

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 681.03

ХОЛМУРОДОВ АБДУЛХАМИД ЭРКИНОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЮЩИХСЯ ОДНОМЕРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
SH ВОЛН

05.13.18- Теоретические основы математического моделирования

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент-2011

Работа выполнена в Каршинском государственном университете

Научный руководитель

доктор физико-математических наук
**Имомназаров Холматжон
Худайназарович**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук
Нормуродов Чори

кандидат физико-математических наук
Нуралиев Фахриддин Муродуллаевич

Ведущая организация

Самаркандский государственный
университет

Защита диссертации состоится «__»_____2012 г. в ____ часов на заседании специализированного совета Д. 015.17.02 Института математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «__»_____2011 г.

Ученый секретарь
специализированного совета

Исмоилов М. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Землетрясения являются, безусловно, наиболее грозным стихийным бедствием, в то же время позволяющим получить уникальную информацию как о глубинных процессах, протекающих в земных недрах, так и о внутреннем строении среды на пути распространения сейсмических волн от очага землетрясения до регистрирующих приборов. Именно на основе обработки и анализа этой информации составляются модели скоростного строения твердых оболочек Земли, разрабатываются и проверяются различные модели строения среды и модели очага землетрясения. Конечно же, задача определения параметров вмещающей среды в области между очагом землетрясения и поверхностной системой регистрации и задача восстановления параметров очага землетрясения в полной динамической постановке тесно связаны, а наиболее замкнутой и полной является совместная постановка – определение скоростного строения и параметров очагов по серии наблюдений за различными геофизическими полями в разных областях.

Однако эта постановка на сегодняшний день представляется чрезвычайно сложной, причем не, только математически, но и физически (один из вопросов – выбор механической модели формирования очага, удовлетворительно объясняющей для данного региона основные особенности проявления сейсмической активности и математическое ее описание). Поэтому в данной работе основное внимание уделяется восстановлению строения среды и кинетических параметров насыщенной жидкостью упруго-пористой среды.

В математической физике обычно рассматриваются задачи следующего вида: задается дифференциальное уравнение и некоторые дополнительные условия (начальные и краевые) которым должно удовлетворять решение дифференциального уравнения. Как правило, эти дополнительные условия выделяют из всей совокупности решений дифференциального уравнения одно решение. Принято корректные начально-краевые задачи математической физики называть прямыми задачами.

Постановка каждой прямой задачи предполагает задание некоторого числа функций. Часть этих функций определяет дифференциальное уравнение (например, коэффициенты линейного уравнения), другая часть – начальные или краевые условия. В результате решения прямой задачи заданному набору функций ставится в соответствие новая функция – решение краевой задачи. Тем самым строится некоторый оператор, определенный на данных прямой задачи. Представим теперь, что некоторые из тех функций, которые принято задавать в прямой задаче, неизвестны (и именно их отыскание и представляет основной интерес), а вместо них дана некоторая дополнительная информация о решении прямой задачи. Подобные задачи называются обратной задачей математической физики.

В динамических обратных задачах для упруго-пористых сред кроме скорости распространения волн и плотности дополнительно можно определить пористость, проницаемость и другие кинетические параметры среды, которые определяют затухание энергии, в отличие от обратных динамических задач для упругих сплошных сред.

Исследование волновых процессов и явлений в самых разнообразных средах и системах, в свою очередь, стимулировали развитие аналитических, прежде всего приближенных и численных методов, реализуемых на ЭВМ. С учетом этого правильное математическое моделирование и изучение корректности постановки прямых и обратных задач распространения SH волн в упруго-пористых средах, а также разработка эффективных вычислительных алгоритмов расчета таких задач представляет как теоретический, так и практический интерес. Поэтому эти исследования являются весьма актуальными.

Степень изученности проблемы. В динамических обратных задачах для гиперболических уравнений в качестве дополнительной информации задается след решения соответствующей задачи на некоторой, как правило, времени-подобной поверхности. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы М.М. Лаврентьевым, В.Г. Романовым, А.С. Благовещенским и А.С. Алексеевым. Различные подходы и методы исследования обратных динамических задач для гиперболических уравнений и систем предложены и развиты в работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, А.С. Благовещенского, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконова, А.Л. Бухгейма, Ю.Л. Гапоненко, Б.С. Парийского, Д.Г. Орловского, А.Л. Иванкова, А.В. Баева, Б.А. Бубнова, Х.Х. Имомназарова, А. Хайдарова, Д.К. Дурдиева и др. Из перечисленных выше работ отметим работы В.Г. Романова и А.С. Благовещенского, которые в своей постановке наиболее близки к диссертационной работе. Там рассматривается одномерная обратная задача для волнового уравнения об определении распределения скорости для вертикально-неоднородной изотропно-упругой модели среды по некоторой дополнительной информации о волновом поле на свободной поверхности. Для решения этой задачи доказана теорема о разрешимости и непрерывной зависимости от входных данных.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР.

Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ проекта РАН 16.12 «Развитие концепции и технологических принципов междисциплинарного прогноза землетрясений на основе модели сейсмических процессов в упруго-пористой флюидонасыщенной среде» и гранта РФФИ 06-05-65110 «Математическое моделирование распространения нелинейных волн в проводящих флюидонасыщенных пористых средах», где соискатель участвовал в реализации тем проектов.

