley topological index and perturbation theory of semigroups of operators», by means of the reducing perturbation method, the study of a multiple eigenvalue reduced to the study of a simple eigenvalue. The regularization method, which is applied to the computing process of finding n -multiple eigenvalues, gives an opportunity to reduce the number of operations in 2^n times, that is actively used in the computational procedure for solving the problem of describing the energy levels of physical systems with a fixed number of particles.

Approbation of the work. The main provisions of the dissertation are presented and reported at seminars and 8 scientific conferences, in particular, at the city seminar of the department «Functional analysis», National University of Uzbekistan (former Tashkent State University, 1985-2000); at the seminar of the department «Higher mathematics», the Moscow Institute of Steel and Alloys (1985-1991); at the seminar of the department «Mathematical analysis», National University of Uzbekistan (2000-2013); at the seminar «Nonclassical problems of differential equations», National University of Uzbekistan (2013); at the international conference «Degenerating equations and the equations of the mixed type» (Tashkent, 1993); at the 16-th international scientific conference «Mathematical methods in engineering and technology» (Saint-Petersburg, 2003), at the 17-th international scientific conference «Mathematical methods in engineering and technology» (Kostroma, 2004), at the international conference «Modern problems of mathematical physics and information technology» (Tashkent, 2005); at the international conference «Modern problems of differential equations, operators theory, and space researches» (Almaty, 2006), at the international conference «Differential equations, theory of functions and applications» (Novosibirsk, 2007), at the international conference «Problems of modern topology and applications» (Tashkent, 2013); at the republic conference «Modern problems of differential equations» (Tashkent, 2013); at the international conference «CIAM-2013» (Bucharest, 2013).

Publications of the results. 30 works are published by the theme of the dissertation, from which there are 22 articles (among them 11 are in foreign journals) and 8 abstracts.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of the introduction and four chapters with conclusions, general conclusion and bibliography, its total volume is 144 pages, there are 149 names in the list of references.

THE SUMMARY OF THE DISSERTATION

In the introduction, the urgency and relevance of the theme of the dissertation are established in accordance with research priority directions of development of Science and Technology of the Republic of Uzbekistan; the purpose and problems, as well as the object and subject of study, are formulated; scientific novelty and practical results of the study are set out; the reliability of the results is justified, their theoretical and practical importance is disclosed; the list of implementing the findings of the study, information on published works and the structure of the dissertation are given.

The spectral theory owes its formation due to researches of an oscillating string undertaken by B. Taylor in 1713. This theory has been developed further in works by J. Sturm and J. Liouville in the 19-th century, and by G. Weyl, V. Volterra, M. Riesz, D. Hilbert, S. Banach, S. Mazur, J. Schauder and many others mathematicians the 20-th century. The last sixty years development of this theory was continued in works by I.M. Gelfand, M.G. Krein and M.A. Naymark in USSR, by S. Kakutani, T. Kato, S. Kuroda and K. Iosida in Japan and in USA, by I. Colojoara and C. Foias in Romania, by E. Hille and R.S. Phillips, K.O. Friedrichs, von J. Neumann, E. Paley and N. Wiener in USA. During this period bases of the theory of self-connected operators are laid, and many basic problems of this theory have been solved in a satisfactory form. With the development of modern physics, the theory has found its application in problems of nuclear physics, the theory of dispersion, a quantum mechanical problem of three bodies, the quantum theory of a field and in problems of mathematical physics.

The inversion problem of differential operators and solvability of boundary value problems necessarily lead to the study of pseudodifferential operators, and problems of the qualitative behavior of the solution – to the study of spectral properties of these operators.

The exact conditions for the uniform convergence of spectral decomposition and multiple trigonometric series were installed by V.A. Ilyin. These studies were further extended by his students Sh.A. Alimov and E.I. Moiseev for more general operators. They set conditions for the uniform convergence of both the spectral decompositions and their Riesz means. Under the supervision of Sh.A. Alimov, R.R. Ashurov, O.R. Khalmukhamedov, B. Turmetov, A.A. Rakhimov and Sh.G. Kasimov developed these results for elliptic differential operators of the order m , for operators of fractional differentiation from the class of functions of Sobolev $W_p^\alpha(\Omega)$, Nikolsky $H_p^\alpha(\Omega)$, Liouville $L_p^\alpha(\Omega)$, Besov $B_p^\alpha(\Omega)$, and Zigmund- Hölder $C^\alpha(\Omega)$.

The perturbation theory was created by Rayleigh and Schrödinger. Rayleigh gave the formula for calculating the fundamental frequencies and vibration modes of a system, which is little different from the more simple system that allows for a complete description of the frequencies and modes of vibration. From the mathematical point of view, this method is equivalent to the approximate solution of the eigenvalue problem for a linear operator, which is little different from a

simple operator, for which this problem is completely solved. Schrödinger developed a similar method for eigenvalue problems arising in the quantum mechanics.

These initial works were, however, very formal and incomplete in terms of mathematics. The authors implicitly assumed that the eigenvalues and eigenelements can be expanded in a power series by a small parameter characterizing the deviation of the perturbed operator of the unperturbed one. There have been no attempts to prove the convergence of these series.

The final question of the convergence of the series was only allowed in a series of works by F. Rellich. To prove the convergence of the corresponding power series, he applied the majorant method. But Rellich did not identify all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the perturbed operator.

In the future, these studies were developed in works by T. Kato, M.I. Vishik, L.A. Lyusternik, N.N. Nazarov, K.T. Akhmedov, P.G. Ayzengendler, M.M. Vaynberg, V.A. Trenogin, B.V. Loginov and N.A. Sidorov for not self-adjoint operators. V.A. Trenogin has investigated this problem using the branching theory. Through the use of the methods of Lyapunov and Schmidt and the Newton diagram, he was able to identify all the eigenvalues and corresponding eigenvectors of the perturbed operator, i.e. to determine the exact number of the eigenvalues and the corresponding eigenvectors, the form of their presentation as convergent series in integral or fractional powers of the parameter ε . Moreover, he established the connection between the number of eigenvalues and the length of Jordan chains or the root number of the unperturbed Fredholm operator. All statements have been proved under the assumption of completeness of the Jordan set. In particular, for the case of the incomplete Jordan set, he proposed the method of his continuation to the full set. Later this idea was developed in the work by B.V. Loginov and Yu.B. Rusak with the careful analysis for general cases, too. Although the completion of Jordan sets allows us to apply the Rellich-Trenogin theorem, there is uncertainty with such supplement: the volume of a Jordan set the can be increased, i.e. additional eigenvalues will arise. In addition, the replenishment requires many operations to perform.

In the case of a complete Jordan set, exhaustive results are obtained in perturbation problems of linear equations by small linear summands and in eigenvalues problems for the perturbed Fredholm operator. But for an incomplete Jordan set, similar results can be obtained only after additional constructions. That's why there are questions: 1) Whether it is possible to obtain similar results for a given set without its completion? 2) Whether it is possible to receive similar results for Noether operators? These questions are considered in the first chapter of the work, which consists of five paragraphs.

