

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**МИРЗО УЛУҒБЕК номидаги
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

Қўлёзма ҳуқуқида
УДК 517.98-519.21

РАХМАТУЛЛАЕВ Музаффар Мухаммаджанович

**КЭЛИ ДАРАХТИДАГИ БАЪЗИ МОДЕЛЛАРНИНГ КУЧСИЗ
ДАВРИЙ ХОЛАТЛАРИ ВА ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ**

01.01.01. –Математик анализ

Физика-математика фанлари номзоди илмий
даражасини олиш учун тақдим этилган диссертация

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2009

Илмий иш ЎзР ФА Математика ва инфор­мацион технологиялар институти
ва Наманган Давлат университетида бажарилган

Илмий раҳбар: физика-математика фанлари доктори
Розиков Уткир Абдуллоевич

Расмий оппонентлар: физика-математика фанлари доктори,
Рахимов Абдуғофир Абдумажидович
физика-математика фанлари номзоди,
Эшқобилов Юсуп Холбоевич

Етакчи ташкилот – Самарқанд Давлат уни­вер­ситети

Диссертация ҳимояси «___» _____ 2009 й. соат «___» да
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети қошидаги
Д 067.02.03 рақамли ихтисослашган кенгаш йиғилишида бўлиб ўтади.
Манзил: Ўзбекистон, 100174, Тошкент шаҳри, Талабалар шаҳарчаси,
Ўзбекистон Миллий университети, Механика математика факультети,
ауд.____

Диссертация билан Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий
университети кутубхонасида танишиш мумкин

Автореферат 2009 й. «___» _____ тарқатилди.

Ихтисослашган кенгаш
илмий котиби физика-математика
фанлари доктори

А.А.Абдушукуров

1. ДИССЕРТАЦИЯНИНГ УМУМИЙ ТАВСИФИ

Мавзунинг долзарблиги. Гиббс ўлчовлари назарияси статистик физика ва Евклид квант назариясини ўрганишнинг асосий объекти бўлиши билан бирга бу ўлчов, ўлчовлар назариясинг нисбатан янги соҳасини ташкил қилади.

Гиббснинг лимит ўлчовлари умумий характеристикаси Р.Л.Добрушин, О.Лэнфорд ва Д.Рюэлларнинг ишларида келтирилган. Бу тушунчанинг хусусий ҳоллари аввалроқ Н.Н.Боголюбова ва Б.И.Хацетлар томонидан ўрганилган. Юқоридаги ишларнинг кенгайтирилган ва замонавийлаштирилган кўриниши Н.Н.Боголюбов, Д.Я.Петрина ва Б.И.Хацетларнинг илмий мақолаларида тадқиқ этилган. Шунингдек, Р.А.Минлос ва Д.Рюэлларнинг илмий ишларини ҳам эслатиб ўтамиз.

Гиббснинг лимит ўлчовларининг назарий – эҳтимоллик кўринишларини К.Престоннинг китобидан кўриш мумкин.

Гиббснинг лимит ўлчовлари нуқтаи назаридан Гаусс ўлчовларини Ю.А.Розанов, Ф.Спитцер, Р.Л.Добрушинларнинг илмий ишларида муҳокама қилинган.

Гиббс ўлчовининг мавжудлиги ҳақидаги теорема ва унинг исботи Р.Л.Добрушин томонидан келтирилган. Квант майдонлари назариясининг панжарасимон моделларига таълуқли ва бу теоремани қўлланишига К.М.Хинин томонидан мисол кўрилган. Унинг илмий ишида бир нечта умумий ҳоллар ўрганилган.

$\varphi(x)$ чегараланмаган тўпламдан қийматлар қабул қилувчи моделлар учун Гиббснинг лимит ўлчовлари мавжудлиги ҳақидаги теоремалар Ж.Либовиц ва Э.Презуттилар илмий ишларида кўрилган.

Янг ва Ли ишларида, илк бор, термодинамик лимитга ўтишнинг статистик механиканинг турли масалаларига ва айниқса фаза алмашишлар назариясига қўллашнинг аҳамияти кўрсатилган.

Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари усулларида фойдаланиб, хусусан П.М.Блехер, Н.Ганиходжаев, С.Захари, Ф.Спитцер, Ю.Сухов, У.Розиков ва бошқалар томонидан Кэли дарахтида статистик механиканинг моделлари ўрганилган, даврий Гиббс ўлчовлар тўплами баён этилган. Бундай ўлчовлар фақат ёки трансляцион-инвариант, ёки даври иккига тенг бўлган даврий ўлчовлар бўлиши исботланган.

