МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.946

РУСТАМОВА Мастура Самадовна

ОБ ИНТЕГРАЛЕ МАРТИНЕЛЛИ – БОХНЕРА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Т а ш к е н т – 2012

Работа выполнена на кафедре «Математический анализ и алгебра»
Каршинского государственного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Гулмирза Худайберганов**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Ганиходжаев Расул Набиевич**,

кандидат физико-математических наук, доцент **Отемуратов Байрамбай Пердебаевич**.

Ведущая организация: Сибирский Федеральный университет

Защита состоится «___» ____________ 2012 года в ___ часов на заседании специализированного совета Д.067.02.03 в Национальном Университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека по адресу: 100174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. Г-303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального Университета Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «____»_________________2012 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физико-математических наук М. Тухтасинов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. В комплексном анализе интегральные представления занимают важное место. В многомерном комплексном анализе интегральные представления также являются мощным конструктивным аппаратом.

В теории функции одной комплексной переменной интегральная формула Коши является единственной, притом она имеет разнообразные и важные применения. Формула Коши является универсальной формулой для любых областей, ядро которой голоморфно, а интеграл вычисляется по всей границе области. А в многомерном комплексном анализе есть несколько интегральных представлений, но у них нет универсальности или голоморфности. Последнее объясняется тем, что у интегральных представлений, которые справедливы для любых областей, ядро не голоморфно; а определенное интегральное представление с голоморфным ядром не представляется возможным для любых областей или интеграл не вычисляется по всей границе области.

Мартинелли в 1938 году и Бохнер в 1943 году независимо нашли строгое доказательство теоремы Гартогса (Осгуда - Брауна) о стирании компактных особенностей голоморфных функций в $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$. Причем, Бохнер по сути дела, доказал теорему Гартогса для случая $\partial D \epsilon \mathbb{C}^1$ и $f \epsilon \mathbb{C}^1(\partial D)$ (хотя у него не было понятия CR функции).

Интегральное представление Мартинелли - Бохнера является первым интегральным представлением, в котором интеграл вычисляется по всей границе области и как интегральная формула Коши в комплексной плоскости имеет универсальное ядро не зависящей от вида области. Но в n – мерном пространстве $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ ядро Мартинелли - Бохнера является не голоморфным, но оно является гармонической функцией. Данное обстоятельство долгое время препятствовало широкому применению интеграла Мартинелли - Бохнера в многомерном комплексном анализе.

В 70-е годы прошлого века возрос интерес к представлению Мартинелли – Бохнера. Это связано с повышением внимания к интегральным методам в многомерном комплексном анализе. Кроме того, оказалось, что весьма общее интегральное представление Коши – Фантаппье, найденное Лере, легко получается из представления Мартинелли – Бохнера. И ещё, появилось в тоже время представление Коппельмана для внешних форм, которая является обобщением представления Мартинелли – Бохнера. Ядро в формуле Коппелмана строится так же как ядро Мартинелли – Бохнера с помощью производных фундаментального решения уравнения Лапласа. В те годы было показано, что, несмотря на не голоморфное ядро, представление Мартинелли – Бохнера справедливо только для голоморфных функций. В 1975 году Харви и Лоусон получили результат о натягивании комплексных пленок на нечетномерные многообразия, в основе которого лежит формула Мартинелли – Бохнера.

В 1969 году Вайнсток доказал формулу Мартинелли -Бохнера для непрерывных функций f $(\partial D \in C^{\infty})$. В работах А. М. Кытманова, С.Г.Мысливец были рассмотрены вопросы о вычисление интеграла Мартинелли – Бохнера в шаре в $\mathbb{C}^n$ и о некоторых его приложениях, о голоморфности непрерывных функций, представимых интегралом Мартинелли – Бохнера, о характеризации шара с помощью оператора Мартинелли – Бохнера.

Ш. Ярмухамедов получил распространение формулы Мартинелли-Бохнера на неограниченные области.

В работе Хенкина и Лейтерера формула Мартинелли – Бохнера распространяется на области D на многообразии Штейна.

Еще одним обобщением формулы Мартинелли – Бохнера является формула Андреотти – Норге.