The basic definitions from the spectral theory of linear operators, and the statements, often used in the branching theory of solutions of nonlinear equations, are given in the first paragraph of this chapter. The theorem on the solution of a perturbed linear equation by small linear summands is proved, and its degree of dependency on perturbation parameter is established in the case of an incomplete GJS.

In the second paragraph, the perturbation problem for Fredholm eigenvalues of an analytical operator-function with respect to a spectral parameter is considered.

Let E_1, E_2 be some Banach spaces, a linear operator-function $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ be analytically dependent on a spectral parameter $t \in G \subset C$.

Let λ be a Fredholm point such that $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. According to corollary from the Hahn--Banach theorem, there exist systems of the elements $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, which are biorthogonal to $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$ respectively.

Then projectors $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ generate the following decompositions in the direct sums: $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \oplus E_{2,\infty-n}$.

Definition 1.1.7 (the degeneration removal). The condition of absence of common zero-elements for the operators $A(\lambda_0)$ and $\sum_{s=1}^{\infty} A_s (\lambda - \lambda_0)^s$ is said to be «the condition of the degeneration removal».

The condition of the degeneration removal guarantees possibility of fulfilment of the regularization process used further in the dissertation for the perturbation problems.

Let $\varepsilon \in C$ be a small perturbation parameter, $|\varepsilon| \leq \rho_0$ and $A(t; \varepsilon) = \sum_{k+l=0}^{\infty} A_{lk} \mu^l \varepsilon^k : E_1 \rightarrow E_2$, $\mu = \lambda - \lambda_0$ be a perturbed operator-function such that $A(t; 0) = A(t)$.

For every $i = \overline{1, n}$ we introduce the operators $\bar{A}_i(t) = A(t) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$ and, replacing an operator $A(t)$ in the decomposition of operator-function $A(t; \varepsilon)$ by the operator $\bar{A}_i(t)$, we obtain the following «regularized operator-function»:

$$\bar{A}_i(t; \varepsilon) \equiv A(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}. \quad (1)$$

The following theorems are valid.

Theorem 1.2.1. Let the condition of the degeneration removal (see definition 1.1.7) hold. If $\lambda_i(\varepsilon)$ and $\varphi_i(\varepsilon)$, $\psi_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ are eigenvalues and corresponding eigenelements and defect functionals of the operator $A(t; \varepsilon)$, then for every $i = \overline{1, n}$ and sufficiently small ε , $\lambda_i(\varepsilon)$ is also an eigenvalue of the operator (1) with the corresponding eigenelement and defect functional

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{j \neq i} c_{is} \varphi_s, \quad \tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i + \sum_{j \neq i} d_{is} \psi_s. \quad (2)$$

Theorem 1.2.2. If $\dim N(A(\lambda_0)) = \dim N^*(A(\lambda_0)) = n$ and $\langle A_1 \varphi_{i0}, \psi_{i0} \rangle \neq 0$ for all $i = \overline{1, n}$, then for sufficiently small ε , there exist exactly n simple eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon)$ ($\lambda_i(0) = \lambda_0$) and corresponding eigenelements $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ and defect functionals $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$, analytical by ε .

The main result of the paragraph is the following.

Theorem 1.2.3. Let GJS, corresponding to the Fredholm eigenvalue λ_0 of a unperturbed operator, consist of GJC's with the finite length, moreover let N be its root number. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ and $L_{11} \neq 0$, then there exist N simple eigenvalues with the corresponding eigenelements representable in the form of series in powers of $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}, L_{0q_i} = 0, L_{11} \neq 0$, then there exists exactly N eigenvalues with the corresponding eigenelements, moreover n of them are presented in integer powers of ε , while the other $N-n$ ones are presented in powers of $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

§1.3 is devoted to perturbed Noether points of the discrete spectrum of the analytic operator-functions.

Let λ_0 be a Noether point of the discrete spectrum of the operator-function $A(t)$ with $N(A(\lambda_0)) = \{\varphi_{i0}\}_1^n, N^*(A(\lambda_0)) = \{\psi_{i0}\}_1^m, n > m$.

Introducing ideal elements $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ in the space E_2 ($\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$ in the space E_2^*) the initial operator-function is regularized:

$$\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}. \quad (2)$$

Theorem 1.3.1. An initial eigenvalue λ_0 is a Fredholm point of the discrete spectrum of the operator-function (2).

If the secondary regularization

$$\tilde{A}_i(t, \varepsilon) \equiv \bar{A}(t, \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

is made, that the following theorem holds.

Theorem 1.3.2. For every $i = \overline{1, m}$ and sufficiently small ε $\lambda_i(\varepsilon)$ is a simple eigenvalue of the operator (4) with the corresponding eigenelements $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon) = \varphi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} a_{is} \varphi_s(\varepsilon)$ and the defect functional $\tilde{\psi}_i(\varepsilon) = \psi_i(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} b_{is} \psi_s(\varepsilon)$.

The main theorem of this paragraph is the following.

Theorem 1.3.4. Let there exist be a GJCh, moreover $\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} A_k \varphi_{i0}^{p_i+1-k}, \psi_{i0} \right\rangle \neq 0$ for all $i = \overline{1, m}$. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ and $L_{11} \neq 0$, then there exist N simple eigenvalues with the corresponding eigenelements presented by the series in powers of $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. If $L_{0j} = 0, j = \overline{1, q_i-1}, L_{0q_i} = 0, L_{11} \neq 0$, then there exist exactly N eigenvalues with the corresponding eigenelements, m of which are presented in integer powers of ε , while the other $N-m$ ones are presented in powers of $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Remark 2. When $L_{0j} = 0, j = \overline{1, \infty}$ and $L_{11} = 0$, the Newton diagram method allows to determine all eigenvalues with corresponding eigenelements simultaneously by fractional degrees of ε in presentable series by the first nonzero coefficient $\{L_{1j}\}$.

As the appendix in § 4, the three examples are considered: perturbation of an eigenvalue of the differential Sturm-Liouville operator, of an eigenvalue of the Laplace operator for a perturbed square and an elliptic domain. Using results of § 2, all eigenvalues branching from a point $(\lambda_0, 0)$ and the corresponding eigenfunctions are determined.

In the beginning of XX century, E. Schmidt introduced a concept of s -numbers, i.e. eigenvalues λ of the operator $B: H \rightarrow H$ and eigenelements φ and ψ , satisfying to relations $B\varphi = \lambda\psi$, $B^*\psi = \lambda\varphi$ and allowing to generalize the Hilbert-Schmidt theory on not self-conjugate, completely continuous operators in an abstract separable Hilbert space H . Further, in works by B.V. Loginov and O.V. Makeeva, they were named E.Schmidt's eigenvalues. In those works, they offered a spectral decomposition of linear operators in Hilbert space by the Schmidt spectrum and noted that systems of a similar kind meet in the relativistic quantum Dirac theory and at research of some problems of electromagnetic processes.