Цель исследования: целью настоящей диссертационной работы является математическое моделирование динамических процессов распространения SH волн, в рамках которого строятся математические

модели, изучение характера решений, исследование разрешимости и единственности получающихся при этом прямых и обратных задач, разработка численных методов решения задач и соответствующих программ.

Задачи исследования:

1. вывод математической модели распространения SH волн в упруго-пористых средах;
2. построение сингулярных решений уравнения SH волн в упруго-пористых средах;
3. получение систем нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористых средах;
4. доказательство теоремы единственности и в «малом» теоремы существования решения рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;
5. разработка вычислительных методов расчета прямой и обратной задач распространения SH волн в упруго-пористых средах.
6. создание программы для проведения вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является волны в пористой среде со сложной реологией. Предметом исследования является математическое моделирование динамических процессов распространения SH волн, а также исследование полученных при этом прямых и обратных задач.

Методы исследования. Исследовании динамических процессов использованы методы математического моделирования, метод характеристик для гиперболических систем, метод интегральных уравнений, конечно-разностные методы, метод сопряженных градиентов, а также технология программирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

- математические модели для волновых процессов в упруго-пористых средах;
- построенное сингулярное решение прямой динамической задачи для уравнения SH волн в упруго-пористой среде;
- полученная система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористой среде;
- теорема единственности и в «малом» теоремы существования рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;
- численный метод интегрирования вдоль характеристик, который эффективно вычисляет профиль коэффициента Ламе (как функция глубины) по заданному сигналу, измеренному на поверхности с произвольной исходной зондирующей функцией;

–вычислительный метод расчета прямых и обратных задач распространения SH волн в упруго-пористых средах на основе конечно-разностного метода и метода интегрирования вдоль характеристик, а также метода сопряженных градиентов;

–программа для реализации численных методов решения прямой и обратных задач.

Научная новизна:

–выведена математическая модель распространения SH волн в упруго-пористых средах;

–построены сингулярные решения уравнения SH волн в упруго-пористых средах;

–получена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористых средах;

–доказана теорема единственности и в «малом» существования решения рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;

–разработаны эффективный вычислительный алгоритм и программное обеспечение для прямой и обратной задач распространения SH волн в упруго-пористых средах.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Полученные результаты могут найти применение при исследований широкого класса различных природных и технологических процессов. В частности, эти результаты могут быть применены для дальнейшего исследования обратных задач для волновых процессов.

Реализация результатов. Результаты исследований могут быть использованы в сейсмологии, при разработке нефтяных и газовых месторождений и чтении специальных курсов лекций по предмету математического моделирования для старших курсов бакалавриатуры и магистратуры.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы доложены на: XLII международной Новосибирской научной студенческой конференции (Новосибирск, 2004), V-международной Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения» (Фергана, 2005), IX Международном семинаре по акустике неоднородных сред (Новосибирск, 2006), Международной Конференции «Математические методы в геофизике» (Новосибирск, 2008), Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики» (Карши, 2011), Международной конференции «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения» (Красноярск, 2011).

Опубликованность результатов. По теме диссертационной работы опубликовано 6 научных статей и тезисов докладов, из них 3-журнальные статьи.

Структура и объем диссертации. Диссертация, объем которой составляет 100 страниц, состоит из введения, трех глав, заключения, включая 42 рисунка, списка использованной литературы из 60 наименований и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследования и дана общая характеристика работы.

В первой главе в первых двух параграфах строятся нелинейные и линейные математические модели движения насыщенных жидкостью пористых сред. В третьем параграфе приводится постановка и решение одномерной *прямой* задачи для SH волн в упруго-пористой среде:

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \quad (1)$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \quad (2)$$

где $U = u_y(z, t)$ и $V = v_y(z, t)$ – компоненты скорости смещений частиц по оси y упругого пористого тела и жидкости с парциальными плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно, $\chi(z)$ – коэффициент трения. Ось z направлена вертикально вниз, среда заполняет полупространство $z > 0$.

Начальные условия (среда покоится при $t < 0$):

$$U|_{t<0} = 0, \quad U_t|_{t<0} = 0; \quad (3)$$

$$V|_{t<0} = 0, \quad V_t|_{t<0} = 0 \quad (4)$$

На границе $z = 0$ приложена сила с импульсом:

$$\mu U_z|_{z=0} = F(t), \quad (5)$$

где

$$F(t) = \delta(t) + f(0)\varepsilon(t) + \dots, \quad (6)$$

$\delta(t)$ – дельта функция Дирака, $\varepsilon(t)$ – функция Хевисайда.

Требуется по этой информации и заданным функциям – непрерывно дифференцируемым $\rho_s(z)$ и $\mu(z)$, непрерывным $\rho_l(z), \chi(z)$ – определить волновые поля $U(t, z), V(t, z)$.

Решение этой задаче (1)-(6) ищется в виде разложений:

$$U(t, z) = \alpha^s(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^s(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^s(z)(t - \tau(z))_+^2 + \dots \quad (7)$$

$$V(t, z) = \alpha^l(z)\varepsilon(t - \tau(z)) + \beta^l(z)(t - \tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^l(z)(t - \tau(z))_+^2 + \dots, \quad (8)$$

где коэффициенты $\alpha^s(z), \beta^s(z), \dots, \alpha^l(z), \beta^l(z), \dots$ и $\tau(z)$ – пока неизвестные функции. Считаем, что $\tau(0) = 0$.