Шунинг учун даврийликни умумийроқ таърифини келтириш ва янги Гиббс ўлчовлари олиш зарур бўлди. Қуйидаги ишда кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва кучсиз даврий асосий ҳолатлар тушунчаси киритилади, ҳамда Изинг модели учун бундай ўлчовлар кўриниши берилади.

Юқоридагилардан хулоса қилиб айтиш мумкинки диссертация ишининг мавзуси долзарбдир.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Хар бир Гиббс ўлчовига битта физик системанинг фазаси мос қўйилади. Агар биттадан кўп Гиббс ўлчови мавжуд бўлса у ҳолда фазовий ўтиш бор деб аталади. Асосий

фазовий ўтишлар назарияси С.А.Пирогов ва Я.Г.Синаи ишларида мужассамлашган. Замонавий Гиббс ўлчовлари назарияси ва фазовий ўтишлар назарияси куйидаги китобларда ёритилган «Baus M., Nejero C.F. Equilibrium Statistical Physics. –Springer. 2008. 364p.», « Benik C. Ising type Antiferromagnetics. – Springer. 2003. 120p.», «Gallavotti G., Bonetto F., Gentile G. Aspects of Ergodic, Qualitative and Statistical Theory of Motion. – Springer. 2004. 435p.», «Jean Zinn-Justin. Phase Transitions and Renormalization Group. – OXFORD University press. 2007. 452p.», «Palmer J. Planar Ising Correlations. – Prog. Math. Phys. Birkhuser.2007.363p.», «Pierre Brémaud. Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues. – Springer.1999, 445p.».

Баъзи моделлар (Изинг, Поттс, SOS, Hard-Core, λ – модел ва х.к.) учун трансляционн-инвариант ва даврий Гиббс ўлчовлари Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.Мухаммедов, Дж.Либовиц, Е.Презутти Ю.М.Сухов ва бошқалар томонидан, Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари усулларида фойдаланиб ўрганилган. Шунингдек баъзи бир даврий бўлмаган Гиббс ўлчовлари синфи ҳам ўрганилган.

Г.И.Ботиров, У.А.Розиков, Ф.М.Мухаммедовлар томонидан Кэли дарахтида контур усул (Пирогов Синаи назарияси) ривожлантирилган. Бу усул ёрдамида Кэли дарахтидаги етарлича катта гамильтонианлар синфи учун турли Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган. Шунингдек Кэли дарахтида бу моделлар учун асосий ҳолатлар тўплами ўрганилган.

Кэли дарахтида p – адик Гиббс ўлчовлари назарияси У.А.Розиков ва Ф.М.Мухаммедовлар томонидан ривожлантирилган.

Асосан Изинг, Поттс, λ – модел ва бу моделларнинг баъзи бир умумлашмалари учун фазовий ўтиш мавжуд эмаслиги (p – адик Гиббс ўлчови ягоналиги) исботланган. Шунингдек, параметрларнинг фазовий ўтиш мавжуд бўладиган қийматлари кўрсатилган. Масалан, спин қийматлари $\{1,2,\dots,q\}$ тўпламга тегишли бўлган p – адик Поттс модели учун фақат ва фақат q сон p га каррали бўлганда фазовий ўтиш мавжуд бўлиши исботланган.

У.А.Розиков томонидан Кэли дарахтида санокли даврий Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган ва бундай ўлчовлар тўплами бир жинсли бўлмаган Изинг модели учун кўрсатилган.

Моделлар гамильтонианларига боғлиқ масалаларга бағишланган илмий ишлар кўплигига қарамасдан, ҳалигача ечилмаган (очик) масалалар қолмоқда. Масалан, Гиббс лимит ўлчовлари тўпламини тўла таснифлаш масаласи ҳал бўлишига (яқунланишига) ҳали анча бор.

Диссертация ишининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Изланиш №8-07 “Оператор ва ноассоциатив алгебралар, Гиббс ўлчовлари, уларнинг алгоритмизацияси ва қўлланиши” гранти бўйича олиб борилди.

Тадқиқот мақсади. Ушбу ишда кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва кучсиз даврий асосий ҳолатлар тушунчалари киритилади.

Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар ўрганилади. Шунингдек кучсиз даврий бўлмаган лимит Гиббс ўлчовлари синфи изланилади.

Тадқиқот вазифалари. Диссертация ишида қуйидаги масалалар кўрилган:

- Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини топиш;
- Изинг модели учун саноксиз сондаги кучсиз даврий бўлмаган Гиббс ўлчовларини қуриш;
- рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатларни топиш.

Тадқиқот объекти ва предмети. Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчови, ва рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар.