Мы рассматриваем (n+1) мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ и исследуем вычисление интеграла Мартинелли – Бохнера, спектр оператора Мартинелли – Бохнера в полупространстве $\mathbb{C}^{n+1}_{+}$.

Степень изученности проблемы. Интегральное представление Бохнера – Мартинелли изучалась многими учеными. В этих работах рассматривались ограниченные области. Обобщение формулы Бохнера – Мартинелли для неограниченной области рассматривалось в работе Ш. Ярмухамедова, но у него рассмотрена другая конструкция. Интегральное представление Бохнера – Мартинелли в полупространстве не исследовано.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Каршинского государственного университета (протокол № 5 от 29 декабря 2011г.) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры «Математический анализ и алгебра» Каршинского государственного университета.

Цель исследования. Целью диссертационной работы является вычисление интеграла Бохнера – Мартинелли в полупространстве найти собственные функции и собственные значения оператора Бохнера – Мартинелли в полупространстве.

Задачи исследования. Основные задачи, решаемые в данной диссертации следующие:

- Вычисление сужения ядра Бохнера – Мартинелли в полупространстве.
- Получение формулы для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^{∞} в полупространстве.
- Получение доказательство аналога теоремы Лиувилля для функций из класса L^{p}.
- Получение формулы для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^{p} в полупространстве.

- Исследование свойства спектра оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^∞ в полупространстве.
- Исследование свойства спектра оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^p в полупространстве.

Объект и предмет исследования: Объектом и предметом исследования являются функции многих комплексных переменных**.**

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы теории функций комплексных переменных, методы теории интеграла в многомерном комплексном анализе.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

- Исследование сужения ядра Бохнера – Мартинелли в полупространстве.
- Аналог теоремы Лиувилля для функций из класса L^p в полупространстве.
- Формулы для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^∞ в полупространстве.
- Формулы для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^p в полупространстве.
- Исследование свойства спектра оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^∞ в полупространстве.
- Исследование свойства спектра оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^p в полупространстве.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Вычислено сужение ядра Бохнера – Мартинелли в полупространстве.
2. Получена формула для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^∞ в полупространстве.
3. Получена формула для вычисления интеграла Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^p в полупространстве.
4. Доказан аналог теоремы Лиувилля для функций из класса L^p в полупространстве
5. Вычислены собственные функции и собственные значения оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^∞ в полупространстве.
6. Вычислены собственные функции и собственные значения оператора Бохнера – Мартинелли от функций из класса L^p в полупространстве.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Полученные результаты могут быть использованы в многомерном комплексном анализе и его приложениях.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в научных исследованиях специалистами по многомерному комплексному анализу.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана имени М. Улугбека под руководством профессора А. Садуллаева, а также регулярно докладывались на областном научном семинаре «Актуальные вопросы математики » кафедры «Математический анализ и алгебра» Каршинского ГУ под руководством к.ф.-м.н. А. Имомова.

По материалам диссертации сделаны доклады на республиканской научной конференции "Новые теоремы молодых математиков -2006", (Наманган, 15-16 ноября 2006 года), на международной конференции "Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач" (Самарканд, 19-20 октября 2007 года), на республиканской научной конференции «Проблемы современной математики» (Карши, 22-23 апреля 2011года), на республиканской научной конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» (Нукус, 11-12 мая 1912 года).

Опубликованность результатов. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[9] в виде статьей и тезисов конференций, список которых приведен в конце автореферата. В совместных с Г. Худайбергановым работах Г. Худайберганову принадлежат постановки задач, М.С. Рустамовой решение этих задач.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы. Параграфы, теоремы, леммы, определения и формулы занумерованы двумя цифрами, первая из которых указывает номер главы. В конце работы приведен список литературы из 67 наименований. Объем диссертации 90 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации посвящена постановки задачи и предварительным сведениям об интеграле Мартинелли - Бохнера в шаре. В предварительных сведениях приводятся необходимые обозначения и определения, и еще известные результаты, используемые в дальнейшем.

Во второй главе речь идет о вычислении интеграла Мартинелли - Бохнера в полупространстве.

Будем рассматривать для удобства $n+1$ - мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$ переменных $z=(z', z_{n+1})=(z_1,\dots,z_n,z_{n+1})$.