В формулах (7) и (8) многоточием обозначены более гладкие по сравнению с выписанным слагаемые при $t = \tau(z)$, а

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Неизвестные функции $\tau(z), \alpha^l(z), \beta^l(z), \alpha^s(z), \beta^s(z)$, находятся однозначно.

Таким образом, в этом параграфе получено сингулярное решение для одномерного уравнения SH волн в упруго-пористой среде с учетом потери энергии на межкомпонентное трение.

В четвертом параграфе задача (1)-(6) сводится к задаче для гиперболической системы.

Введем вместо z координату x :

$$x = \int_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)}, \quad (9)$$

где $c_t(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ - скорость SH волн в упруго-пористой среде. Положим

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_1 = \sqrt{\sigma} (U_t - U_x), \\ \tilde{\Psi}_2 = \sqrt{\sigma} (U_t + U_x), \\ \Phi = V_t \end{cases} \quad (10)$$

где $\sigma = \sigma(z) = \sqrt{\mu(z)\rho_s(z)}$.

Уравнения (1),(2) преобразуются к виду

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} & -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} + q \\ -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} - q & -\frac{\chi \rho_l^2}{2 \rho_s} \end{pmatrix} \Psi + \chi \sqrt{\sigma} \frac{\rho_l^2}{\rho_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Phi, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\chi}{2\sqrt{\sigma}} \rho_l (\Psi_1 + \Psi_2) - \chi \rho_l \Phi, \quad (12)$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad q(x) = \frac{\sigma'_x}{2\sigma}.$$

Начальные условия примут вид

$$\Psi|_{t<0} = 0, \quad (13)$$

$$\Phi|_{t<0} = 0 \quad (14)$$

Граничные условия (5) и (6) переписываются в виде

$$\Psi|_{x=0} = s(t). \quad (15)$$

В формуле (15)

$$s(t) = (s_1(t), s_2(t)) = \left(\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) - \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t), \sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) + \frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}} F(t) \right),$$

где через $G(t)$ обозначено значение функции U при $z=0$: $U(z, t)|_{z=0} = G(t)$, а точка над переменной означает производную по времени.

Положим для решения задачи (11)-(15)

$$\Psi(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} \psi_1(t, x) \\ \psi_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\Phi(t, x) = \psi_3(t, x), \quad (17)$$

$$\Psi_1(t, 0) = \alpha \Psi_2(t, 0) + M(t), \quad (18)$$

где ψ_i ($i=1, 2, 3$) – непрерывные при $t \geq x$ функции, имеющие, возможно, разрывы при $t = x$ и $\text{supp } \psi_i(t, x) \subseteq \{t, x : t \geq x\}$, $\alpha = \text{const}$, $M(t)$ -заданная функция вида

$$M(t) = \delta(t) + m(t).$$

Условие (18) предполагает связь между функциями $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в (1.4.14), т.е. между $F(t)$ и $G(t)$:

$$\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) - \frac{F(t)}{\sqrt{\sigma(0)}} = \alpha \left(\sqrt{\sigma(0)} \dot{G}(t) + \frac{F(t)}{\sqrt{\sigma(0)}} \right) + M(t).$$

Решение прямой задачи (11)-(15) ищем в виде (16), (17). Ясно, что решение рассматриваемой задачи ниже характеристики $t = x$ равно нулю:

$$\Psi(t, x) \Big|_{t < x} \equiv 0,$$

$$\Phi(t, x) \Big|_{t < x} \equiv 0$$

Для точек (t, x) выше характеристики $t = x$ ($t > x$) путем интегрирования уравнений (11), (12) вдоль характеристик получим замкнутую систему линейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода относительно ψ_i ($i=1, 2, 3$). Такая система всегда разрешима и решение единственно.

В пятом параграфе данной главы для достаточно гладких функций $\sigma(x), m(t), \chi(t), \rho_l(x), \rho_s(x)$ решение системы (11), (12), удовлетворяющее граничному условию (18), построено в виде сингулярного разложения

$$\Psi(t, x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t-x) + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix} \mathcal{E}(t-x) + \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} (t-x)_+ + \dots, \quad (19)$$

$$\Phi(t, x) = d_1(x) \mathcal{E}(t-x) + d_2(x) (t-x)_+ + \dots, \quad (20)$$

Коэффициенты $a(x), b_1(x), b_2(x), c_1(x), c_2(x), d_1(x), d_2(x)$ найдены однозначно.

В шестом параграфе строится численный метод решения рассматриваемой задачи. Введя неизвестные функции

$$w = U_t, p = -\sigma(x)U_x, r = V_t,$$

из уравнения (1) получаем

$$(p + \sigma w)_x + (p + \sigma w)_t = \sigma' w - \sigma(x)q(x)(w - r) \quad (21)$$

$$(p - \sigma w)_x - (p - \sigma w)_t = -\sigma' w - \sigma(x)q(x)(w - r) \quad (22)$$

где $\sigma'(x)$ - производная $\sigma(x)$.

Уравнения (21), (22) можно также записать в интегральной форме. Для этого

(21) проинтегрируем вдоль характеристики $\frac{dt}{dx} = 1$ от $(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})$ до (x, t)

(см. рис.1).