Тадқиқот усуллари. Диссертация ишида Марков тасодифий майдонлар назарияси ва бу назариянинг рекуррент тенгламалари, Пирогов-Синай назарияси, ўлчовлар назарияси ва қисқартириб акслантириш усулларидан фойдаланилган.

Ҳимояга олиб чиқиладиган асосий ҳолатлар. Диссертациянинг асосий натижалари сифатида қуйидагиларни қайд этиш мумкин:

1. Кэли дарахтида Изинг модели учун ихтиёрий индекси 2 га тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан, баъзи шартларда, бешта кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги кўрсатилган.
2. Нормал бўлувчи индекси 4 га тенг бўлган ҳолда, Изинг модели параметрларига баъзи шартлар асосида, 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган.
3. Саноксиз сондаги даврий бўлмаган (кучсиз даврий ҳам бўлмаган) янги Гиббса ўлчовлари қурилган.
4. Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун тўртта кучсиз даврий, асосий ҳолатлар мавжуд бўлишлигининг зарур ва етарли шартлари (дарахт тартиби k га ва индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) топилган.
5. Тартиби $k \geq 1$ бўлган Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг моделининг ихтиёрий (индекси r бўлган) нормал бўлувчига нисбатан кучсиз даврий конфигурацияси асосий ҳолат бўлишлигининг зарур ва етарли шарти топилган.

Илмий янгилиги. Диссертациянинг барча асосий натижалари янги. Асосий натижалар сифатида қуйидагиларни кўрсатиш мумкин:

- Кэли дарахтида Изинг модели учун ихтиёрий индекси 2 га тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан, баъзи шартларда, бешта кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган.

- Нормал бўлувчи индекси 4 га тенг бўлган ҳолда Изинг модели параметрларига баъзи шартлар асосида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган.
- Изинг модели учун саноксиз сондаги даврий бўлмаган (кучсиз даврий ҳам бўлмаган) янги Гиббс ўлчовлари қурилган.
- Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун тўртта кучсиз даврий, асосий ҳолатлар мавжуд бўлишлигининг зарур ва етарли шартлари (дарахт тартиби k га ва индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) топилган.
- Тартиби $k \geq 1$ бўлган Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг моделининг ихтиёрий (индекси r бўлган) нормал бўлувчига нисбатан кучсиз даврий конфигурацияси асосий ҳолат бўлишлигининг зарур ва етарли шarti аниқланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Диссертацияда ёритилган асосий илмий натижалар ва усуллар ўлчовлар назарияси, фазовий ўтишлар назарияси, эҳтимоллар назарияси, назарий ва математик физикада ўзининг қўлланишига эга.

Натижалар реализацияси. Диссертация иши назарий характерга эга. Диссертация усуллари ва натижалари келгусида Кэли дарахтида бошқа моделларнинг Гиббс ўлчовларини аниқлашда ва махсус курслар ўқишда қўлланиши мумкин.

Ишнинг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари Математика ва информатсион технологиялар институтида, академик Ш.А.Аюпова раҳбарлигидаги «Оператор алгебралари ва уларнинг тадбиқлари» илмий семинарида (2008, 2009 йй.), ЎзМУнинг маҳаника-математика факультетида, профессор В.И.Чилин раҳбарлигидаги семинарда (2008, 2009 йй), «Ёш математикларнинг Янги теоремалари-2006» (Наманган, 2006, 15-16-ноябр), конференцияда муҳокама қилинган ҳамда механика ва математикадан бутунроссия конференцияси материалларида (Томск, 22-25 сентябр 2008) элон қилинган.

Натижаларнинг эълон қилинганлиги. Диссертациянинг асосий натижалари мақола ва тезислар кўринишида чоп этилган. Чоп этилган ишлар рўйхати авторефератнинг охирида “Чоп этилган ишлар” бўлимида келтирилган. [1], [3], [4] ишларда масалани қўйилиши ва баъзи ғоялар У.А.Розиковга тегишли.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва 65 номли қўлланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертация компьютер тексти 92 бетни ташкил этади.

2. ИШНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ишнинг асосий натижалари баёни ва унинг бошқа маълум натижалар билан алоқалари келтирилган.

Биринчи бобда асосий таърифлар, ва Кэли дарахтида аниқланган Гиббс ўлчовлар назарияси натижалари берилади. Шунингдек ушбу бобда масаланинг қўйилиши ва диссертация ишининг асосий натижалари ўрин топган.

Иккинчи бобда Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ёритилган.

$T^k = (V, L)$, $k \geq 1$, k - тартибли Кэли дарахти бўлсин, яни ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи чексиз дарахт бўлсин, бу ерда V - учлар тўплами, L - қирралар тўплами.