Если $z,w\in\mathbb{C}^{n+1}$, то $\langle z,\overline{w}\rangle = z_1\overline{w}_1+\dots+z_n\overline{w}_n+z_{n+1}\overline{w}_{n+1}$, и $|z|=\sqrt{\langle z,\overline{z}\rangle}$, где $\overline{z}=\ \overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n,\overline{z}_{n+1}$.

Если точка $z\in\mathbb{C}^{n+1}$, то

$$\operatorname{Re} z=(\operatorname{Re} z_1,\dots,\operatorname{Re} z_n,\operatorname{Re} z_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\quad \operatorname{Re} z_j=x_j,$$

а

$$\operatorname{Im} z=(\operatorname{Im} z_1,\dots,\operatorname{Im} z_n,\operatorname{Im} z_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1},\quad \operatorname{Im} z_j=y_j,$$

т.е. $z_j=x_j+iy_j,\quad j=1,\dots,n,n+1.$

Ориентация $\mathbb{C}^{n+1}$ определяется порядком координат

$$(x_1,...,x_n,,x_{n+1}y_1,...,y_n,y_{n+1}).$$

Таким образом, форма объема dv имеет вид:

$$dv = dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n+1} \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dy_{n+1} = dx \wedge dy =$$

$$= (i/2)^{n+1} dz \wedge d\bar{z} = (-i/2)^{n+1} d\bar{z} \wedge dz \quad ,$$

где $dz = dz_1 \wedge ... \wedge dz \wedge dz_{n+1}$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ внешнюю дифференциальную форму $U(\varsigma, z)$ типа $(n+1,n)$ вида

$$U(\varsigma,z) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\varsigma}_k - \bar{z}_k}{|\varsigma - z|^{2n}} d\bar{\varsigma}[k] \wedge d\varsigma, \tag{1}$$

где $d\varsigma = d\varsigma_1 \wedge ... \wedge d\varsigma_{n+1}$, $d\bar{\varsigma}[k] = d\bar{\varsigma}_1 \wedge ... d\bar{\varsigma}_{k-1} \wedge d\bar{\varsigma}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{\varsigma}_{n+1}$.
Она является ядром интегрального представления Мартинелли – Бохнера.

Рассмотрим (верхнее) полупространство

$$\mathbb{C}_+^{n+1} = \{(z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}_+^{n+1} : (z', z_{n+1}) = (z_1,...,z_n,z_{n+1}), \operatorname{Im} z_{n+1} > 0\},$$

граница которого

$$\partial\mathbb{C}_+^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+1} = \{(z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}_+^{n+1} : (z', z_{n+1}) = (z_1,...,z_n,z_{n+1}), \operatorname{Im} z_{n+1} = 0\}.$$

Основным результатом первого параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.1. Сужение ядра $U(\varsigma, z)$ на $\mathbb{R}^{2n+1}$ равно

$$\frac{1}{2i} \frac{\bar{\varsigma}_{n+1} - \bar{z}_{n+1}}{y_{n+1}} P(\varsigma, z', y_{n+1})\, dv, \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1}, \varsigma \in \mathbb{R}^{2n+1} \tag{2}$$

где функция

$$P(\varsigma, z', y_{n+1}) = \frac{n!}{\pi^{n+1}} \frac{y_{n+1}}{\left(|\varsigma - z|^2 + |\xi_{n+1} - x_{n+1}|^2 + y_{n+1}^2\right)^{n+1}}, \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1}, \varsigma \in \mathbb{R}^{2n+1},$$

является ядром Пуассона для полупространства $\mathbb{C}^{n+1}$, а $\varsigma = (\varsigma', \varsigma_{n+1}) = (\varsigma_1,...,\varsigma_n,\varsigma_{n+1})$, $\varsigma_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1,...,n,n+1$, и $dv = d\xi_1 \wedge ... \wedge d\xi_{n+1} \wedge d\eta_1 \wedge ... \wedge d\eta_n$.

Во втором параграфе второй главы получена формула для вычисления интеграла Мартинелли - Бохнера в полупространстве для функций из класса $f \in L_{n+1}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Приведем следующее определение.

