

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.ФМ.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҚОШИДАГИ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ**

ХУДОЙБЕРДИЕВ АБРОР ХАКИМОВИЧ

**ЧЕКЛИ ЎЛЧАМЛИ КОМПЛЕКС ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ
СТРУКТУРАВИЙ НАЗАРИЯСИ ВА НИЛПОТЕНТ ЛЕЙБНИЦ
СУПЕРАЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФИ**

**01.01.06 – Алгебра
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the abstract of the doctoral dissertation

Худойбердиев Аброр Хакимович

Чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраларининг структуравий назарияси ва нилпотент Лейбниц супералгебраларининг таснифи 3

Худойбердиев Аброр Хакимович

Структурная теория конечномерных комплексных алгебр Лейбница и классификация нильпотентных супералгебр Лейбница..... 27

Khudoyberdiev Abror Khakimovich

Structural theory of finite dimensional complex Leibniz algebras and classification of nilpotent Leibniz suberalgebras 51

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works..... 72

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.ФМ.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҚОШИДАГИ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ**

ХУДОЙБЕРДИЕВ АБРОР ХАКИМОВИЧ

**ЧЕКЛИ ЎЛЧАМЛИ КОМПЛЕКС ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ
СТРУКТУРАВИЙ НАЗАРИЯСИ ВА НИЛПОТЕНТ ЛЕЙБНИЦ
СУПЕРАЛГЕБРАЛАРИНИНГ ТАСНИФИ**

**01.01.06 – Алгебра
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № 30.09.2014/В2014.3-4.FM22 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:

Аюпов Шавкат Абдуллаевич

физика-математика фанлари доктори, профессор,
академик

Расмий оппонентлар:

Хаджиев Джавват

физика-математика фанлари доктори, профессор,
академик

Кудайбергенов Каримберган Кадирбергенович

физика-математика фанлари доктори

Аллаков Исмаил

физика-математика фанлари доктори, доцент

Етакчи ташкилот:

**Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан
вазирлигининг Математика ва математик
моделлаштириш институти**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 16.07.2013.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «24» мартъ 2016 йил соат 10⁰⁰ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nu.uz)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (М 14912 рақам билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2016 йил «19» феврал куни тарқатилди.
(2016 йил «19» февралдаги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.А.Азамов

Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.А.Абдушукуров

Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д., профессор

У.А.Розиков

Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д. профессор

Кириш (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Алгебраик воситалар квант назариясининг элементар зарралар, қаттиқ ва кристал моддаларнинг хусусиятлари, популяцион биология масалалари, иқтисодий масалаларнинг моделларини таҳлил қилишда муҳим ҳисобланади. Муайян айният (яъни аксиома) билан аниқланган ассоциатив алгебралар синфининг квадрат матрицаларни кўпайтиришга нисбатан ёпиқлиги маълум бўлгач, алтернатив, Ли ва Йордан алгебралари назарияси вужудга келди ва ривожлана бошлади. Бунда алгебраларнинг бу омилларини математиканинг турли соҳалари билан хилма-хил алоқалари муўим омил бўлди. Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси ҳисобланиб, Ли алгебраларида ўринли бўладиган бир қанча хоссаларни Лейбниц алгебралари учун ҳам давом эттириш мумкин. Ли алгебралари назариясидан маълум бўлган теоремаларни Лейбниц алгебралари учун исботлаш билан бирга Ли бўлмаган Лейбниц алгебраларининг хоссаларини топиш билан боғлиқ тадқиқотлар ҳозирги кунда ноассоциатив алгебралар назариясининг устивор йўналишларидан бири бўлиб келмоқда.

Ли алгебраларининг классик назариясидан маълумки, чекли ўлчамли Ли алгебралари устида олиб бориладиган тадқиқотлар ечилувчан Ли алгебраларини таснифлашга олиб келинади. Ўз навбатида Лейбниц алгебралари ҳам ярим содда Ли алгебралари ва ечилувчан радикалнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланади. Нилрадикали махсус типга эга бўлган ечилувчан алгебралар турли хил физик моделлар билан боғлиқдир. Шунинг учун Ли алгебралари назариясида бўлгани каби, нилрадикали берилган чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларни тасниф қилиш ҳам долзарб муаммолардан ҳисобланади.