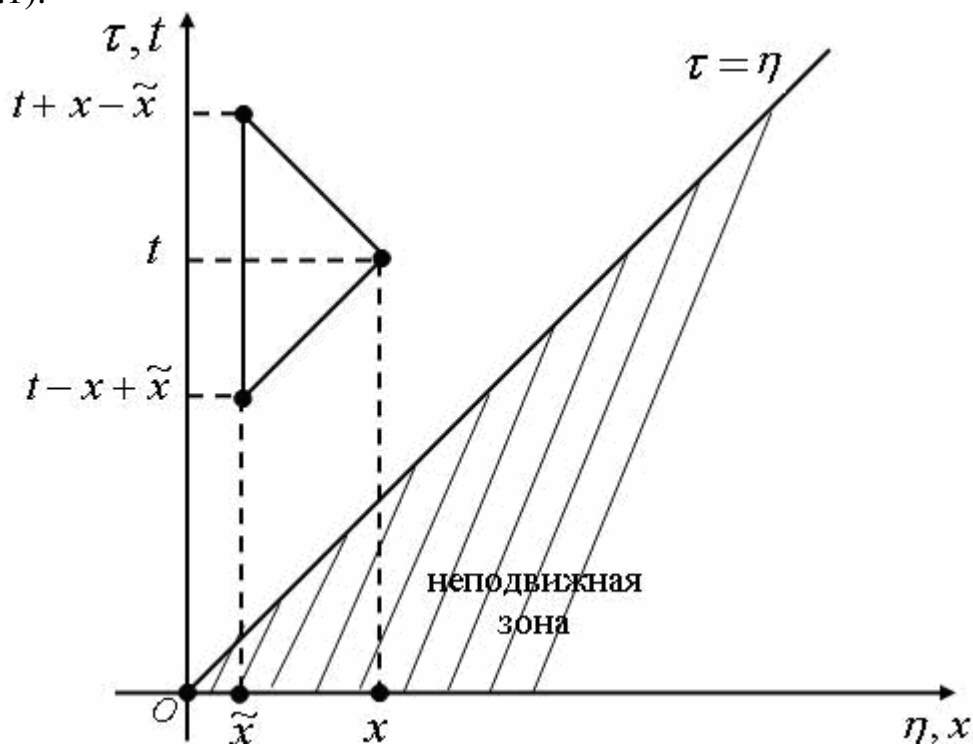


Рис. 1. Характеристики, проходящие через точку $(x; t)$.

Тогда получим соотношение

$$\begin{aligned} p(x, t) + \sigma(x)w(x, t) - [p(\tilde{x}, t - x + \tilde{x}) + \sigma(\tilde{x})w(\tilde{x}, t - x + \tilde{x})] = \\ = \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t - x + s) - \sigma(s)q(s)(w(s, t - x + s) - r(s, t - x + s))] ds \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично, проинтегрировав уравнение (22) вдоль характеристики $\frac{dt}{dx} = -1$ от $(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})$ до (x, t) (см. рис.1), получаем второе соотношение:

$$\begin{aligned} p(x, t) - \sigma(x)w(x, t) - [p(\tilde{x}, t + x - \tilde{x}) - \sigma(\tilde{x})w(\tilde{x}, t + x - \tilde{x})] = \\ = -\int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t + x - s) + \sigma(s)q(s)(w(s, t + x - s) - r(s, t + x - s))] ds \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (23) и (24) уже подходят для численного моделирования. Полагая $h = x - \tilde{x}$, $h > 0$ достаточно мало, аппроксимируя производную $\sigma'(s)$ под интегралом выражением

$$\sigma'(s) \approx \frac{\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})}{h}, \quad (25)$$

а интеграл – по методу трапеций, получим приближенные формулы:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t-x+s) - \sigma(s)q(s)(w(s, t-x+s) - r(s, t-x+s))] ds \approx \\ & \approx \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t-x+\tilde{x})] - \\ & - \frac{h}{2} [\sigma(x)q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x})q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t-x+\tilde{x}) - r(\tilde{x}, t-x+\tilde{x}))], \quad (26) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{x}}^x [\sigma'(s)w(s, t+x-s) + \sigma(s)q(s)(w(s, t+x-s) - r(s, t+x-s))] ds \approx \\ & \approx \frac{1}{2} [\sigma(x) - \sigma(\tilde{x})] [w(x, t) + w(\tilde{x}, t+x-\tilde{x})] + \\ & + \frac{h}{2} [\sigma(x)q(x)(w(x, t) - r(x, t)) + \sigma(\tilde{x})q(\tilde{x})(w(\tilde{x}, t+x-\tilde{x}) - r(\tilde{x}, t+x-\tilde{x}))]. \quad (27) \end{aligned}$$

Спроецируем величины p, w, r и σ на сетку, показанную на рис.2, где точки сетки определяются пересечениями характеристик.