Определение 2.1. Пусть функция $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$, т.е. f принадлежит пространству существенно ограниченных функций в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Будем говорить, что $f \in L_{n+1}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$, если f измерима на $\mathbb{R}^{2n+1}$ и функция $(1+|x_{n+1}|) f(z', x_{n+1})$ принадлежит пространству $L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Норму f в $L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$ обозначим через $\|f\|_{\infty}$. Ясно, что если

$f \in L^{\infty}_{n+1}(\mathbb{R}^{2n+1})$, то $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$

и

$$x_{n+1} f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$$

(и обратно).

Рассмотрим функцию $f \in L^{\infty}_{n+1}(\mathbb{R}^{2n+1})$, и обозначим через f^*ее интеграл Пуассона:

$$f^*(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\varsigma, z) P(\varsigma', \xi_{n+1}, z) dv .$$

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2. Если функция $f \in L^{\infty}_{n+1}(\mathbb{R}^{2n+1})$ и нормы функций

$$f^*(\cdot, y_{n+1}) \cdot x_{n+1} - y_{n+1} f_1(\cdot, y_{n+1})$$

равномерно ограничены в $L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$ при $y_{n+1} > 0$, то интеграл Мартинелли - Бохнера от функции f сходится и выполняется равенство

$$M\left[f\right] = \frac{1}{2} f^* + \frac{i}{2} f_1 , \qquad (3)$$

где $f_1 = \int\limits_1^y \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\left(x, \xi\right) d\xi + \psi(x)$, и $\tilde{\Delta}\psi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x_{n+1}}(x,1)$.

В третьем параграфе второй главы получен аналог теоремы Лиувилля для гармонических функций из класса L^p.

Рассмотрим пространство $L^p\left(\mathbb{R}^{2n+1}\right)$, $1 < p < \infty$, т.е. пространство всех измеримых функций f таких, что $\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Норму в этом пространстве обозначим через $\|f\|_p$, тогда $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

В теории голоморфных отображений одним из важных теорем является теорема Лиувилля.

Теорема 2.3. (Лиувилль). Если целая функция $f(z)$ комплексных переменных $z = (z_1, ..., z_n)$ ограничена, т.е. $|f(z)| \le M < +\infty$, $z \in \mathbb{C}^n$, то $f(z)$ есть константа.

Это утверждение является, одним из основных в теории аналитических функций. Теорема впервые опубликовано в 1884 году. Для случая $n=1$, Ж.Лиувилль (J. Liouville) излагал его на лекциях в 1847 году, откуда и произошло название.

Лиувилля теорема допускает обобщения в различных направлениях. Например, $f(z)$ целая функция в $\mathbb{C}^n$ и $|f(z)| \le M\ 1+|z|^m$, $z \in \mathbb{C}^n$ для некоторого, целого $m \ge 0$ то $f(z)$ есть многочлен по переменным $z=(z_1,...,z_n)$ степени не выше m. Далее если $u(x)$ - действительная гармоническая функция во всем числовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,...,x_n)$, причем $u(x) \le M\ 1+|x|^m$ (или $-u(x) \le M\ 1+|x|^m$), $x \in \mathbb{R}^n$, то $u(x)$ есть гармонический многочлен по переменным $(x_1,...,x_n)$ степени не выше $2n+1$.

Рассмотрим пространство $L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$, $1 \le p < \infty$, т.е. пространство всех измеримых функций с суммируемой p-й степенью f таких, что

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

Норму в этом пространстве обозначим через $\|f\|_p$, тогда $\|f\|_p \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+1}} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Для функций из этого пространства доказан аналог теоремы Лиувилля.

Основным результатом третьего параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.4. Если гармоническая функция $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, то она равна нулю.

В четвертом параграфе второй главы получена формула для вычисления интеграла Мартинелли - Бохнера в полупространстве для функций из класса $f \in L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$.