Нилпотент алгебралар ечилувчан алгебраларнинг қисм синфи ҳисобланиб, барча нилпотент алгебраларни тасниф қилиш масаласи ўта мураккабдир. Шунинг учун, нилпотент алгебраларни қўшимча шартлар асосида тасниф қилинади. Ҳусусан, уларни таснифлашда нилиндекси аниқ бўлган алгебралар синфини ажратиб олиш асосий омиллардан бири бўлиб, бундай синфларнинг дастлабкиси филиформ Лейбниц алгебраларидир. Филиформ Лейбниц алгебралари нисбатан содда шартларга эга бўлишига қарамасдан, етарлича мураккаб тузилишга эга ва уларни таснифлашда градуировка шартини қўллаш қулай ҳисобланади. Максимал градуировканинг самарадорлиги шундаки, у алгебранинг кўпайтириш жадвалидаги структуравий ўзгармаслар ҳақида аниқ маълумот беради.

Сиқиш, бузилиш ва деформация тушунчалари алгебрага физикадан кириб келган бўлиб, ҳусусан Ли алгебраларини сиқиш, физик нуқтаи назардан, бирор физик модел бошқасини инвариантлар группаси таъсирининг лимити ёрдамида ҳосил қилинганлигини англатади. Ўз навбатида, деформация берилган типдаги объектлар кўпхиллигининг кичик атрофидаги локал тузилишини характерлайди. Шунинг учун, Лейбниц алгебраларининг деформациялари, геометрик хоссалари, структуравий назариялари ва

когомологиясини ўрганиш жуда муҳимдир. Берилган алгебраик кўпхиллик чекли сондаги келтирилмас компоненталарнинг бирлашмасидан иборат бўлаганлиги, қаттиқ алгебралар орбиталарининг ёпилмаси эса келтирилмас компонентани берганлиги сабабли, чекли ўлчамли алгебраларнинг геометрик хоссаларини аниқлашда қаттиқ алгебраларни топиш алоҳида аҳамиятга эга. Лейбниц алгебралари ва уларнинг когомологик хоссаларининг, Йордан алгебралари, Ли алгебралари, ҳамда уларнинг умумлашмалари билан ўзаро алоқадорлиги диссертация мавзуси билан боғлиқ тадқиқотларнинг заруратини ифодалайди.

Ли алгебраларининг яна бир умумлашмаси ҳисобланган Ли супералгебралари математик физиканинг суперсимметрия хоссалари ёрдамида аниқланган. Лейбниц супералгебралари нафақат Лейбниц алгебраларининг, балки Ли супералгебраларининг ҳам умумлашмаси ҳисобланиб, уларнинг хоссаларини аниқлашда табиий равишда Лейбниц алгебралари ва Ли супералгебралари кўпхиллигидаги усуллардан фойдаланилади. Лейбниц алгебрасидаги каби максимал нилиндексли ёки нилиндекси ўлчамига тенг бўлган нилпотент Лейбниц супералгебраларини таснифлаш чекли ўлчамли Лейбниц супералгебралари назариясининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг Ф4 «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи. Чекли ўлчамли Ли ва Лейбниц алгебраларини таснифлаш ва уларнинг когомологик хусусиятларини аниқлаш бўйича етакчи мамлакатларнинг илмий марказлари ва университетларида, жумладан, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Haute Alsace, Institut de mathématiques de Jussieu (Франция); University of Seville, University of Santiago de Compostela, Complutense University of Madrid (Испания); University of Dusseldorf, Institut Computational Mathematics (Германия); University of Vienna (Австрия); Eötvös Loránd University (Венгрия); University of San-Diego, University of Iowa, University of Toledo (АҚШ); University of Sao Paulo (Бразилия); East China Normal University (Хитой); University of Putra Malaysia (Малайзия); University of Sydney (Австралия); Москва Давлат университети, С.Л.Соболев номидаги Математика институти (Россия); Математика ва математик моделлаштириш институтларида (Қозғоғистон) кенг қамровли илмий-тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Чекли ўлчамли комплекс Ли алгебраларининг бир қанча синфларини таснифлаш, нилпотент ва ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифини олиш ва уларнинг орбиталари ёпилмаларини топиш юзасидан олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида жаҳон миқёсида бир қанча долзарб масалалар ечилган бўлиб, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: табиий усулда градуирланган филиформ Ли алгебралари ва кичик ўлчамли нилпотент Ли алгебралари таснифланган (Institut de Recherche Mathématique