In § 5 on the basis of results of § 2, perturbations of the Schmidt eigenvalues and the corresponding eigenelements are investigated in the model problem A . The branching equations for an eigenvalue are constructed and two theorems are proved that establish conditions for existence of branching eigenvalues and corresponding eigenelements and their dependence on the parameter ε .

Because of complexity of formulated problems, many problems on eigenvalues can be not solved analytically. Therefore approximate calculation methods are applied to solve these problems, which in turn stimulate development of the theory of numerical methods has been developed in this connection. A lot of various approximate methods have been worked out to find eigenvalues from elementary matrixes to the self-connected operators.

In the early sixties of the last century, M.K. Gavurin offered in his works a method for calculating eigenvalues and eigenvectors of linear self-adjoint operators based on ideas of the perturbations theory. He named it the method of pseudoperturbations. The idea of this method consists of constructing the operator D_0 such that known approximations to eigenvalues and eigenelements become exact for the perturbed operator. M.K. Gavurin's results were developed by F. Kunert for simple eigenvalues of the not self-conjugate operators. The method of pseudoperturbations has received the further development in works by B.V. Loginov, N.A. Sidorov, and D.G. Rahimov. Then the dissertant applied these results to find eigenvalues and eigenvectors of multiparameter spectral problems. At the beginning of this century, the method of pseudoperturbations has received got its new development in works by B.V. Loginov and O.V. Makeeva.

The results of Chapter 2 are in substance applications of the results of Chapter 1 to computing eigenvalues and corresponding eigenelements and root elements linearly dependent on the spectral parameter of operator-functions acting in Banach spaces.

In paragraph 2.1, it is considered specification of Fredholm points for the discrete spectrum of a sufficiently smooth with respect to the spectral parameter linear operator-function, the geometric multiplicity of which is greater than unity.

Let λ - be an isolated Fredholm point for a discrete spectrum of the linear operator-function $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$, which is sufficiently smooth with respect to t in a domain $G \subset C$, E_1, E_2 - be Banach spaces; $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_{i=1}^n$, moreover $k = \det\|\langle A'(\lambda)\varphi_i, \psi_i \rangle\| \neq 0$. Suppose that it is known sufficiently good approximations of φ_{i0}, ψ_{i0} and Λ to φ_i, ψ_i , $i=1,2,\dots,n$ and λ respectively: $\|\varphi_j - \varphi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_j - \psi_{j0}\| \leq \varepsilon$, $|\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$.

As an approximation of λ_0 we choose one of the solutions of the equation

$$F^0(t - \Lambda) \equiv f^0(t) \equiv \det\|\langle A(t)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| = 0.$$

Since ε is small, we get $k_0 = \det\|\langle A'(\lambda_0)\varphi_{i0}, \psi_{j0} \rangle\| \neq 0$. Therefore, biorthogonal systems of elements to $\{\varphi_{i0}\}, \{\psi_{i0}\}$ respectively, can be construct in the following way:

$$\gamma_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{i=1}^n K_{ij}^0 A^{*'}(\lambda_0) \psi_{i0}, \quad z_{j0} = \frac{1}{k_0} \sum_{s=1}^n K_{sj}^0 A'(\lambda_0) \varphi_{s0},$$

where K_{is}^0 - is the algebraic complement of the element $k_{is}^0 = \langle A'(\lambda_0)\varphi_{s0}, \psi_{i0} \rangle$. Since $k_0 \neq 0$, there exists a number i_0 , such that $k_{i_0 1}^0 = \langle A'(\lambda_0)\varphi_{i_0 0}, \psi_{10} \rangle \neq 0$.

Introduce the operator-function $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{j=2}^n \langle \cdot, \gamma_{j0} \rangle z_{j0}$.

Theorem 2.1.1. The exact eigenvalue λ of the operator $A(t)$ is a simple isolated Fredholm point of the discrete spectrum of the operator $\bar{A}(t)$, in addition the corresponding eigenvector and defect functional have the form

$$\tilde{\varphi} = \varphi_{10} + \sum_{s=2}^n c_s \varphi_{s0}, \quad \tilde{\psi} = \psi_{i_0 0} + \sum_{j \neq i_0}^n d_j \psi_{j0}.$$

Moreover, elements $\varphi_{10}, \psi_{i_0 0}$ are sufficiently good approximations of elements of $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\psi}$ respectively.

To clarify the eigenvalue λ we apply the method of pseudoperturbations in the one-dimensional version to the problem

$$\bar{A}(t)x = 0, \tag{3}$$

for this, as the initial approximation for λ^0 we choose a solution of the equation $f(t) \equiv \langle \bar{A}(t)\varphi_{10}, \psi_{i_0 0} \rangle = 0$.

Define elements

$$\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}^{*'}(\lambda^0) \psi_{i_0 0} \in E_1^*, \quad \tilde{z}_0 = \frac{1}{k_{i_0 0}} \bar{A}'(\lambda^0) \varphi_{10} \in E_2,$$

which are biorthogonal to φ_{10} and $\psi_{i_0 0}$ respectively.

The pseudoperturbation operator is constructed in the form

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \bar{A}(\lambda^0) \varphi_{10} + \langle x, \bar{A}^*(\lambda^0) \psi_{i_0 0} \rangle \tilde{z}_0.$$

Then $N(\bar{A}(\lambda^0) - D_0) = \{\varphi_{10}\}$, $N(\bar{A}^*(\lambda^0) - D_0^*) = \{\psi_{i_0 0}\}$.

Applying the Lyapunov-Schmidt method, we reduce equation (5) to the branching equation, the simple solution of which is the exact eigenvalue λ :

$$F(t) \equiv \left\langle (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda^0)) [I + \bar{\Gamma}_0 (D_0 + \bar{A}(t) - \bar{A}(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{i_0}, \psi_{i_0} \right\rangle = 0, \quad (4)$$

where $\bar{\Gamma}_0 = [\bar{A}(\lambda^0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Theorem 2.1.2. If the initial approximation is sufficiently good, there are numbers C, C_l, L_l and K such that for $h = C\varepsilon(|k_{i_0}| - C_l\varepsilon)^{-1}(1 + L_l)K < 1$ the unknown λ can be calculated by the Eitkein-Steffensen method from equation (4):

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^0, \quad (5)$$

where $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = \frac{(F(t') - F(t''))}{(t' - t'')}$.

Theorem 2.1.3. Eigenvectors $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, n$, corresponding to the eigenvalue λ of the operator $A(\lambda)$, are solutions of the equations

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, n}.$$

At the end of the paragraph, as an application, four examples are considered: eigenvalue problems of the matrix, the Sturm-Liouville problems, the Laplace operator for a perturbed square and an elliptical domain.