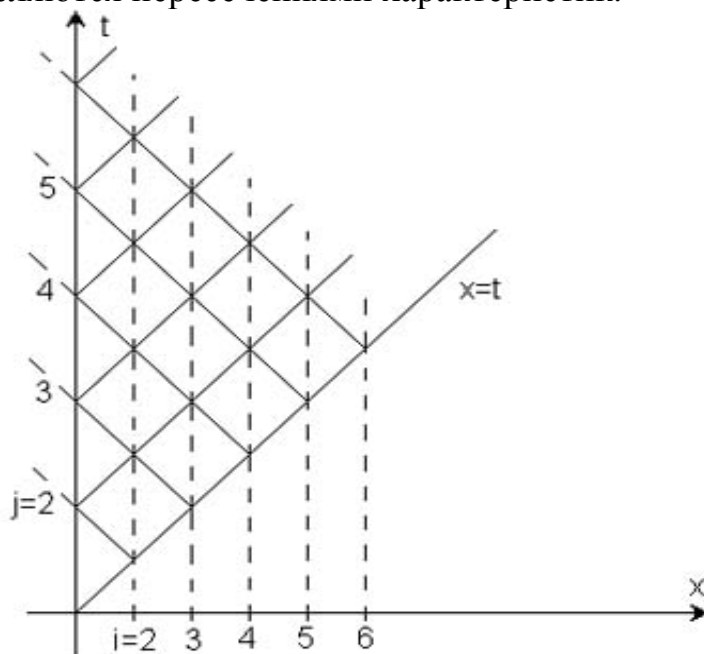


Рис. 2. Численная сетка, используемая в методе интегрирования вдоль характеристик. Жирные линии–характеристики гиперболической системы уравнений (23). Линия $x = t$ – фронт волны.

Спроецируем уравнение (2), предварительно проинтегрировав по t , также на эту сетку (рис.2). Из полученных соотношений на сетке построен вычислительный алгоритм решения прямой задачи для уравнения SH волн в упруго-пористой среде.

Вторая глава посвящена математическим моделям и численным методам решения одномерных обратных динамических задач, описывающихся уравнениями SH волн в упруго-пористой среде.

В первом параграфе приводятся постановки и решение динамических обратных задач:

Задача 1. Требуется по дополнительной информации

$$U|_{z=0} = G(t), \quad (28)$$

восстановить $\mu(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\rho_l(z)$, $\chi(z)$).

Задача 2. Требуется по информации (28) восстановить $\chi(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\rho_l(z)$, $\mu(z)$).

Задача 3. Требуется по информации (28) восстановить $\rho_s(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_l(z)$, $\mu(z)$, $\chi(z)$).

Задача 4. Требуется по информации (28) восстановить $\rho_l(z)$ из (1)-(5) (при этом считаются известными остальные функции $\rho_s(z)$, $\mu(z)$, $\chi(z)$).

Далее описан метод решения первой обратной задачи, с помощью которого задача сведена к решению замкнутой системы нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода относительно неизвестных функций $\Psi_1(t, x)$, $\Psi_2(t, x)$ и $q(x)$, а именно

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, x) = & s_1(t - x) + \\ & + \int_0^x \frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \Psi_1(t + \eta - x, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^x \left[\frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} + q(\eta) \right] \Psi_2(t + \eta - x, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^x \frac{\chi^2(\eta) \rho_l^3(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \int_0^{t-\eta+x} (\Psi_1(\tau, \eta) + \Psi_2(\tau, \eta)) e^{-\chi(\eta) \rho_l(\eta)(t+\eta-x-\tau)} d\tau d\eta, \\ \Psi_2(t, x) = & s_2(t + x) + \\ & + \int_0^x \left[\frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} - q(\eta) \right] \Psi_1(t - \eta + x, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^x \frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \Psi_2(t - \eta + x, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^x \frac{\chi^2(\eta) \rho_l^3(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \int_0^{t-\eta+x} (\Psi_1(\tau, \eta) + \Psi_2(\tau, \eta)) e^{-\chi(\eta) \rho_l(\eta)(t-\eta+x-\tau)} d\tau d\eta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) = & -\frac{\chi(x) \rho_l^2(x)}{2 \rho_s(x)} + \\
& + 2 \exp \left(\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \int_0^x \left[\frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} + q(\eta) \right] \Psi_1(2x - \eta, \eta) d\eta + \\
& + 2 \exp \left(\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \int_0^x \frac{\chi(\eta) \rho_l^2(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \Psi_2(2x - \eta, \eta) d\eta - \\
& - 2 \exp \left(\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \int_0^x \frac{\chi^2(\eta) \rho_l^3(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \int_0^{2x-\eta} \Psi_1(\tau, \eta) e^{\chi(\eta) \rho_l(\eta)(t-\eta+x-\tau)} d\tau d\eta - \\
& - 2 \exp \left(\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) \int_0^x \frac{\chi^2(\eta) \rho_l^3(\eta)}{2 \rho_s(\eta)} \int_0^{2x-\eta} \Psi_2(\tau, \eta) e^{\chi(\eta) \rho_l(\eta)(t-\eta+x-\tau)} d\tau d\eta - \\
& - 2 \exp \left(\int_0^x \frac{\chi(y) \rho_l^2(y)}{2 \rho_s(y)} dy \right) s_2(2x)
\end{aligned} \tag{29}$$

Система уравнений (29) обладает малым параметром, роль которого играет мера области интегрирования в этих уравнениях. Благодаря наличию этого малого параметра, к этой системе уравнений оказывается применим принцип сжатых отображений Банаха.

Во втором параграфе исследована система интегральных уравнений (29) и доказано единственность и существование решений обратных задач 1, 2, 3, 4 в малом.

В третьем параграфе непрерывная зависимость решений обратных задач от входных данных $s_1(t), s_2(t)$. Обозначим через $\tilde{q}(x)$ функцию $q(x)$, найденную по «измененным» входным данным $\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t)$. Доказана

Теорема. Пусть

$$\max_{t \in [0, 2x_0]} (|s_1(t) - \tilde{s}_1(t)|, |s_2(t) - \tilde{s}_2(t)|) \leq \delta. \tag{30}$$

Тогда имеет место оценка

$$|q(x) - \tilde{q}(x)| \leq C\delta,$$

где $C > 0$ — постоянная, независимая от δ (может зависеть от x_0 и др. параметров).