В этом параграфе мы будем работать функциями из пространства $L_p(X,\mu)$. Поэтому познакомимся с определением этого функционального пространства**.**

Пусть X - множество с мерой μ. Через $L_p(X,\mu)$, $1 \le p < \infty$, мы обозначим совокупность классов эквивалентности μ-измеримых функций с суммируемой p-й степенью. Положим для $f \in L_p(X,\mu)$

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

(Здесь мы не делаем различия между классом эквивалентности $f \in L_p(X,\mu)$ и конкретной функцией $f(x) \in f$). Нам понадобится неравенства Минковского: $\| f+g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p$, которая вытекает из неравенства Гёльдера: $\left| \int_X fg d\mu \right| \le \| f \|_p \| g \|_p$, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Ясно , что $L_p(X,\mu)$ - линейное нормированное пространство при $p>1$.

В случае σ - конечной меры эти неравенства превращаются в соответствующие неравенства для последовательностей.

Основным результатом четвертого параграфа второй главы является следующее:

Теорема 2.5. Если гармоническая функция $f \in L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$, $1 \le p < \infty$ и нормы функций $y_{n+1} f_1(\cdot, y_{n+1})$ равномерно ограничены в $L^p(\mathbb{R}^{2n+1})$ при $y_{n+1}>0$, то интеграл Мартинелли - Бохнера от функции f сходится и выполняется равенство

$$M\ f = \frac{1}{2} f^* + \frac{i}{2} f_1 .$$

где $f_1 = \int_1^y \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n+1}}\ x,\xi\ d\xi + \psi(x)$, и $\tilde{\Delta}\psi = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x_{n+1}}(x,1)$.

В третьей главе исследованы свойства спектра оператора Мартинелли - Бохнера в полупространстве.

В первом параграфе третьей главы речь идет о собственных функциях оператора Мартинелли - Бохнера для функций из класса L^∞ в полупространстве. Для этого нам понадобится интеграл Пуассона данной функции.

Интеграл Пуассона функции $f \in L^\infty_{n+1}(\mathbb{R}^{2n+1})$ определим в виде

$$f^*(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\varsigma, z) P(\varsigma', \xi_{n+1}, z) dv$$

и обозначим через f^*.

Как известно функция f^* гармонична в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, ее граничные значения почти всюду совпадают с f на $\mathbb{R}^{2n+1}$ и при фиксированном $y_{n+1}>0$

$$\| f^*(\cdot, y_{n+1}) \|_\infty \le \| f \|_\infty$$

при некоторых условиях для всех $y_{n+1}>0$. И обратно если нормы $\| f^*(\cdot, y_{n+1}) \|_\infty$ некоторой гармонической в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ функции f^* равномерно ограничены, то существует почти всюду ее граничные значения на $\mathbb{R}^{2n+1}$, и f^* является интегралом Пуассона от своих граничных значений.

Определим функцию

$$f_1(z) = \int_1^{y_{n+1}} \frac{\partial f^*}{\partial x_{n+1}}(z', x_{n+1}, \eta_{n+1}) d\eta_{n+1} + \varphi(z', x_{n+1}),$$

где $\varphi(z', x_{n+1})$ есть некоторое решение уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\tilde{\Delta}\varphi = -\frac{\partial^2 f^*}{\partial y_{n+1}\partial x_{n+1}}$$

(при условии существования граничных значений данной функции на $\mathbb{R}^{2n+1}$), где Δ -оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $\tilde{\Delta}$- оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$\Delta = \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \qquad \tilde{\Delta} = \sum_j^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_j^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}.$$

Тогда функция f_1 гармонична в $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

Теорема 3.1. Рассмотрим функцию $f \in L_{n+1}^{\infty}$ и пусть для таких функций справедливо $\| f^*(\cdot, y_{n+1})\|_\infty = O(1/y_{n+1})$ при $y_{n+1} \to \infty$. Собственными функциями оператора Мартинелли - Бохнера из этого класса являются функции одного переменного z_{n+1}, голоморфные по z_{n+1} с собственным числом, равным 1, и, соответственно, функции антиголоморфные по z_{n+1} с собственным числом, равным 0, и только они.

При доказательстве теоремы используются теорема Лиувилля и формула Сохоцкого – Племеля.

Теорема Лиувилля приведена в параграфе 3 главы 2. Теперь приведем формулу Сохоцкого – Племеля.