Avancée, Université de Haute Alsace); 7 ўлчамли нилпотент Ли алгебралари синфининг тўлиқ таснифи олинган (University of Toledo); уч ва тўрт ўлчамли Ли алгебраларининг барча орбиталари ёпилмалари топилган (University of Dusseldorf, Institut Computational Mathematics); нилрадикали табиий усулда градуирланган филиформ Ли алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Ли алгебраларининг таснифи олинган (Complutense University of Madrid); қаттиқ Лейбниц алгебраларининг когомологик иккинчи группаси нолга тенг эканлиги исботланган (Institut de mathématiques de Jussieu); табиий усулда градуирланган 2-филиформ ва квази-филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган (University of Seville); ўлчами 10 дан кичик бўлган барча филиформ Лейбниц алгебралари тавсифланган (University of Putra Malaysia); ихтиёрий чекли ўлчамли Лейбниц алгебрасининг ярим содда Ли алгебраси ва ечилувчан радикалнинг яримтўғри йиғиндиси шаклида ифодаланиши исботланган (University of Sydney).

Нилрадикали маълум бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш, кичик ўлчамли Лейбниц алгебраларининг орбиталари ёпилмаларини топиш, Лейбниц алгебралари кўпхиллигидаги қаттиқ алгебраларни аниқлаш, Ли ва Лейбниц алгебралари деформацияларини тавсифлаш, ҳамда уларнинг дифференциаллашлари ва инфинитезимал деформацияларини таснифлаш каби устувор йўналишларда бугунги кунда илмий тадқиқот ишлари амалга оширилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ли алгебраларининг классик назариясидан маълумки, ихтиёрий чекли ўлчамли Ли алгебраси яримсодда қисм алгебра ва максимал ечилувчан идеалларнинг яримтўғри йиғиндиси шаклида ифодаланади (Леви теоремаси). Яримсодда Ли алгебраси эса содда алгебраларнинг тўғри йиғиндиси сифатида ёйилади. Леви теоремасининг Лейбниц алгебралари учун аналогиси эса 2011 йилда Д.Барнс томонидан исботланган.

Н.Джекобсон томонидан, характеристикаси нол бўлган майдонда берилган Ли алгебраси хосмас дифференциалга эга бўлса, унинг нилпотент эканлиги исботланган. Бу масалага тескари бўлган Ли алгебрасининг нилпотентлигидан унинг хосмас дифференциалга эга бўлиши ҳақидаги масалага Ж.Дискмье ва В.Г.Листер томонидан жавоб топилиб, унда барча дифференциали нилпотент (хусусан, хос) бўлган нилпотент Ли алгебрасига мисол келтирилган. Кейинчалик барча дифференциаллашлари нилпотент бўлган алгебралар характеристик нилпотент алгебралар деб аталиб, бундай Ли алгебраларининг таснифларига Ю.Хақимджанов, Ф.Ж.Кастро-Хименез, Х.Н.Валдес ва бошқа олимларнинг ишлари бағишланган.

Кичик ўлчамли нилпотент Ли алгебралари, ҳамда n -ўлчамли табиий усулда градуирланган алгебралар Х.М.Кабезас, Э.Пастор, Х.Р.Гомез, Х.М.Анкочеа-Бермудес, А.Хименез-Мершан, М.Гозе, Ю.Б.Хақимджанов, Ж.Рейес ва бошқалар томонидан таснифланган. Лейбница алгебралари эса Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, И.С.Раҳимов, И.М.Рихсибоев, Х.Р.Казас, М.Ладра, Х.Р.Гомез, Л.М.Камачо ва А.Р.Гонсалеслар томонидан таснифланган. Максимал узунликдаги градуировка Ю.Б.Хақимджанов томонидан тавсия

этилган бўлиб, Х.Р.Гомез, А.Хименез-Мершан, Ж.Рейесларнинг ишларида максимал узунликдаги филиформ Ли алгебралари таснифланган. Максимал узунликдаги филиформ ва квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг таснифи Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, Х.Р.Гомез ва Л.М.Камачоларнинг ишларида олинган.