Эта теорема показывает непрерывную зависимость решений обратных динамических задач от входных данных для обратной задачи 1.

Соответствующие теоремы верны и для обратных задач 2, 3 и 4.

В четвертом параграфе данной главы представлен численный метод интегрирования вдоль характеристик, который эффективно вычисляет профиль коэффициента Ламе как функции глубины (задача 1) по заданному сейсмическому сигналу, измеренному на поверхности с произвольной исходной зондирующей функцией. В результате применения данного метода получены рекуррентные соотношения, позволяющие восстановить профиль

коэффициента Ламе внутри среды, одновременно восстанавливая и волновые поля скоростей смещений упругого пористого тела и жидкости.

Последний параграф данной главы посвящен численному решению совмещенных обратных задач для уравнений проводящих упруго-пористых сред для поперечных волн. Неизвестные функции ищутся как точки минимума целевых функционалов, характеризующих отклонение в норме L_2 реального зарегистрированного волнового и электрического полей от рассчитанного для пробной текущей модели.

Третья глава состоит из трех параграфов, в которых приведено подробное описание схем вычислений для получения численного решения прямой и обратных задач для SH волн на основе методов, предложенных в предыдущих двух главах. Проведены тестовые расчеты для различных модельных данных.

Для построения алгоритма решения обратной задачи были использованы рекуррентные формулы

$$p_{I,j} = \frac{1}{2}(p_{I-1,j-1} + p_{I-1,j}) + \frac{1}{4}(\sigma_{I-1} + \sigma_I)(w_{I-1,j-1} - w_{I-1,j}) - \frac{h}{2}\sigma_I q_I (w_{I,j} - r_{I,j}) - \frac{h}{4}\sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) + (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})] \quad (31)$$

$$w_{I,j} = \frac{(p_{I-1,j-1} - p_{I-1,j})}{\sigma_{I-1} + \sigma_I} + \frac{1}{2}(w_{I-1,j-1} + w_{I-1,j}) - \frac{h}{2} \frac{\sigma_{I-1} q_{I-1} [(w_{I-1,j-1} - r_{I-1,j-1}) - (w_{I-1,j} - r_{I-1,j})]}{\sigma_{I-1} + \sigma_I} \quad (32)$$

$$r_{ij+1} = r_{ij} + 2h(\chi \rho_i)_i (w_{ij} - r_{ij}) \quad (33)$$

вместе с необходимыми начальными и граничными условиями.

В программе организован цикл по i от 2 до N (N – количество точек разбиения), внутри которого – цикл по j от $i+1$ до N . Полученная схема имеет первый порядок точности по h , где h – шаг сетки по направлению x . Для выполнения всего процесса вычислений требуется $O(N^2)$ операций в силу того, что вычисления проводятся последовательно с помощью рекуррентных формул.

Для построения алгоритма решения прямой задачи были использованы рекуррентная формула (33) и формулы

$$w_{ij} = \frac{1}{\Delta} \{ 2(p_{i-1,j-1} - p_{i-1,j}) + (\sigma_i + \sigma_{i-1})w_{i-1,j-1} + (\sigma_{i+1} + \sigma_i)w_{i+1,j} \} - \frac{1}{\Delta} \{ h[\sigma_{i+1}q_{i+1}(w_{i+1,j} - r_{i+1,j}) - 2\sigma_i q_i r_{ij} + \sigma_{i-1}q_{i-1}(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \} \quad (34)$$

$$p_{ij} = p_{i-1,j-1} - \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i,j} + \frac{1}{2}[\sigma_i + \sigma_{i-1}]w_{i-1,j-1} -$$

$$-\frac{h}{2}[\sigma_i q_i(w_{i,j} - r_{i,j}) + \sigma_{i-1} q_{i-1}(w_{i-1,j-1} - r_{i-1,j-1})] \quad (35)$$

вместе с необходимыми начальными и граничными условиями.

В программе организован цикл по k от 2 до N , внутри которого – цикл по i от 2 до $N - k + 1$. Полученная схема имеет первый порядок точности по h , где h - шаг сетки по направлению x .

Для выполнения всего процесса вычислений, как и для обратной задачи, требуется $O(N^2)$ операций в силу того, что вычисления проводятся последовательно с помощью рекуррентных формул.

Программа тестировалась на различных модельных данных. В втором параграфе приведены результаты нескольких тестирований.

Во всех тестах использовались следующие значения: временной интервал $T = 50$, количество шагов $N = 1000$. Функции были заданы так:

$$\chi(x) = 1, \quad f(x) = \sin(x), \quad \rho_l(x) = 0.3\rho_s(x).$$

В первом тесте использовались функции:

$$\rho_s(x) = 1 + 0.5 \sin(x) \quad \text{и} \quad \mu(x) = 1.$$

Проводились расчеты для прямой задачи, а потом полученное решение использовалось как входные данные для обратной задачи.

Для иллюстрации работы программы на негладких и разрывных функциях рассматривался следующий пример.

Используемые функции:

$$\rho_s(x) = 1 \quad \text{и} \quad \mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin [10; 30] \\ 1 + 0.03|x - 10|, & \text{если } x \in [10; 30] \end{cases}$$

В этом случае также была решена сначала прямая задача, а потом обратная с входными данными, полученными при решении прямой. Во втором параграфе приведены графические иллюстрации полученных результатов при тестировании.

Полученные результаты показаны на рис.3 и рис.4.