In paragraph 2.2, calculation of an eigenvalue with the chain is considered. The regularizing operator is constructed that reduces the algebraic multiplicity up to the unit, i.e. this operator turns the initial eigenvalue into a simple one for a regularized operator.

In paragraph 2.3, for an operator-function linear with respect to the spectral parameter, it is considered the case of a multiple eigenvalue with many finite chains.

Let E_l and E_2 - be Banach spaces, $A_0 : E_1 \supset D(A_0) \rightarrow E_2$, $A_1 : E_1 \supset D(A_1) \rightarrow E_2$, be the densely defined closed linear operators, moreover $D(A_0) \subset D(A_1)$ and A_l is subordinated to A_0 (i.e. $\|A_l x\|_{E_2} \leq \|A_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ on $D(A_0)$) or $D(A_1) \subset D(A_0)$ and A_0 is subordinated to A_l (i.e. $\|A_0 x\|_{E_2} \leq \|A_l x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ on $D(A_1)$).

Consider the eigenvalue problem

$$(A_0 - tA_1)x = 0. \quad (6)$$

Let $N(A_0 - \lambda A_1) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $N(A_0^* - \lambda A_1^*) = \text{span}\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, and the corresponding A_1 - and A_1^* - Jordan chains have the lengths $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$,

$$(A_0 - \lambda A_1)\varphi_i^{(s)} = A_1\varphi_i^{(s-1)}, \quad (A_0^* - \lambda A_1^*)\psi_i^{(s-1)} = A_1^*\psi_i^{(s-1)}, \quad s = \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

$$K = \det \left\| \langle A_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_j^{(1)} \rangle \right\| \neq 0, \quad L = \det L_{ij} \neq 0, \quad L_{il} = \left\| \langle A_1 \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k^{(l)} \rangle \right\|,$$

$$i(k) = \overline{1, n}, \quad j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}.$$

Assume that we know sufficiently good approximations $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}$ to the unknown eigenvalue λ and GJS: $\|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon$, $|\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$ with the corresponding values of K_0 and L_0 close to the unit.

We perform the regularization

$$\overline{A}(t) \equiv \overline{(A_0 - tA_1)} = A_0 - tA_1 + \sum_{k=2}^{p_1} \langle \cdot, \gamma_{i0}^{(k)} \rangle z_{i0}^{(p_1+1-k)} + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^{p_i} \langle \cdot, \gamma_{i0}^{(k)} \rangle z_{i0}^{(p_i+1-k)}. \quad (8)$$

Following theorem holds

Theorem 2.3.1. The unknown eigenvalue λ is a simple eigenvalue of the operator-function (8). Moreover, the eigenvector and defect functional of $\overline{A}(\lambda)$ are defined by the formulas

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1^{(p_1)} + \sum_{i=1}^n c_{i1} \varphi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{s=2}^{p_i} c_{is} \varphi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s} \varphi_1^{(s)}, \quad (9)$$

$$\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{i=2}^n d_{i1} \psi_i + \sum_{i=1}^n \sum_{s=2}^{p_i} d_{is} \psi_i^{(s)}. \quad (10)$$

As initial approximations for $\tilde{\varphi}$ and $\tilde{\psi}$ it should be taken $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{10}^{(p_1)} - \varphi_{10}^{(p_1-1)}$ and $\tilde{\psi}_0 = \psi_{10}$ respectively. As the initial approach to λ we choose the solution of the equation $\langle \overline{A}(t) \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 0$, i.e.

$$\lambda_0 = \frac{\langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle + 1}{\langle A_0 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle}.$$

Since $k_0 = \langle A_1 \tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_0^{(p)}, \tilde{\psi}_0 \rangle - \langle A_1 \varphi_0^{(p-1)}, \tilde{\psi}_0 \rangle = \langle A_1 \varphi_0^{(p)}, \tilde{\psi}_0 \rangle \neq 0$,

supposing $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{k_0} A_1^* \psi_0$, $\tilde{z}_0 = \frac{1}{k_0} A_1 \tilde{\varphi}_0$, we obtain $\langle \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 1$, $\langle \tilde{z}_0, \tilde{\psi}_0 \rangle = 1$.

The pseudoperturbed operator is constructed in the form of

$$D_0 x = \langle x, \tilde{\gamma}_0 \rangle \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0 + \langle x, \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0 \rangle \tilde{z}_0,$$

$$D_0^* y = \langle \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}, x \rangle \tilde{\gamma}_0 + \langle \tilde{z}_0, \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0 \rangle \overline{A}^*(\lambda_0) \psi_0.$$

Then $D_0 \tilde{\varphi}_0 = \overline{A}(\lambda_0) \tilde{\varphi}_0$, $D_0^* \tilde{\psi}_0 = \overline{A}^*(\lambda_0) \tilde{\psi}_0$, i.e. $N(\overline{A}(\lambda_0) - D_0) = \{\tilde{\varphi}_0\}$, $N(\overline{A}^*(\lambda_0) - D_0^*) = \{\tilde{\psi}_0\}$.

The exact eigenvalue λ is a simple solution of the branching equation

$$F(t) \equiv 1 - \left[I + \overline{\Gamma}_0 (D_0 + \overline{A}(t) - \overline{A}(\lambda_0)) \right]^{-1} \tilde{\varphi}_0, \tilde{\gamma}_0 \rangle = 0, \quad (11)$$

where $\overline{\Gamma}_0 = [\overline{A}(\lambda_0) - D_0 + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]^{-1}$.

Let $S(\lambda_0; \rho)$ be the ball with the radius ρ and the center λ_0 .

Theorem 2.3.2. If initial approximations are sufficiently good, then there exists the ball $S(\lambda_0; r)$, where $r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} \eta \leq \rho$, $h = |F'(\lambda_0)|^{-1} L |F(\lambda_0)| \leq \frac{1}{4}$, $\eta = |F'(\lambda_0)| |F(\lambda_0)|$, such that equation (11) has in it the unique solution $t = \lambda$. The iterations, defined by the Newton modified method:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - [F'(\lambda_0)]^{-1} F(\lambda_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

converge to this solution.

Note that if we realize iterative process (12), we should solve on the each step the operator equation

$$[\overline{A}(\lambda_m) + \langle \cdot, \tilde{\gamma}_0 \rangle \tilde{z}_0]x = \tilde{z}_0.$$

Theorem 2.3.3. The elements of GJS $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^p, \{\psi^{(i)}\}_{i=1}^p$ are the solutions of the following recurrent systems:

$$\begin{aligned} [A_0 - \lambda A_1 + \langle \cdot, \gamma_0 \rangle z_0]x &= z_0, \quad [A_0^* - \lambda A_1^* + \langle z_0, \cdot \rangle \gamma_0]y = \gamma_0, \\ [A_0 - \lambda A_1 + \langle \cdot, \gamma_0 \rangle z_0]x_s &= A_1 x_{s-1} + z_0, \quad x_1 = \varphi, \quad x_s = \varphi^{(s)}, \\ [A_0^* - \lambda A_1^* + \langle z_0, \cdot \rangle \gamma_0]y_s &= A_1^* y_{s-1} + \gamma_0, \quad y_1 = \psi, \quad y_s = \psi^{(s)}, \quad s = \overline{2, p}. \end{aligned}$$

In paragraph 2.3.2, the case of analytical operator functions is considered. Since it is impossible in this case to construct biorthogonal systems with certain properties, the analytical case is reduced by a linearization method to a linear one analyzed in paragraph 2.3.1.