А.И.Мальцев томонидан 1945 йилда, ечилувчан Ли алгебраларини уларнинг нилрадикаллари орқали аниқланиши исботланган бўлса, кейинчалик 1963 йилда Г.М.Мубарякзянов ечилувчан Ли алгебраларини уларнинг нилрадикаллари ва нилрадикалнинг чизиқли нил-эркли дифференциаллашлари ёрдамида таснифловчи яна бир усулни жорий қилди. Ушбу усул ёрдамида Х.М.Анкочеа-Бермудес, Р.Кампамур-Струстберг, В.Бойко, Ж.С.Ндогмо, П.Винтернитс, Л.Снобл ва Й.Вангларнинг ишларида ечилувчан Ли алгебраларининг бир қанча синфлари таснифланган. Б.А.Омиров, И.А.Каримжанов, Х.М.Гасаз, М.Ладра, Л.Боско, Ж.Д.Думбарларнинг ишлари нилрадикали берилган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш масалаларига бағишланган.

Ассоциатив ва Ли алгебралар учун деформациялар назарияси М.Герстенхабер, ҳамда А.Нейенхейс, Р.В.Ричардсонлар томонидан ўтган асрнинг 60-йилларида киритилган. Улар томонидан бир параметрли деформациялар ўрганилган бўлиб, Ли алгебраларининг когомологияси ва инфинитезимал деформациялари орасидаги боғланишлар ўрнатилган. Ли алгебраларининг турли деформациялари А.Фиаловски, М.Пенкава, М.Гильд, Д.В.Миллионщиковлар ва бошқалар томонидан ўрганилган бўлиб, уларнинг бир қанча хоссалари исботланган. Ю.Б.Хақимджанов, Р.М.Наварроларнинг ишларида эса филиформ Ли алгебралари ва супералгебраларининг инфинитезимал деформациялари таснифланган. Лейбниц алгебраларининг когомологик хоссалари ва деформациялари Ж.Л.Лоде, Т.Пирашвили, Д.Балован, Ж.М.Лоддер ва А.Фиаловскийлар томонидан ўрганилган.

Ли супералгебраларининг асосий тушунчалари ва таснифий баёни В.Кацнинг монографиясида келтирилган. Содда ва ярим содда Ли супералгебралари Ф.А.Березин, В.Г.Кац ва Д.А.Лейтсларнинг ишларида ўрганилган бўлса, нилпотент Ли супералгебралари Х.Р.Гомез, Ю.Б.Хақимжонов, Р.М.Наварро, М.Гильд ва бошқа олимларнинг бир қатор ишларида қаралган. С.Альбеверйо, Ш.А.Аюпов ва Б.А.Омировлар томонидан Лейбниц супералгебраларининг максимал нилиндекси $n+m+1$ бўлиши кўрсатилган, ҳамда бундай Лейбниц супералгебраларининг таснифи олинган. Нилиндекси супералгебраларининг ўлчамига тенг бўлган Лейбниц супералгебраларини тавсифлаш борасидаги дастлабки қадам Л.М.Камачо, Х.Р.Гомез, Р.М.Наварро и Б.А.Омировларнинг ишида қўйилган бўлиб, унда характеристик кетма-кетлиги $(n \mid m-1, 1)$ га тенг бўлган $n+m$ нилиндексли Лейбниц супералгебраларининг таснифи келтирилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг ФЁ4-ФА-Ф016 «Яримсодда Лейбниц алгебралари ва уларнинг дифференциаллашлари» (2012-2013 йй.), ЁФ4-ОТ-

0-20581 «Ечилувчан Лейбниц алгебраларининг чизикли давом эттирилувчи ва инфинитезимал деформациялари» (2014-2015 йй.), Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016 йй.), Ўзбекистон Миллий университетининг Ф-4-09 «Ноассоциатив алгебраларнинг структуравий назарияси, Банах модуллари ва дискрет динамик системалар» (2012-2016 йй.) мавзусидаги тадқиқотлар таркибий қисмига киритилган.