Пусть D- ограниченная область с кусочно - гладкой границей, f - интегрируемая функция на ∂D $(f \in L^1(\partial D))$. Рассмотрим интеграл (типа) Бохнера –Мартинелли

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\varsigma) U(\varsigma, z), \qquad z \notin \partial D \quad . \tag{4}$$

Она является функцией, гармонической в D и $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$, кроме того, $F(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{2n-1}}\right)$ при $|z| \to \infty$. Если точка $z \in \partial D$, то интеграл в формуле (4), вообще говоря, не существует как несобственный, поскольку подынтегральная функция имеет особенность $\frac{1}{|\varsigma - z|^{2n-1}}$. Поэтому для точек $z \in \partial D$ будем рассматривать главное значение по Коши интеграла Мартинелли - Бохнера :

$$v.p. \int_{\partial D} f(\varsigma) U(\varsigma, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\partial D \setminus B(z,\varepsilon)} f(\varsigma) U(\varsigma, z), \qquad z \in \partial D.$$

В дальнейшем знак главного значения (v.p.)будем иногда опускать т.е. всегда будем считать, что интеграл вида (4) понимается в смысле главного значения, если $z \in \partial D$.

Пусть $z \in \partial D$, обозначим через $\tau(z)$ выражение

$$\tau(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{vol\ S(z,\varepsilon) \bigcap D}{vol S(z,\varepsilon)}.$$

Другими словами, $\tau(z)$ есть телесный угол касательного конуса к поверхности ∂D в точке z. Поскольку мы рассматриваем область D с кусочно-гладкой границей, то величина $\tau(z)$ определена и не равна нулю.

Теорема 3.2. Пусть D - ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D и $f \in C^{\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда интеграл Бохнера-Мартинелли F^{+} непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и $F^{+} \in C^{\alpha}(\overline{D})$, а интеграл F^{-} непрерывно продолжается на $C^{n} \setminus D$ и $F^{-} \in C^{\alpha}(C \setminus D)$. Кроме того, выполняются формулы Сохоцкого-Племеля

$$F^{+}(z) = (1-\tau(z)) f(z) + v.p. \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z),$$

$$F^{-}(z) = -\tau(z) f(z) + v.p. \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), z \in \partial D. \tag{5}$$

Если $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n+1})$, то интеграл Мартинелли - Бохнера от такой функции может расходиться, например, $f = 1$. Его нужно тогда рассматривать в смысле главного значения по Коши:

$$v.p. \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(\varsigma) U(\varsigma, z) = \lim_{R \to \infty} \int_{B_R} f(\varsigma) U(\varsigma, z), \quad z \notin \mathbb{R}^{2n+1},$$

где B_R - шар с центром в нуле радиуса R в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Предложение 3. 1. Справедливо равенство

$$v.p. \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} U(\varsigma, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & y_{n+1} > 0, \\ -\dfrac{1}{2}, & y_{n+1} < 0. \end{cases}$$

Во втором параграфе третьей главы исследуется собственные функции и собственные значения оператора Мартинелли – Бохнера для измеримых функций с суммируемой p-й степенью в полупространстве.

Рассматриваем пространство $L^{p}(\mathbb{R}^{2n+1})$, $1 \le p < \infty$, пространство всех измеримых функций в $\mathbb{R}^{2n+1}$ с суммируемой p-й степенью, для которых нормы определяются в виде

$$\|f\|_{p} = \left(\int_{\mathbb{R}^{m}} |f(x)|^{p} \, dv \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty .$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.3. Рассмотрим функцию $f \in L^{p}(\mathbb{R}^{2n+1})$. Пусть для нормы функции $f^{*}(\cdot, y_{n+1})$ справедливо

$$\left\| f^{*}(\cdot, y_{n+1}) \right\|_{p} = O(1/ y_{n+1}) \tag{6}$$

при $y_{n+1} \to +\infty$. Собственными функциями оператора Мартинелли – Бохнера из этого класса является только нулевая функция.

В заключение автор выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю - доктору физико–математических наук, профессору Гулмирзе Худайберганову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена вычислению интегральной формулы Мартинелли – Бохнера в полупространстве и исследованию интегрального оператора Мартинелли – Бохнера в полупространстве.

По основным результатам диссертационного исследования приходим к следующим выводам:

Вычислено сужение ядра Мартинелли - Бохнера на границу полупространства.