At the end of the paragraph, it is given the method of finding eigenvalues and the corresponding elements of GJS based on the perturbation theory.

In paragraph 2.4, the Noether case of an eigenvalue is investigated.

Let $A(t)$ - be the operator-function sufficiently smooth with respect to $t \in G \subset C$ acting from a Banach space E_1 to a Banach space E_2 and let λ be a Noether point of the discrete spectrum with the GJS $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{p_i}}$. Analogously, let

$\{\psi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{m}}^{j=1, \overline{p_i}}$ be elements of the GJS for the operator $A^*(\lambda)$. For definiteness, we consider $n > m$ and suppose that the GJS $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1, \overline{n}}^{j=1, \overline{p_i}}$ is a m -complete system. Without any loss of generality, we can suppose $p_j > \max_{1 \leq i \leq m} p_i, j > m$. We suppose that some sufficiently good approximations $\Lambda, \varphi_{i0}^{(s)}, \psi_{i0}^{(s)}: \|\varphi_i^{(s)} - \varphi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, \|\psi^{(s)} - \psi_{i0}^{(s)}\| \leq \varepsilon, |\lambda - \Lambda| \leq \varepsilon$ при $i = \overline{m+1, n}, s \leq \max_{1 \leq j \leq m} p_j + 1$, при $i = \overline{1, m}, s = \overline{1, p_i}$.

Denote by $\{\gamma_{i0}\}_1^n$ and $\{z_{i0}\}_1^m$ the systems of vectors biorthogonal to $\{\varphi_{i0}\}_1^n$ and $\{\psi_{i0}\}_1^m$ respectively.

Expand the space E_2 (E_2^* respectively) on the subspace spanned on ideal elements $z_{m+1,0}, z_{m+2,0}, \dots, z_{n0}$ ($\psi_{m+1,0}, \psi_{m+2,0}, \dots, \psi_{n0}$ respectively) as it was made in § 1.3, Chapter 1.

Without any loss of generality, we can put $\langle A'(\lambda)\varphi_1, \psi_1 \rangle \neq 0$.

Construct the operator-function $\overline{A}(t) = A(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}$.

Lemma 2.4.1. The eigenvalue λ is a Fredholm point for the operator-function $\vec{A}(t)$ with the zero $\tilde{\varphi} = \varphi_1 + \sum_{k=2}^n c_k \varphi_k$ and defect functional

$$\tilde{\psi} = \psi_1 + \sum_{k=2}^n d_k \psi_k.$$

It is proved that φ_{10}, ψ_{10} are approximations for the zero $\tilde{\varphi}$ and defect functional $\tilde{\psi}$ of the operators $\vec{A}(\lambda)$ and $\vec{A}^*(\lambda)$.

By virtue of smallness of coefficients $\tilde{n}_k, d_k, k = \overline{2, n}, \tilde{k} = \langle \vec{A}'(\lambda) \tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \rangle \neq 0$.

Further, to refine the eigenvalue λ , the method of pseudoperturbations is applied to the problem $\vec{A}(t)x = 0$, for which we take as an initial approximation of λ_0 the solution of the equation $f(t) \equiv \langle \vec{A}(t) \varphi_{10}, \psi_{10} \rangle = 0$.

The branching equation, defined the unknown eigenvalue, has the form:

$$F(t) \equiv \left\langle (D_0 + \vec{A}(t) - \vec{A}(\lambda_0)) [I + \vec{\Gamma}_0 (D_0 + \vec{A}(t) - \vec{A}(\lambda_0))]^{-1} \varphi_{10}, \psi_{10} \right\rangle = 0. \quad (13)$$

Theorem 2.4.1. If the initial approximations are sufficiently good, there are numbers C, C_l, L_l and K such that for $h = C\varepsilon \left(|k_{i_0}| - C_l \varepsilon \right)^{-1} (1 + L_l) K < 1$ the unknown λ can be calculated from the equation (13) by the Eitkein-Steffensen method:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [F(\lambda^{(m)}, \Phi(\lambda^{(m)}))]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \lambda^{(0)} = \lambda^0,$$

where $\Phi(t) = t - F(t)$, $F(t', t'') = \frac{(F(t') - F(t''))}{(t' - t'')}$.

The eigenvectors $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2, \dots, \delta$, corresponding to an eigenvalue λ of the operator $A(\lambda)$ are defined as the solutions of the equations

$$\left[A(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0} \right] x = z_{j0}, \quad \left[A^*(\lambda) + \sum_{i=1}^n \langle z_{i0}, \cdot \rangle \gamma_{i0} \right] y = \gamma_{j0}, \quad j = \overline{1, \delta}.$$

For the operator-function $A(t) = B - tA$ in the case of the presence of the m -complete generalized Jordan set, the following regularization

$$\vec{A}(t) = A(t) + \sum_{i=m+1}^n \langle \cdot, \gamma_{i0} \rangle z_{i0}.$$

is carried out.

Lemma 2.4.2. The eigenvalue λ is a Fredholm point of the operator-function $\vec{A}(t)$ with zeros $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \sum_{k=m+1}^n c_{ik} \varphi_k$ and defect functionals

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i + \sum_{k=m+1}^n d_{ik} \psi_k, \quad i = \overline{1, m}.$$

Lemma 2.4.3. If $\{\tilde{\varphi}_i^{(j)}\}_{i=\overline{1, \delta}}^{j=\overline{1, p_i}}$ is the GJS of the operator-function $\vec{A}(\lambda)$ corresponding to the eigenvalue λ , then the approximations $\varphi_{i0}^{(s)}$ will be also approximations for $\tilde{\varphi}_{i0}^{(s)}$, $s = \overline{1, p_i}, i = \overline{1, m}$.

Applying further the technique of § 2.3, the unknown eigenvalue and the corresponding root elements are defined.

Paragraph 2.5 is devoted to finding the multiple eigenvalues and corresponding eigenelements of the model problem A . The case of a multiple eigenvalue is reduced with the help of regularization of the initial problem to the case of a simple eigenvalue. Then, by the method of pseudoperturbation, the unknown eigenvalue and corresponding root elements are refined.