Маълумки, T^k - Кэли дарахтини, ҳосил қилувчилари мос равишда $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ бўлган $k+1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг озод кўпайтмаси шаклида тасвирлаш мумкин.

$\Phi = \{-1, 1\}$ ва $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ - конфигурация бўлсин, яни $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$. Изинг моделини гамильтонианини кўрайлик

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \quad (1)$$

бу ерда $J \in \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle$ - энг яқин қўшнилар.

Маълумки, Изинг моделининг ҳар бир Гиббс ўлчови учун қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $h = \{h_x, x \in G_k\}$ қийматлар тўпламини мос қўйиш мумкин

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \quad (2)$$

бу ерда $S(x)$ - «тўғри авлодлар» тўплами, $x \in V$ ва $f(x, \theta) = \text{arcth}(\theta \tanh x)$, $\theta = \tanh(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ температура.

Ихтиёрий $x \in G_k$ учун $x_\downarrow = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ белгалаш киритамиз.

$G_k / \hat{G}_k = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ - фактор-группа бўлсин, бу ерда $\hat{G}_k$ - индекси $r \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

Таъриф 2.1.2. $h = \{h_x, x \in G_k\}$ қийматлар тўпламини $\hat{G}_k$ - кучсиз даврий деймиз, агар $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ ва ихтиёрий $x \in G_k$ учун $h_x = h_{ij}$ бўлса.

Таъриф 2.1.3. μ ўлчов $\hat{G}_k$ - (кучсиз) даврий деб атаيمиз, агар у $\hat{G}_k$ - (кучсиз) даврий h қийматлар тўпламига мос келса.

2.2 параграфда $\bar{G}_k$ - индекси 2 га тенг бўлган ихтиёрий нормал бўлувчи учун $\bar{G}_k$ - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ёритилган.

Қуйидагича белгалашлар қиламиз

$$\alpha = \frac{1-\theta}{1+\theta}, \quad I_1 = \{h \in R^4 : h_1 = h_2 = h_3 = h_4\},$$

$$I_2 = \{h \in R^4 : h_1 = h_4; \quad h_2 = h_3\}, \quad I_3 = \{h \in R^4 : h_1 = -h_4; h_2 = -h_3\}.$$

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{жуфт}\} \text{ бўлсин, бу ерда } \emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \dots, k+1\},$$

ва $w_x(a_i) - x \in G_k$ сўздаги a_i лар сони.

2.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидагидир

Теорема 2.2.1. 1) I_1, I_2 да Изинг модели учун барча H_A кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади.

2) $|A|=k, \alpha < 1$ бўлса, барча H_A - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант бўлади.

3) $|A|=1, k=4$ бўлса, у ҳолда шундай $\alpha_{cr} (\approx 0,152)$ критик миқдор мавжудки, $0 < \alpha < \alpha_{cr}$ бўлганда бешта $\mu_0, \mu_1^-, \mu_1^+, \mu_2^-, \mu_2^+, H_A$ - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд; $\alpha = \alpha_{cr}$ бўлганда учта $\mu_0, \mu_1^-, \mu_1^+, H_A$ - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд; $\alpha > \alpha_{cr}$ бўлганда ягона μ_0, H_A - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади.

4) $|A|=1, k > 5$ ва $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ бўлса, у ҳолда I_3 тўпламда учта $\mu_0, \mu_1^-, \mu_1^+, H_A$ - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади, бу ерда $\theta_{1,2} = \frac{k-1 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{2k}$.

$H_{\{a_1\}} = \{x \in G_k : w_x(a_1) - \text{жуфт}\}$ бўлсин, бу ерда $w_x(a_1) - x \in G_k$ сўздаги a_1 харфлар сони, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{жуфт}\}$ ва $G_k^{(4)} = H_{\{a_1\}} \cap G_k^{(2)}$ - буларга мос келувчи индекси 4 га тенг бўлган нормал бўлувчи.

2.3 параграфда $G_k^{(4)}$ -индекси 4 га тенг бўлган нормал бўлувчи учун $G_k^{(4)}$ -кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари топилган.