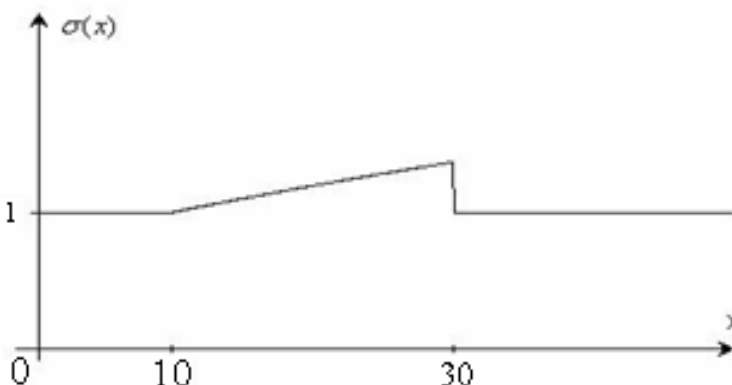


Рис. 3. График исходной функции $\sigma(x)$ для прямой задачи.

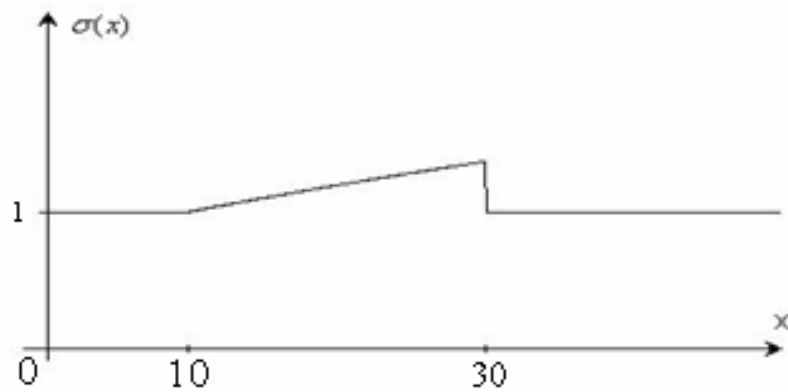


Рис. 4. График функции $\sigma(x)$, полученной при решении обратной задачи.

Результаты теста показали, что алгоритм работает и на негладких и даже разрывных исходных функциях.

В третьем параграфе приведены результаты вычислительных экспериментов для решения одномерных обратных динамических задач рассмотренных в параграфе 2.5. Была написана программа на языке C++ с расширенным графическим интерфейсом, которая позволяла производить восстановление функций $c_t(z), \sigma_l(z), \sigma_s(z)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краткие обобщенные выводы по диссертационному исследованию:

1. Построены математические модели прямых и обратных динамических процессов, сворящиеся к системе дифференциальных уравнений SH волн, с начально-краевыми условиями.
2. Построено сингулярное решение прямой динамической задачи для уравнений SH волн в упруго-пористой среде с учетом потери энергии на межкомпонентное трение.
3. Построена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для одномерных динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористой среде, которая всегда разрешима и имеет единственное решение в малом.
4. Применен численный метод интегрирования вдоль характеристик, который эффективно вычисляет профиль коэффициента Ламе (как функции глубины) по заданному сигналу, измеренному на поверхности с произвольной исходной зондирующей функцией. В результате применения данного метода получены рекуррентные соотношения, позволяющие восстановить профиль коэффициента Ламе внутри среды, одновременно восстанавливая и волновые поля смещений упруго-пористого тела и жидкости.
5. Доказана теорема единственности и в «малом» существования рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных, т.е. малым изменениям данных обратной задачи соответствуют малые изменения решения.
6. Численно решены совмещенные одномерные обратные задачи для уравнений проводящих пористых сред для поперечных волн.
7. Создана программа для реализации предложенных схем вычислений для численного решения одномерных прямой и обратных задач. Метод характеристического интегрирования очень эффективен по времени счета.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Материалы XLII международной научной студенческой конференции. – Новосибирск, 2004. – С. 192-193.
2. Холмуродов А.Э. Сингулярное решение уравнения SH волн в пористых средах// Материалы Республиканской научной конференции молодых ученых-математиков, посвященной 125-летию академика В.И. Романовского. – Ташкент, 2004. – С. 98-101.
3. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Вестник НУ Уз, серия механика–математика. – Ташкент, 2006. – №2. –С. 86–91.
4. Imomnazarov Kh.Kh. and Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Mathematical and Computer Modelling. – Amsterdam, 2007.–V. 45. –№3-4. – P. 270-280.
5. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Алгоритмы численного решения одномерных прямой и обратной задач распространения SH волн в пористых средах// Вестник КарГУ. –Карши, 2010. – №3. –С. 43–53.
6. Холмуродов А.Э. Алгоритм численного решения одномерных прямых задач распространения SH волн в пористых средах// Материалы международной конференции кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения. – Красноярск, 2011. –С. 123-126.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Холмуродов Абдулхамид Эркиновичнинг 05.13.18-математик моделлаштиришнинг назарий асослари ихтисослиги бўйича «Бир ўлчовли SH тўлқин тенгламаси билан тавсифланувчи динамик жараёнларни математик моделлаштириш» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: эластик-ғовак муҳит, SH тўлқинлар, гиперболик система, тўғри масала, тескари масала.

Тадқиқот объеклари: тадқиқот объекти – мураккаб тузилишдаги ғовак муҳитдаги тўлқинлар. Тадқиқот предмети – ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалиш жараёнларини математик моделлаштириш ҳамда бунда ҳосил бўлувчи тўғри ва тескари масалалар.