Chapter 3 is completely devoted to questions of a multiparameter spectral problem. The concept of a joint range is introduced for the commutative set of linear operators through their algebra generated by these operators. As the joint range depends on the choice of an algebra, it is defined ambiguously. In paragraph 3.1, the Dash results are transferred to a non-commutative set of linear operator-functions. The essential sign of points of a regular set is established. It is proved that the joint spectrum (a joint discrete spectrum) is equal to the Cartesian product of the spectrums (discrete spectrums) of the operators belonging to this set. It is established that the joint zero subspace is the tensor product of the zero subspaces of its components. The concept of a joint limit spectrum is introduced, and interdependence between the joint spectrum and the joint limit spectrum. The concept of a joint numerical set is given, and the representation of a joint numerical set is proved through numerical sets of components of this set.

In paragraph 3.2, it is considered the multiparameter eigenvalue problems by F. Atkinson. The main definitions are given, the F. Rellich result is transferred to multiparameter eigenvalue problems. The G. A. Isaev result is generalized on the case of symmetric operator-functions. The known F. Atkinson results, obtained for finite-dimensional spaces, are generalized on the case of the Banach spaces. These results are a base for separation of a spectrum on the multiparameter problems on eigenvalues. Following to F. Atkinson, on the basis of the theory of the tensor product, the special operators $\Delta_r - \lambda_r \Delta_0$ are constructed which compose the family of the operators Δ separating the spectrum of multiparameter problems. It is proved that the joint resolvent set ρ of the family Δ enters into a resolvent set of a multiparameter problem. The F. Atkinson result on belonging of points of the discrete spectrum of a multiparameter problem to the joint discrete spectrum of the family Δ is generalized. It is proved the condition at which they coincide. The concept of a joint numerical domain is introduced, and it is proved that in the general case, the joint numerical domain of a multiparameter problem belongs to the joint numerical domain of the separating family of operators. It is also established that these two domains coincide at w -independence of the multiparameter problem. It is also proved that in certain conditions the limit spectrum of multiparameter problem is separated into eigenvalues.

Paragraph 3.3 is devoted to perturbations in the multiparameter spectral problems. Both the case of a simple eigenvalue, and the case of a multiple eigenvalue are investigated.

Let E_j, F_j , $j = \overline{1, n}$ be Banach spaces, and a linear operator-functions $T_j(t) \in L(E_j, F_j)$, $j = \overline{1, n}$ analytically with respect to t in a domain $G \subset C^n$. Let further, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ is an isolated Fredholm point for a discrete spectrum $\sigma_p(T)$

of the multiparameter eigenvalue problems $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, such that $\text{Ker}(T_j(\lambda^0)) = \{\varphi_{j10}, \dots, \varphi_{jn0}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda^0)) = \{\psi_{j10}, \dots, \psi_{jn0}\}$, $\{\gamma_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ and $\{z_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ is biorthogonal systems to $\{\varphi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ and $\{\psi_{ji0}\}_{i,j=1,1}^{n,n_j}$ respectively.

Following perturbed eigenvalue problems is considered

$$T_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

where $T_j(t; 0) = T_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, and $T_j(t; \varepsilon)$ be analytically with respect to the small complex parameter ε .

For every $j = \overline{1, n}$ we introduce the operators $\tilde{T}_{ji}(t; \varepsilon) = T_j(t; \varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \gamma_{ji0} \rangle z_{ji0}$.

Lemma 3.3.1. For sufficiently small ε and for every $i = 1, 2, \dots, n$ there exists constants c_{jis} , d_{jis} $j, s = 1, 2, \dots, n$, such that unknown eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon)$ appear simple Fredholm eigenvalue for the multiparameter probleme

$$\tilde{T}_j(t; \varepsilon)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (15)$$

Applying to (15) the Lyapunov-Schmidt method, branching equation for eigenvalue are constructed

$$L_j^{(i)}(\mu_i; \varepsilon) \equiv \sum_{s+|\alpha| \geq 1} L_{jas}^{(i)} \mu_i^\alpha \varepsilon^s = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

where $L_{jas}^{(i)} = \sum_{(\alpha, s) = (\alpha^{(0)}, s_0) + k_1(\alpha^{(1)}, s_1) + \dots + k_m(\alpha^{(m)}, s_m) + \dots} \langle T_{j\alpha^{(0)}s_0} (\Gamma_j T_{j\alpha^{(1)}s_1})^{k_1} \dots (\Gamma_j T_{j\alpha^{(m)}s_m})^{k_m} \dots \varphi_{ji0}, \psi_{ji0} \rangle = 0$.

Applying to (16) the Kronecker elimination method, their reduction to an one-dimensional equation. Further applying to an one-dimensional branching equation Newton diagram method, all eigenvalues and their orders of dependence on the perturbing parameter are determined.

At the end of the chapter, branching of the Noether eigenvalues is considered. Results of paragraph 1.3, Chapter 1 are transferred to the multiparameter problems by Atkinson. Both the case of a Noether point of the first kind, and the case of a Noether point of the second kind are considered.

In **Chapter 4**, results of the previous chapters are transferred to multiparameter eigenvalue problems. The cases of simple and multiple eigenvalues without the Jordan chains are considered there.

Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is an isolated Fredholm point for a discrete spectrum $\sigma_p(T)$ of the multiparameter eigenvalue problems $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, such that $\text{Ker}(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jn}\}$. Assume that knows sufficiently good approximations $\varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$, to $\varphi_{ji}, \psi_{ji}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$ respectively: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

As initial approximation $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$ it is possible to choose the decision following system

$$F_j(t - \Lambda) \equiv \det \left\| T_j(t) \varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{js}^{(0)} \right\| = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Biorthogonal systems of elements $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}$, $\{z_{ji}^{(0)}\}$ to $\{\varphi_{ji}^{(0)}\}$, $\{\psi_{ji}^{(0)}\}$ construct in the form

$$\gamma_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jsi}^0 \frac{\partial T_j^*(\lambda^0)}{\partial t_j} \psi_{js}^{(0)}, \quad z_{ji}^{(0)} = \frac{1}{k_{ii}^0} \sum_{s=1}^n K_{jis}^0 \frac{\partial T_j(\lambda^0)}{\partial t_j} \phi_{js}^{(0)}.$$

We perform the regularization

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i \neq s_0} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}.$$

Following theorem holds

Theorem 4.1. Unknown eigenvalue $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is a simple eigenvalue of the problem

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

which the corresponding eigenelement $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\varphi}_n$ and the defect functional $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\psi}_n$, where $\tilde{\varphi}_j = \varphi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} c_{ji} \varphi_{ji}$, $\tilde{\psi}_j = \psi_{js_0} + \sum_{i \neq s_0} d_{ji} \psi_{ji}$.

Branching equation for a problem (17) have the form

$$f_j(t) \equiv \left\langle (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0)) [I + \Gamma_{j0} (D_{j0} + T_j(t) - T_j(\lambda^0))]^{-1} \varphi_{js_0}^{(0)}, \psi_{js_0}^{(0)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (18)$$

For determed $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ to system (18) applied Newton method:

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - [\mathfrak{J}(\lambda^{(m)})]^{-1} F(\lambda^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

where $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $\mathfrak{J}(\lambda^{(m)}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j} \right) (\lambda^{(m)})$.