$G_k^{(4)}$ -кучсиз даврий Гиббс ўлчовларини топиш масаласи баъзи шартларда қуйидаги тенгламаларни ечишга келтирилган

$$x = -(k-1)f(x, \theta) + f(kf(x, \theta), \theta). \quad (3)$$

$$x = (k-1)f(x, \theta) - f(kf(x, \theta), \theta). \quad (4)$$

$$\pm x = (k-1)f(x, \theta) + f(kf(x, \theta), \theta). \quad (5)$$

$$\text{Қуйидагича } \alpha = \frac{1-\theta}{1+\theta}, \quad e^{2x} = z, \quad u = \frac{z+\alpha}{\alpha z+1} \text{ белгилашлар қилиб,} \quad (3)$$

тенглама қуйидаги тенгламага келтирилади

$$u^{2k} - \alpha u^{2k-1} + u^{k+1} - u^{k-1} + \alpha u - 1 = 0.$$

$k = 4$ бўлганда:

Лемма 2.3.2. Агар $\alpha > \alpha'_{cr} = \frac{5}{3}$ бўлса, у ҳолда (3) тенглама $u_0 = 1, u_1 = u_*, u_2 = \frac{1}{u_*}$ ларга мос равишда учта ечимга эга бўлади, агар $0 < \alpha \leq \frac{5}{3}$ бўлса, у ҳолда (3) тенглама $u_0 = 1$ га мос равишда ягона ечимга эга бўлади.

Худди шу каби (4) тенглама учун қуйидаги леммага эга бўламиз:

Лемма 2.3.3. $\alpha_{cr} (\approx 0,152)$ критик қиймат мавжудки

- 1) Агар $0 < \alpha < \alpha_{cr}$ бўлса, (4) тенглама $u_0 = 1, u_1 = u_*^{(1)}, u_2 = \frac{1}{u_*^{(1)}}, u_3 = u_*^{(2)}, u_4 = \frac{1}{u_*^{(2)}}$ ларга мос равишда бешта ечимга эга бўлади.
- 2) Агар $\alpha = \alpha_{cr}$ бўлса, у ҳолда (4) тенглама $u_0 = 1, u_1 = u_*^{(1)}, u_2 = \frac{1}{u_*^{(1)}}$ ларга мос равишда учта ечимга эга бўлади.
- 3) Агар $\alpha > \alpha_{cr}$ бўлса, у ҳолда (4) тенглама $u_0 = 1$ ларга мос равишда ягона ечимга эга бўлади.

2.3.2 ва 2.3.3 леммалардан ва (5) дан хулоса қилиб, қуйидаги теоремани оламиз

Теорема 2.3.1. $k = 4$ бўлганда $\alpha_{cr} \approx 0,152$ ва $\alpha_c = \frac{3}{5}$ критик қийматлар мавжудки

- 1) Агар $\alpha \in [0, \alpha_{cr}) \cup (\alpha_{cr}^{-1}, +\infty)$ бўлса, у ҳолда 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади
- 2) Агар $\alpha = \alpha_{cr}, \alpha_{cr}^{-1}$ бўлса, у ҳолда 5 та кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади.
- 3) Агар $\alpha \in (\alpha_{cr}, \alpha_c) \cup (\alpha_c^{-1}, \alpha_{cr}^{-1})$ бўлса, у ҳолда 3 та кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади.
- 4) Агар $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_c^{-1}]$ бўлса, у ҳолда 1 та кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлади.

2.4 параграфда саноқсиз сондаги янги даврий бўлмаган (ва кучсиз даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари қурилган, яни қуйидаги исботланган

Теорема 2.4.2. Ихтиёрий $(t, s) \in D = \{(t_1, t_2) \in [0; 1 + \frac{1}{k}] \times [0; 1 + \frac{1}{k}] : t_1 \leq t_2\}$

нукта учун $\mu(0,0) = \mu^+, \mu\left(0; 1 + \frac{1}{k}\right) = \mu^0, \mu\left(1 + \frac{1}{k}; 1 + \frac{1}{k}\right) = \mu^-$ шартларни қаноатлантирувчи ягона $\mu(t, s)$ Гиббс ўлчови мавжуд.

$(t, s) \in D$ ҳар хил бўлганда ўлчов $\mu(t, s)$ ҳар хил бўлгани учун континуум лимит Гиббс ўлчовларини оламиз.

Диссертациянинг 3 бобида рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатларни топилган.

$G_k / G_k^* = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ – фактор-группа бўлсин, бу ерда G_k^* – индекси $r \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

Таъриф 3.1.2. $\sigma(x), x \in V$ – конфигурацияни G_k^* – кучсиз даврий деймиз, агар $x \in H_i, x_j \in H_j, \forall x \in G_k$ да $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ бўлса.

Рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун гамильтониан қуйидагича қурилишга эга

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma(x) \sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x, y \in V: \\ d(x, y) = 2}} \sigma(x) \sigma(y). \quad (6)$$

Ихтиёри индекси иккига тенг бўлган нормал бўлувчи $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{жуфт}\}$ кўринишида бўлади, бу ерда $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$, ва $w_x(a_j) - x \in G_k$ сўздаги a_j ҳарфлар сони ва $|A| = i$ бўлсин.