Ишнинг мақсади: бир ўлчовли SH тўлқин тенгламаси билан тавсифланувчи динамик жараёнларни математик моделлаштириш, бунда ҳосил бўлувчи тўғри ва тескари масалаларнинг ечимларини мавжудлик ва ягоналикка текшириш, бу масалаларнинг сонли ечиш методларини топиш ҳамда мос дастурларини тузиш.

Тадқиқот методлари: математик моделлаштириш, гиперболик системалар учун характеристикалар усули, интеграл тенгламалар ва чекли айирмалар усуллари, қўшма градиентлар усули ҳамда дастурлаш технологияси.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: қуйидаги натижалар янги:

- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалишининг математик модели;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламасининг сингуляр ечими;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тенгламаси учун тескари динамик масалаларнинг иккинчи тур ночизикли вольтерра интеграл тенгламалар системаси;
- қаралаётган тескари масалалар ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси;
- эластик-ғовак муҳитда SH тўлқин тарқалишининг тўғри ва тескари масалаларининг сонли ечиш усули ва унга мос дастур.

Амалий аҳамияти: олинган натижалар турли табиий ва технолгик жараёнларни текширишда қўлланилиши мумкин.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: иш материалларидан юқори курс бакалавриатура ва магистратура талабалари учун математик моделлаштиришга оид махсус курсларнинг асосини ташкил этади.

Қўлланиш соҳаси: олинган натижалар сейсмологияда, нефть ва газ захираларини аниқлаш ва ундан фойдаланишда қўлланилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Холмуродова Абдулхамида Эркиновича на тему: «Математическое моделирование динамических процессов, описывающихся одномерными уравнениями SH волн» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18 – теоретические основы математического моделирования

Ключевые слова: упруго-пористая среда, SH волны, гиперболическая система, прямая задача, обратная задача.

Объекты исследования: объектом исследования является волны в пористой среде со сложной реологией. Предметом исследования является математическое моделирование динамических процессов распространения одномерных SH волн, а также исследование полученных при этом прямых и обратных задач.

Цель работы: является математическое моделирование динамических процессов распространения SH волн, в рамках которого строятся математические модели, изучение характера решений, исследование разрешимости и единственности получающихся при этом прямых и обратных задач, разработка численных методов решения задач и соответствующих программ.

Методы исследования: в работе используются методы математического моделирования, метод характеристик для гиперболических систем, метод интегральных уравнений, конечно-разностные методы, метод сопряженных градиентов, а также технология программирования.

Полученные результаты и их новизна: следующие результаты работы являются новыми:

- выведена математическая модель распространения SH волн в упруго-пористых средах;
- построены сингулярные решения уравнения SH волн в упруго-пористых средах;
- получена система нелинейных вольтерровых интегральных уравнений второго рода для динамических обратных задач для уравнения SH волн в упруго-пористых средах;
- доказана теорема единственности и существования решения рассмотренных обратных задач, а также непрерывной зависимости решений обратных динамических задач от входных данных;
- разработан численный метод и создана программа для численного решения прямой и обратных задач для распространения SH волн в упруго-пористых средах.

Практическая значимость: полученные результаты могут найти применение при исследовании широкого класса различных природных и технологических процессов.

Степень внедрения и экономическая эффективность: результаты могут составить основу специальных курсов лекций по предмету математического моделирования для старших курсов бакалавриатуры и магистратуры.

Область применения: результаты исследований могут быть использованы в сейсмологии, при разработке нефтяных и газовых месторождений.

RESUME

Thesis of Holmurodov Abdulhamid Erkinovich on "Mathematical modeling of dynamic processes described by one-dimensional equations of SH waves" to get the scientific degree of PH in the field of physics and mathematics on the specialty 05.13.18 – Theoretical basis of mathematical modeling.

Key words: elastic porous medium, SH-wave, hyperbolic system, direct problem, inverse problem.

Subjects of research: the subjects of this study are waves in porous media with complex reology, the mathematical modeling of dynamic processes of propagation of one-dimensional SH-waves, and also the investigation of the obtained in this study direct and inverse problems.

Purpose of research: the purpose of the thesis are the mathematical modeling of dynamic processes of propagation of SH-waves in which mathematical models are constructed, studying the nature of solution, existence and uniqueness of the solution to obtained in this study direct and inverse problems, the development of numerical methods for solving the problems and programm.

Methods of research: we use mathematical modeling methods, the method of characteristics for hyperbolic systems, the method of integral equations, finite difference methods, the conjugate gradient method, and programming technology.

Results obtained and their novelty: the following results are new:

- derived mathematical model of SH-wave propagation in elastic-porous media;
- constructed singular solutions of SH-wave propagation in elastic-porous media;
- a system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind for the dynamic inverse problems for SH-waves in elastic-porous media;
- uniqueness theorem and a "in small" existence of a solution of inverse problems considered, as well as the continuous dependence of solutions to inverse dynamic problems on input data;
- developed numerical method and created program for the numerical solution to the direct and inverse problems for SH-wave propagation in the elastic-porous media.

Practical significance: the results can be used in a broad class of studies of various natural and technological processes.

Degree of embed and economic effectivity: the results may form the basis of special courses on the subject of mathematical modeling for senior undergraduate and graduate students.

Field of application: the results can be used in seismology and in the development of oil and gas deposits.