Тадқиқотнинг мақсади чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебралари ва уларнинг дифференциаллашларини тавсиф қилиш, ноассоциатив алгебраларнинг деформация ва бузилиш назарияларини ривожлантириш, ҳамда нилпотент Лейбниц супералгебраларини таснифлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг нилпотентлик хоссаларини топиш;

яримсоғда Лейбниц алгебраларининг хоссаларини аниқлаш ва соғда алгебраларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланмайдиган ярим соғда Лейбниц алгебралари мавжудлигини кўрсатиш;

характеристик нилпотент бўлмаган филиформ, ҳамда $n-1$ га тенг бўлган n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

кичик ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини ва нилрадикали нол-филиформ Лейбниц алгебраларининг тўғри йиғиндисидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифлаш;

берилган алгебралар кўпхиллигидаги қуйи сатҳдаги алгебраларни аниқлаш;

нол-филиформ ва филиформ Лейбниц алгебраларининг когомологик группаларини топиш;

тоқ ва жуфт қисмларининг ўлчамлари мос равишда n ва m га, нилиндекси эса $n+m$ га тенг бўлган нилпотент Лейбниц супералгебраларини таснифлаш.

Тадқиқотнинг объекти нилпотент, ечилувчан, яримсоғда Лейбниц алгебралари, дифференциаллашлар, деформациялар, сиқилишлар, когомологик группалар, нилпотент Лейбниц супералгебраларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети градуирланган филиформ Лейбниц алгебралари, характеристик нилпотент, тўрт ва беш ўлчамли Лейбниц алгебралари, нол-филиформ ва филиформ Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари ҳамда деформациялари, максимал нилиндексли нилпотент Лейбниц супералгебраларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда чекли ўлчамли алгебраларни таснифлашнинг умумий усулларида, градуировка усулларида, структуравий ўзгармаслар усулларида, деформациялар, бузилишларлар ва инвариантлар назарияси усулларида фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

хосмас Лейбниц дифференциаллашлар ёрдамида чекли ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебраларининг хусусиятлари аниқланган;

характеристик нилпотент бўлмаган филиформ Лейбниц алгебралар, ҳамда узунлиги $n-1$ га тенг бўлган n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган;

яримсодда Ли алгебраларини содда идеалларнинг тўғри йиғиндисини шаклида ифодалаш мумкинлиги Лейбниц алгебралари учун ўринли бўлмаслиги кўрсатилган;

тўрт ўлчамли комплекс Лейбниц алгебралари ва нилрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли Лейбниц алгебралари таснифланган;

нилрадикали нол-филиформ Лейбниц алгебраларининг тўғри йиғиндисидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган;

биринчи сатҳдаги барча алгебралар, ҳамда ассоциатив, Йордан и Ли алгебралари кўпхиллигида иккинчи сатҳда жойлашган алгебралар аниқланган;

нол-филиформ Лейбниц алгебраларининг кохомологик иккинчи группалари тавсифланган ва табиий усулда градуирланган филиформ Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари топилган;

нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган барча Лейбниц супералгебралари тавсифланиб, нол-филиформ ва филиформ Лейбниц супералгебраларидан, ҳамда характеристик кетма-кетлиги $(n|m-1,1)$ га тенг бўлган супералгебралардан бошқа барча нилпотент Лейбниц супералгебраларининг нилиндекси $n+m$ дан кичик эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Лейбниц супералгебралари устида олиб борилган изланишларда супералгебранинг жуфт қисми учун қўлланиладиган янги усуллар яратилган. Хусусан, максимал нилиндексли Ли супералгебраларининг таснифи анча соддароқ ва самарали йўл билан олинган.