After it is found $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ the corresponding eigenelements are determined from the following linear equations

$$\left[T_j(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)} \right] x_j = z_{jk}^{(0)}, \quad \left[T_j^*(\lambda) + \sum_{i=1}^{n_j} \langle z_{ji}^{(0)}, \cdot \rangle \gamma_{ji}^{(0)} \right] y_j = \gamma_{jk}^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Regularization Noether points of a discrete spectrum it is devoted §4.2.

Let $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is an isolated Noether point for a discrete spectrum $\sigma_p(T)$ of the multiparameter eigenvalue problems $T_j(t)x_j = 0$, $j = \overline{1, n}$, such that $\text{Ker}(T_j(\lambda)) = \{\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn_j}\}$, $\text{Ker}(T_j^*(\lambda)) = \{\psi_{j1}, \dots, \psi_{jm_j}\}$, for definiteness assume $n_j > m_j$ for all i , i.e. λ is a Noether point first kind.

Let knows sufficiently good approximations $\varphi_{ji}^{(0)}, \psi_{ji}^{(0)}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$, to $\varphi_{ji}, \psi_{ji}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, n}$ respectively: $\|\varphi_{ji} - \varphi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\psi_{ji} - \psi_{ji}^{(0)}\| \leq \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leq \varepsilon$.

Expand the spaces F_i^* on the subspace spanned on ideal elements

$\psi_{i, m_i+1}^{(0)}, \psi_{i, m_i+2}^{(0)}, \dots, \psi_{i, n_i}^{(0)}$, $i = \overline{1, n}$, we assume that $k_{ij} = \det \left\| \frac{\partial T_i(\lambda)}{\partial t_j} \varphi_{ij}^{(0)}, \psi_{ij}^{(0)} \right\| \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$.

Constructed biorthogonal systems $\{\gamma_{ji}^{(0)}\}$, $\{z_{ji}^{(0)}\}$ we perform the regularization

$$\bar{T}_j(t) = T_j(t) + \sum_{i=m_j+1}^{n_j} \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Theorem 4.2. The exact eigenvalue $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is a isolated Fredholm eigenvalue of the problem

$$\bar{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

We perform the second regularization $\bar{\bar{T}}_j(t) = \bar{T}_j(t) + \sum_{i=2}^n \langle \cdot, \gamma_{ji}^{(0)} \rangle z_{ji}^{(0)}$ it is proved that $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is a simple eigenvalue of the problem

$$\bar{\bar{T}}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Further applying to (19) the Lyapunov-Schmidt method, branching equation for eigenvalue are constructed, from which further for Newton method calculated unknown eigenvalue $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Remark. If $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ be Noether point second kind, i.e. $n_j > m_j$ for all $j = \overline{1, k}$ and $n_j < m_j$ for $j = \overline{k+1, n}$, then we assume $\tilde{T}_j(t) = T_j(t)$, for $j = \overline{1, k}$ and $\tilde{T}_j(t) = T_j^*(t)$, for $j = \overline{k+1, n}$, we come to a conclusion that $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is a Noether point first kind for the problem $\tilde{T}_j(t)x_j = 0, \quad j = \overline{1, n}$.

At the end of the chapter to illustrate obtained results, the computing experiment is carried out for the differential operator of the second order with a shift in boundary conditions

$$\begin{aligned} \text{A. } & \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad u_1(x_0) = u_1(1), \\ & \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(x_0) = u_2(1), \\ \text{B. } & \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + (3\lambda_1 + 2\lambda_2)u_1(x_1) = 0, \quad u_1(0) = u_1(1), \quad u_1'(0) = u_1'(1), \\ & \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + (2\lambda_1 - 3\lambda_2)u_2(x_2) = 0, \quad u_2(0) = u_2(1), \quad u_2'(0) = u_2'(1). \end{aligned}$$

The experiment is realized by means of the software package Maple 11. As a result, numerical approximations are calculated.

CONCLUSION

In the dissertation, regularizations of given analytical operator-functions are considered to determine their multiple Fredholm and Noether eigenvalues and the corresponding eigenelements both for the one-parameter, and multiparameter spectral problems. These methods in combination with the method of pseudoperturbations are applied to refine approximately given eigenvalues and the corresponding root elements.

All main results of the work are new. The obtained results allow to make the following conclusions:

1) In the case where a Fredholm operator, consisting of GJC's of a finite length, has the incomplete GJS set, the analytically perturbed linear equation has a solution of the form

$$y(\varepsilon) = y_n(\varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j \left[\xi \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_n + \left(I - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma A_k \right)^{-1} \varphi_j \right].$$

2) Since for an incomplete GJS, to apply the method of the Newton diagram for the branching equation of eigenvalue, it will be necessary the additional labor-consuming calculations, the regularization is carried out for such cases allowed to reduce a multiple eigenvalue with the root number N to a simple one for the regularized operator. It is proved that the perturbed operator-function has exactly N eigenvalues. The orders of dependence of these eigenvalues and the corresponding eigenelements on the perturbation parameter are established.

3) In the case of Noether points of a discrete spectrum it is practically impossible to construct the branching equation of an eigenvalue in the perturbation problems of eigenvalues. In the dissertation, introducing ideal elements in the space $\hat{A}_2$ (in the space $\hat{A}_2^*$ respectively), the regularization is realized, as a result of that a Noether eigenvalue becomes a Fredholm one for the regularized operator. Applying the Lyapunov-Schmidt method and the method of the Newton diagram, it is proved that the regularized operator-function and, hence, also the initial operator-function have exactly N eigenvalues represented with the convergent series in integer and fractional powers of ε .

4) It is considered the perturbed eigenvalue problem by E.Schmidt. Applying the regularization method, it is proved that there are N eigenvalues continuous by ε presented with the convergent series in integer and fractional powers of ε .

5) The regularization method in combination with the pseudoperturbation method is applied to approximate calculating multiple eigenvalues both in the one-parameter, and in multiparameter spectral problems. While these methods in cases of the incomplete GJS did not allow to construct iterative processes for determination of eigenvalues, and for multiple eigenvalues with the complete GJS it was necessary immense calculations, the regularization method reduces these calculations in 2^n times.

6) An algorithm for calculating multiple eigenvalues of analytical operator-functions is constructed by the linearization method.

7) Using combination of regularization methods and pseudoperturbations methods, iterative processes were first constructed for refinement of the Noether eigenvalues.

8) Eigenvalues of the Laplace operator are defined by the regularization method for a perturbed square and an elliptic area.

The author expresses his gratitude to Academician Shavkat Arifdzhanovich Alimov for useful consultations, to Rusak Yuriy Borisovich for valuable discussions which very much helped in clarifying some of the facts, and especially to Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences Boris Vladimirovich Loginov for ongoing consultations, support and statement of some problems.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; 1 part)

1. Л о г и н о в Б.В., Р а х и м о в Д.Г. Вопросы регуляризации в задачах на собственные значения. - Ташкент: Iqtisod-moliya, 2008, - 132 с.