3.2 параграфни асосий натижаси қуйидагидир

Теорема 3.2.1. $|A| = i, i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ бўлсин.

1) Агар $i \neq \frac{k+1}{2}$ бўлса, у ҳолда барча H_A – кучсиз даврий асосий ҳолатлар H_A – даврий ёки трансляцион-инвариант бўлади.

2) $i = \frac{k+1}{2}$ ва $J_1 = 2J_2, J_2 \geq 0$ бўлганда ками билан иккита H_A – кучсиз даврий (даврий бўлмаган) асосий ҳолатлар мавжуд.

$$A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}, \quad H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_x(a_j) - \text{жуфт}\}, \quad G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{жуфт}\}$$

бўлсин ва $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ – уларга мос келувчи индекси 4 га тенг бўлган нормал бўлувчи бўлсин.

3.3 параграфни асосий натижаси қуйидагидир

Теорема 3.3.1. $|A| = i, i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ бўлсин.

I) Агар $i \neq \frac{k+1}{2}$ бўлса, у ҳолда барча $G_k^{(4)}$ – кучсиз даврий асосий ҳолатлар $G_k^{(4)}$ – даврий ёки трансляцион-инвариант бўлади.

II) $i = \frac{k+1}{2}$ ва $J_1 = 2J_2, J_2 \geq 0$, даврийдан ташқари ками билан яна тўрта $G_k^{(4)}$ – кучсиз даврий (даврий бўлмаган) асосий ҳолатлар мавжуд бўлади.

3.4. параграфда конфигурациялар учун асосий ҳолат бўлаш шартлари берилади.

K - ихтиёрий $r \geq 2$ чекли индексли нормал бўлувчи ва $G_k / K = \{H_1, H_2, \dots, H_r\}$ – фактор-группа бўлсин.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(K) = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2 : \exists x \in H_i, \exists y \in H_j \text{ шундайки } d(x, y) = 1\},$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i(K) = \{j \in \{1, 2, \dots, r\} : (i, j) \in \mathbf{I}\}.$$

Хар бир K – кучсиз даврий конфигурация σ , яни

$$\sigma(x) = a_{ij}, x_{\downarrow} \in H_i, x \in H_j, (i, j) \in \mathbf{I}, \quad (7)$$

учун қуйидаги элементли $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\sigma) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^r$ матрицани мос қуямиз

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{i+1j+1}, & (i, j) \in \mathbf{I}_i \\ 0, & (i, j) \notin \mathbf{I}_i \end{cases}$$

$S_1(x)$ билан x нуктанинг барча яқин қушнилари белгилаймиз ва

$$q_j(x) = |S_1(x) \cap H_j|, j = 1, \dots, r; Q(x) = (q_1(x), \dots, q_r(x)).$$

Ихтиёрий $x \in G_k$ учун $Q(e)$ векторнинг координаталарини ўрин алмаштириши π_x мавжудки

$$\pi_x Q(e) = Q(x) \quad (8)$$

бўлади.

(8) дан келиб чиқадики барча $x \in G_k$ учун $N(x) = N(e)$.

Қуйидаги теорема $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\sigma)$ матрицанинг элементларига σ конфигурациянинг асосий ҳолат бўлиш шартини беради.

Теорема 3.4.1. 1) K – кучсиз даврий конфигурация σ K – даврий бўлади, фақат ва фақат, агар $\mathbf{B}(\sigma)$ бир хил сатрлардан иборат бўлса.

2) K – кучсиз даврий конфигурация σ H гамильтониан учун асосий ҳолат бўлади фақат ва фақат, агар шундай $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ топилиб, $J_1 = 2(2j - k)J_2, J_2 \geq 0$ ва

$$a_{pm} - a_{nm} + \sum_{s=1}^r q_s(x) a_{ns} = (k - 2j \pm 1) a_{mn}, \quad (9)$$

бўлса, бу ерда $x \in H_n, m \in \mathbf{I}_p, n \in \mathbf{I}_m$.

Натижа 3.4.1. Юқоридаги 3.2.1 ва 3.3.1 теоремаларда қурилган асосий ҳолатларни 1 радиусли ихтиёрий шардаги энергияси $-\frac{k+1}{2}J_2$, $J_2 \geq 0$ бўлади.

Эслатма 3.4.2. 3.2.1 теоремада қурилган конфигурациялар матрицалари симметрик ёки кососимметрик. Матрица $\mathbf{B}(\varphi')$ симметрик, матрица $\mathbf{B}(\varphi'')$ эса кососимметрик бўлади.