Получена формула для вычисления интеграла Мартинелли – Бохнера от функций из класса L^{∞} в полупространстве.

Получено доказательство аналога теоремы Лиувилля для функций из класса L^{p} .

Получена формула для вычисления интеграла Мартинелли – Бохнера от функций из класса L^{p} в полупространстве.

Исследованы свойства оператора Мартинелли – Бохнера от функций из класса L^{∞} в полупространстве и найдены собственные функции и собственные значения оператора Мартинелли – Бохнера в полупространстве для функций из класса L^{∞} в полупространстве .

Исследованы свойства оператора Мартинелли – Бохнера от функций из класса L^{p} в полупространстве и найдены собственные функции и собственные значения оператора Мартинелли – Бохнера в полупространстве для функций из класса L^{p} в полупространстве.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении целей исследований диссертационной работы. Полученные результаты являются новыми и в совокупности вносят существенный вклад в теорию интегральных представлений многомерного комплексного анализа.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Рустамова М.С. Сужение ядра Бохнера – Мартинелли в полупространстве // Журнал “Насаф зиёси”. –Карши, 2005. –№ 2-3. –С. 92-93.
2. Рустамова М. С. О собственных функциях и собственных значениях оператора Бохнера – Мартинелли в полупространстве // Материалы Республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков – 2006». 15 – 16 ноября 2006, –Наманган, 2006. –С. 49-50.
3. Рустамова М.С. Представление Бохнера – Мартинелли в полупространстве // Материалы международной конференции “Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач”. 19 – 20 октября 2007. –Самарканд, 2007. –С. 149–150.
4. Худайберганов Г.Х., Рустамова М.С. О свойствах оператора Бохнера - Мартинелли в полупространстве // Вестник Сибирского Федерального университета. Серия математики и физики. –Красноярск, 2008. – №1. –С. 94 – 99.
5. Рустамова М.С. Вычисление интеграла Бохнера – Мартинелли в полупространстве // Журнал «ҚарДУ хабарлари». – Карши, 2010. – № 3. – С. 217 – 220.
6. Рустамова М.С. О собственных функциях оператора Бохнера - Мартинелли в полупространстве // Узб. Матем. журн. –Ташкент, 2011. – №1. –С. 143 – 150.
7. Рустамова М.С. Сходимость интеграла Бохнера – Мартинелли в полупространстве // Материалы республиканской конференции «Проблемы современной математики». 22 – 23 апреля 2011. –Карши, 2011. – С. 217 – 220.
8. Рустамова М.С. Аналог теоремы Лиувилля для функций из класса $L^p(R^{2n+1})$ // Материалы научно – практической конференции «Математика фани ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари». 8-9 ноября 2011, –Андижан, 2011. –С. 44 – 45.
9. Рустамова М. О вычисление интеграла Мартинелли – Бохнера для функций из пространства L^∞ в полупространстве // Материалы Республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа». 11-12 мая 2012. –Нукус, 2012. –С. 176 – 178.

Физика - математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Рустамова Мастура Самадовна**нинг 01.01.01.- математик анализ ихтисослиги бўйича **“ Ярим фазода Мартинелли - Бохнер интеграли ҳақида ”** мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: юқори ярим фазо, Мартинелли - Бохнер интеграл формуласи, Мартинелли – Бохнер интеграл оператори, кўп комплекс ўзгарувчили функциялар.

Тадқиқот объектлари: кўп комплекс ўзгарувчили функциялар, юқори ярим комплекс фазо.

Ишнинг мақсади: Мартинелли – Бохнер интегралини ярим фазода ҳисоблаш, Мартинелли – Бохнер интеграл операторининг турли функционал фазолардаги спектрал хоссаларини тадқиқ қилиш ва унинг шу функциялар учун хос функциялари ва хос сонларини ярим фазода топиш.