2. Л о г и н о в Б.В., Р а х и м о в Д.Г. О связи дифференциальных уравнений с вырождением и теории возмущений // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1981, - том.17, № 11, - С. 2090-2093.

3. Л о г и н о в Б.В., Р а х и м о в Д.Г. О методе ложных возмущений // Spectral theory Banach center publications. - Warsaw, 1982, - vol. 8. - pp. 337-341.

4. Р а х и м о в Д. Г., Р у с а к Ю.Б. О некоторых специальных случаях применения метода ложных возмущений // Дифференциальные уравнения. - Минск, 1983, - том.19, № 10, - С. 1813-1815.

5. Р а х и м о в Д. Г. О совместном спектре некоммутативного набора оператор-функций нескольких параметров // Вестник ТашГТУ. - Ташкент, 1995. - № 1-2. - С. 13-20.

6. L o g i n o v B.V., R a k h i m o v D.G., S i d o r o v N.A. Development of M. K. Gavurin's Pseudoperturbation Method // American Mathematical Society, Fields Institute Communications. - USA, 2000. - vol.25. - pp. 367-381.

7. Р а х и м о в Д. Г., М а к е е в а О.В. О методе ложных возмущений для аппроксимирующей оператор-функции в задачах на собственные значения // Вестник УлГТУ. - Ульяновск, 2005. - № 2. - С. 17-19.

8. Р а х и м о в Д. Г. Регуляризация задач на собственные значения линейной оператор-функции в случае присутствия обобщенных жордановых цепочек // Узб.мат.жур. - Ташкент, 2006. - № 1 - С. 86-91.

9. Р а х и м о в Д. Г. Регуляризация задач на собственные значения нелинейной относительно спектрального параметра оператор-функции методом линеаризации // Узб. мат. жур. - Ташкент, 2009. - № 3. - С. 163-170.

10. Р а х и м о в Д. Г. О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений // Журнал Средневолжского Математического Общества. - Саранск, 2010. - № 3. - С. 106-112.

11. Р а х и м о в Д. Г. О регуляризации в многопараметрических задачах на собственные значения. // Дифференциальные уравнения. - Минск, 2011. - том 47, № 9. - С. 1359-1363.

12. Р а х и м о в Д. Г. О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений // Вестник Самарского Государственного Университета, Естественная серия. - Самара (Россия), 2012. - № 6(97). - С. 35-41.

13. Р а х и м о в Д. Г. О вычислении кратных собственных значений линейных оператор-функций спектрального параметра методом ложных возмущений // Узб. мат. жур. - Ташкент, 2012. - № 4. - С. 66-74.

14. Р а х и м о в Д. Г. О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений// Узб. мат. жур. - Ташкент, 2013. - № 3. - С. 80-88.

15. R a k h i m o v D. G. On calculation multiple eigenvalue of the linear operator-function by reduction pseudoperturbation methods // IIUM, Engineering Journal. - Malaysia, 2013. - vol 14, № 2. - pp. 183-190.

16. L o g i n o v B. V., R a k h i m o v D. G. On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries. // ROMAI Journal. - 2013, - vol.9, № 2, - pp. 129-141.

17. Р а х и м о в Д. Г. О возмущениях в спектре Э.Шмидта линейных операторов в гильбертовых пространствах // Журнал Средневолжского Математического Общества. – Саранск, 2013, - том 15, № 3, - С. 126-132.

И б ў л и м (II часть; II part)

18. Р а х и м о в Д. Г., Р у с а к Ю.Б. О методе ложных возмущений для нетеровых оператор-функций// Сб. "Дифференциальные уравнения и вопросы теории ветвления". - Ташкент, 1982. - С. 92-96.

19. Р а х и м о в Д. Г. Применение метода ложных возмущений в многопараметрических спектральных задачах // Сб."Неклассические задачи математической физики". - Ташкент, 1985. - С. 215-225.

20. Р а х и м о в Д. Г. О разделении спектра и числовой области системы линейных операторов // Сб."Аналитические методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения". - Ташкент, 1995. - С. 16-32.

21. Р а х и м о в Д. Г. О методе М.К.Гавурина для многопараметрических спектральных задач // Сб. науч. тр. 16-международной научной конференции "Математические методы в технике и технологиях". - С.-Петерб., 2003. – том 1. - С. 39-41.

22. Р а х и м о в Д. Г. О регуляризации задач на собственные значения с применением метода ложных возмущений // Сб. науч.тр. 17-международной научной конференции "Математические методы в технике и технологиях". - Кострома, 2004. – том 1. - С. 39-41.

23. Р а х и м о в Д. Г. О выпуклости совместной максимальной числовой области семейства операторов // Тезисы докладов международной научной конференции "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа", 23-25 ноября 1993. - Ташкент, 1993. - С. 147.

24. Р а х и м о в Д. Г. Регуляризация задач на собственные значения линейной оператор-функции // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики", 16-19 ноября 2004. - Ташкент, 2004. – том 1. - С. 159-160.

25. Р а х и м о в Д. Г., М у с а е в а Х. И. Регуляризация задач на собственные значения линейных оператор-функций в случае присутствия обобщенных жордановых цепочек // Труды международной научной

конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий". - Ташкент, 2005. - том 1. - С. 149-151.

26. Р а х и м о в Д. Г. О методе М.К.Гавурина для многопараметрических спектральных задач // Тезисы меж. науч. конф. "Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических исследований ", 20-22 сентября 2006. - Алматы, 2006. - С. 86-87.

27. Р а х и м о в Д. Г. Регуляризация задач на собственные значения в многопараметрических спектральных задач // Тезисы меж. науч. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвящ. 100-летию рожд-я акад. И.П.Векуа, 28 мая - 2 июня 2007 г.- Новосибирск, 2007. - С. 135-136.

28. R a k h i m o v D. G. On calculation multiple eigenvalue of the linear operator-function by reduction pseudoperturbation methods // Abstracts of the international conference "Problems of modern topology and applications", 20-24 may, 2013. - Tashkent, 2013. - pp. 72-74.

29. Л о г и н о в Б.В., Р а х и м о в Д.Г. О собственных значениях оператора Лапласа для эллиптической области // Труды конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений", 21-23 ноября 2013 г. - Ташкент, 2013. - С. 238-240.

30. I o n A., L o g i n o v B. V., R a k h i m o v D. G. On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries // Books of Abstracts of the CAIM 2013, 20th-23th September, 2013. - Bucharest (Romania). - pp. 10-11.

Автореферат «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (19.11.2014 йил)

Босишга рухсат этилди: 24.11.2014
Ҳажми: 4,5. Адади: 100. Буюртма: № 60
“Top Image Media” босмахонасида босилди.
Тошкент шаҳри, Я.Ғуломов кўчаси, 74-уй.