Шунинг учун қуйидаги тўғри бўлса керак:

Гипотеза 3.4.1. (6) гамильтониан учун K – кучсиз даврий конфигурация φ асосий ҳолат бўлсин, у ҳолда $\mathbf{B}(\varphi)$ ёки симметрик ёки кососимметрик бўлади.

Қуйидаги мисол кўрсатадики, $\mathbf{B}(\varphi)$ симметрик ёки кососимметрик бўлишидан φ асосий ҳолат бўлиши келиб чиқмайди.

Мисол 3.4.1. Қуйидаги конфигурация

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_3 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_1 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_3 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_3, x \in H_0 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_1 \\ +1, & x_{\downarrow} \in H_1, x \in H_2 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_0, x \in H_2 \\ -1, & x_{\downarrow} \in H_2, x \in H_0, \end{cases} \quad \text{матрицаси } \mathbf{B}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлади, яни симметрик, аммо текшириш мумкинки φ_0 асосий ҳолат бўлмайди.

Автор узининг илмий раҳбари ф.м.ф.д. У.А.Розиковга масала қуйилиши, доимий этибори ва диссертация ишидаги ёрдами учун чуқур миннаддорлигини изҳор этади.

3. ХУЛОСА

Берилган гамильтониан учун асосий масала – бу унга мос келувчи барча лимит Гиббс ўлчовларини қуришдир. Бу масала алоҳида, оsonроқ ҳолларда тўлиқ ечилади. Изинг модели учун ва унинг умумий ҳоллари учун трансляцион-инвариант, даврий ва баъзи нодаврий Гиббс ўлчовлари маълум. Аммо кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари олдин ўрганилмаган. Бу масала биринчи бўлиб биз томонимиздан ўрганилмоқда ва қуйидаги натижалар олинди:

- Кэли дарахтида Изинг модели учун ихтиёрий индекси иккига тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан баъзи шартлар асосида бешта кучсиз даврий лимит Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.
- Индекси 4 га тенг бўлган нормал бўлувчи бўлган ҳолда, Изинг модели учун параметрларни баъзи шартлари асосида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган.
- Саноксиз сондаги янги нодаврий (кучсиз даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари қурилган.
- Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун тўртта кучсиз даврий, асосий ҳолатлар мавжуд бўлишлигининг зарур ва етарли шартлари (дарахт тартиби k га ва индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) топилган
- Тартиби $k \geq 1$ бўлган Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг моделининг ихтиёрий (индекси r бўлган) нормал бўлувчига нисбатан кучсиз даврий конфигурацияси асосий ҳолат бўлишлигининг зарур ва етарли шарти топилган.

4. ЧОП ЭТИЛГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ:

1. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. О слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли. // Тез. докл. конф. «Ёш математикларнинг янги теоремалари-2006». Наманган, 2006, 15-16 ноября.-с.28-29.
2. Рахматуллаев М.М. О новых гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли. // Тез. докл. Всероссийской конф. по матем. и мех. Томск, 2008, 22-25 сентября. –с.80-81.
3. Рахматуллаев М.М. Розиков У.А. О слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли. // Доклады АН РУз, Ташкент, 2008. - №4. -с.12-15.
4. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли. // Теор. и матем. физика, Москва, 2008, т.156, №2.-с.292-302.
5. Рахматуллаев М.М. Новые гиббсовские меры модели Изинга на дереве Кэли. // УзМЖ, Ташкент, 2009,№2.
6. Rahmatullaev M.M. Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree. // arXiv, USA, 2008, 0812.4644,-v2 [math-ph], (www.arxiv.com).

РЕЗЮМЕ

диссертации **Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджановича** на тему: «**О слабо периодических состояниях и гиббсовских мерах некоторых моделей на дереве Кэли**» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01-математический анализ.

Ключевые слова: дерево Кэли, нормальный делитель, модель Изинга, слабо периодическая мера Гиббса, слабо периодическая основные состояния.

Объекты исследования: слабо периодическая мера Гиббса для модели Изинга и слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями.

Цель работы: в настоящей работе изучаются слабо периодические (непериодические) меры Гиббса для модели Изинга и слабо периодические (непериодические) основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями.

Метод исследования: в работе используется метод, основанный на теории Марковских случайных полей и рекуррентных уравнениях этой теории, теории Пирогова-Синая, теории меры и сжимающих отображений.