Тадқиқот методлари: кўп ўлчамли комплекс анализ усуллари ва интеграл опреаторлар спектрал назарияси усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

1. Мартинелли – Бохнер ядросини ярим фазо чегарасида ҳисобланган.
2. L^∞ функционал фазодан олинган функциялар учун ярим фазода Мартинелли – Бохнер интегралини ҳисоблаш формуласи топилган.
3. L^p синфга кирувчи гармоник функциялар учун Лиувилль теоремаси аналоги исботланган.
4. L^p функционал фазодан олинган функциялар учун ярим фазода Мартинелли – Бохнер интегралини ҳисоблаш формуласи топилган.
5. Мартинелли – Бохнер интеграл операторининг L^∞ва L^p синф функциялари учун ярим фазода хос функциялари ва хос сонлари топилган.

Амалий аҳамияти: олинган натижалар назарий аҳамиятга эга. Бу натижалар кўп ўлчамли комплекс анализнинг интеграл формулалари назариясини бойитишга маълум даражада ҳисса қўшади.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: ишда олинган натижаларни кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси бўйича махсус курслар ўқишда ҳамда шу йўналишнинг кейинги ривожланишида тадбиқ этилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: олинган натижалар ва методлар кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси бўйича магистрантларга махсус курслар ўқитишда ва шу йўналишнинг кейинги ривожланишида ҳамда табиий фанларнинг бошқа соҳаларида қўлланилиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации **Рустамовой Мастуры Самадовны** на тему **«Об интеграле Мартинелли – Бохнера в полупространстве»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01.- Математический анализ.

Ключевые слова: верхнее комплексное полупространство, интегральная формула Мартинелли – Бохнера, интегральный оператор Мартинелли – Бохнера.

Объекты исследования: функции многих комплексных переменных, верхнее комплексное полупространство.

Цель работы: вычисление интеграла Мартинелли - Бохнера в полупространстве, исследование свойств оператора Мартинелли - Бохнера в полупространстве для функций из разных функциональных пространств и нахождение собственных функций и собственных значений в полупространстве.

Методы исследования: методы теории функций многих комплексных переменных, методы спектральной теории интегральных операторов.

Полученные результаты и их новизна: все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Вычислено сужение ядра Мартинелли - Бохнера на границе полупространства.
2. Получена формула для вычисления интеграла Мартинелли - Бохнера от функций из класса L^{∞} в полупространстве.
3. Доказан аналог теоремы Лиувилля для гармонических функций из класса L^{p} в полупространстве.
4. Получена формула для вычисления интеграла Мартинелли - Бохнера от функций из класса L^{p} в полупространстве.
5. Вычислены собственные функции и собственные значения оператора Мартинелли - Бохнера для функций из классов L^{∞} и L^{p} в полупространстве.

Практическая значимость: диссертация носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для магистрантов и в дальнейшем развитии данного направления.

Область применения: полученные результаты вносят определенный вклад в теорию интегральных представлений многомерного комплексного анализа, а также могут быть использованы при решении различных задач современной теории многомерных интегральных представлений.

R E S U M E

Thesis of **Rustamova Mastura Samadovna** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty on 01.01.01. – Mathematical analysis, subject: **“About integral of Martinelli – Bochner on the semi space”**.

Key words: top complex semi space, formula of Martinelli – Bochner`s integral, integral operator of Martinelli – Bochner`s, functions of many complex variables.

Subjects of research: finding their of eigen values and eigen functions on the semi space.

Purpose of work: calculation of the integral of Martinelli – Bochner on the semi space the study of propetties of the Martinelli – Bochner operator on the semi space of functions from various functional spaces.

Methods of research: methods of the theory of functions of many complex variables, methods of the spectral theory of integral operators.

The results obtained and their novelty: all obtained results are new and consists of the following:

1. Of Martinelli – Bochner kernel is fended on the border of the semi space.
2. The formula of calculation of Martinelli – Bochner integral of functions from the class L^{∞} in the semi space is obtained.
3. The version of Liuvill`s theorem for harmonic functions from the class L^{p} in semi space is proved.
4. The formula of calculation of Martinelli – Bochners integral of functions from the class L^{p} on the semi space is obtained.
5. The eigen functions and eigen values of the Martinelli – Bochner operator of functions from the classes L^{∞} and L^{p} on the semi space are calculated.

Practical value: the result from the thesis has theoretical character.

Degree of implementation and economic effectiveness: the results com be used for reading special courses of functional theory.

Field of application: The obtained results may be used in solving of various problems of the modern theory multivariate complex analysis.