Полученные результаты и их новизна: в качестве основных результатов можно отметить следующие;

- Для модели Изинга на дереве Кэли доказано, что при некоторых условиях существует пять слабо-периодических гиббсовских мер относительно произвольных нормальных делителей индекса два.
- В случае нормальных делителей индекса 4 при некоторых условиях на параметры модели Изинга доказано существование 7 слабо периодических гиббсовских мер.
- Построено несчетное число новых непериодических (и не слабо периодических) гиббсовских мер.
- Найдены необходимые и достаточные условия (на порядок решетки k и на параметры нормального делителя индекса два и четыре), при которых существуют четыре слабо периодических основных состояния модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.
- Для произвольных нормальных делителей индекса r найдены необходимые и достаточные условия для конфигурации быть основным состоянием модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k \geq 1$.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют научно-теоретический характер. Они могут быть применены в статистической физике.

Область применения: Теория мер, теория фазовых переходов, теория вероятностей, теоретическая и математическая физика.

Физика-математика фанлари номзоди даражасига талабгор
Рахматуллаев Музаффар Рахматуллаевнинг 01.01.01-математик анализ
ихтисослиги бўйича «Кэли дарахтидаги бази моделларни кучсиз даврий
Гиббс ўлчовлари ва ҳолатлари» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: Кэли дарахти, нормал бўлувчи, Изинг модели, кучсиз даврий Гиббс ўлчови, кучсиз даврий асосий ҳолат.

Тадқиқот объектлари: Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар.

Ишнинг мақсади: Изинг модели учун кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари ва рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун кучсиз даврий асосий ҳолатлар ўрганилади.

Тадқиқот усуллари: диссертацияда Марков тасодифий майдонлари назарияси ва бу назариянинг руккурент тенгламаларига асосланган усулларан фойдаланилган. Шунингдек ўлчовлар назарияси ва қисқартириб акслантириш, Пирогов-Синай назарияларидан фойдаланилган.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: асосий натижалар сифатида қуйидагиларни қайд этиш мумкин:

- Кэли дарахтида Изинг модели учун ихтиёрий индекси 2 га тенг бўлган нормал бўлувчига нисбатан бази шартларда бешта кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги кўрсатилган.
- Нормал бўлувчи индекси 4 га тенг бўлган ҳолда Изинг модели параметрларига баъзи шартлар асосида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги исботланган.
- Саноксиз сондаги даврий бўлмаган (кучсиз даврий ҳам бўлмаган) янги Гиббс ўлчовлари қурилган.
- Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг модели учун тўртта кучсиз даврий, асосий ҳолатлар мавжуд бўлишлигининг зарур ва етарли шартлари (дарахт тартиби k га ва индекси икки ва тўрт бўлган нормал бўлувчилар параметрларига) топилган
- Тартиби $k \geq 1$ бўлган Кэли дарахтида аниқланган рақобатлашувчи ўзаро таъсирли Изинг моделининг ихтиёрий (индекси r бўлган) нормал бўлувчига нисбатан кучсиз даврий конфигурацияси асосий ҳолат бўлишлигининг зарур ва етарли шартлари топилган.

Амалий аҳамияти: Олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга. Уларни статистик физикада қўллаш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: Ўлчовлар назарияси, фазовий ўтишлар назарияси, эҳтимоллар назарияси, назарий ва математик физика соҳаларида изланишларда қўлланилиши мумкин.

RESUME

Thesis of Rahmatullaev Muzaffar Muhammadjanovich on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics, on specialty 01.01.01-mathematical analysis, subject: “On weak periodic states and Gibbs measures of some models on a Cayley tree”.

Key words: Cayley tree, normal subgroup, Ising model, weak periodic Gibbs measure, weak periodic ground states.

Subject of inquiry: Weak periodic Gibbs measures of the Ising model and weak periodic ground states of Ising model with competing interactions.

Aim of the inquiry: We study weak periodic Gibbs measures of the Ising model and weak periodic ground states of Ising model with competing interactions.

Methods of the inquiry: Methods of Markov random fields and recurrent equations of this theory. Also methods of measure theory and contractive maps, Pirogov-Sinay theory.

The results achieved and their novelty: The main results of work are the following:

- For Ising model on a Cayley tree under some conditions it is proved that there are five weak periodic Gibbs measures corresponding to arbitrary normal subgroup of index two.
- In case of normal subgroups of index four under some conditions on parameters of Ising model it is shown that there are seven weak periodic Gibbs measures.
- An uncountably many new non periodic (and non weak periodic) Gibbs measures are constructed.
- For Ising model with competing interactions sufficient and necessary conditions are obtained under which there are four weak periodic ground states.
- For arbitrary normal subgroup of index r sufficient and necessary conditions are given under which a configuration is ground state of the Ising model with competing interactions on Cayley tree of order $k \geq 1$.

Practical value: the results of the dissertation work have theoretical character. They can be applied in problem of statistical physics.

Sphere of usage: results of the work can be used in measure theory, theory of phase transitions, theory of probability, theoretical and mathematical physics.