Диссертациядаги кичик ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифига доир натижалар ихтиёрий ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари учун қўйилган бир қанча гипотезаларнинг бажарилишини текшириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги Ли алгебралари ва супералгебралари назариясидаги фундаментал натижаларнинг қўлланиши, алгебраларнинг бошқа синфларидан маълум бўлган усуллардан фойдаланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади. Бундан ташқари кичик ўлчамли алгебраларнинг таснифига боғлиқ натижалар Mathematica 12 пакетида тузилган махсус дастурлар ёрдамида текшириб кўрилган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти бошқа турдаги алгебра ва супералгебралари назарияларини ривожлантириш учун фойдаланиш билан изоҳланади. Хусусан, ушбу диссертацияда олинган натижалар ва топилган усуллардан Ли алгебралари кўпхиллигида қаттиқ нилпотент алгебраларнинг мавжуд эмаслиги ҳақидаги Грюневалд муаммосини ечишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти диссертацияда олинган кичик ўлчамли ечилувчан алгебраларнинг таснифлари ихтиёрий ўлчамли Лейбниц алгебралари учун қўйилган бир қанча гипотезаларни текшириш имконини бериши билан белгиланади. Бундан ташқари биринчи ва иккинчи сатҳда жойлашган алгебраларнинг таснифлари берилган алгебралар кўпхилликлари бузилишларидан тузилган дарахтлар ҳақида тўлиқ тасаввурга эга бўлиш учун муҳим ҳисобланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Узунлиги $n-1$ га тенг бўлган n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебраларининг ва характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраларининг таснифига оид натижалар project FQM143 (University of Sevilla, Spain, 2015 йил 25 сентябрдаги маълумотномаси) хорижий грантида қўлланилган бўлиб, ушбу натижалар ёрдамида табиий усулда градуирланган Лейбниц алгебраларининг, ҳамда нилрадикали филиформ алгебрасидан иборат бўлган Ли бўлмаган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари олинган.

Диссертацияда олинган нилпотент Лейбниц алгебраларининг деформациялари ва яримсодда Лейбниц алгебраларининг хусусиятлари бўйича олинган натижалар MTM2009-14464-C02 (Institute of Mathematics at the University of Santiago de Compostela, Spain, 2015 йил 4 ноябрдаги маълумотномаси) грантида содда Лейбниц алгебраларининг когомологик иккинчи группаларини таснифлашда фойдаланилган.

Нилпотент Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари таснифларидан Путра Малайзия университетида Малайзия Олий таълим вазирлиги томонидан ажратилган 05-02-12-2188FR (Путра Малайзия университети, Малайзия, 2016 йил 2 февралдаги маълумотномаси) илмий лойиҳасида Лейбниц алгебралари кўпхиллигига чизиқли группаларни таъсири ёрдамида баъзи Лейбниц алгебраларининг орбиталари ёпилмасини таснифини олишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни қуйидаги халқаро ва республика миқёсида ўтказилган илмий анжуманларда муҳокама қилинган: «Операторлар алгебраси ва квант эҳтимолликлар назарияси» (Тошкент, 2005 йил), «Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари» (Нукус, 2009 йил), «Операторлар алгебраси ва квант эҳтимолликлар назарияси» (Тошкент, 2012 йил), «Комплекс ва функционал анализнинг замонавий муаммолари» (Нукус, 2012 йил), «Математик анализнинг долзарб муаммолари» (Урганч, 2012 йил), «Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2013 йил), «Замонавий топология муаммолари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2013 йил), «Математик физиканинг ноклассик тенгламалари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2014 йил), «Алгебра, анализ ва квант эҳтимолликлари» (Тошкент, 2015 йил). Тадқиқот натижалари Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Операторлар алгебралари ва уларнинг тадбиқлари» республика семинарида, Ўзбекистон Миллий университетининг «Замонавий алгебра ва унинг тадбиқлари» ва «Функционал анализ ва унинг тадбиқлари»

семинарларида, Сантьяго де Компостела университети қошидаги Математика институти семинарида (Испания, 2012 йил), Путра Малайзия университети «On recent achievements on harmonic analysis, algebras and their applications» семинарида (Малайзия, 2013 йил), Севиля университети «Non-associative algebras» (Испания, 2014 йил) семинарларида муҳокама қилинган. Олинган натижалар «International Congress of Mathematicians-Seoul 2014» (Корея, 2014 йил), «TWAS 25th General Meeting. 2014» (Уммон, 2014 йил) халқаро конгрессларда ҳам маъруза қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 40 та илмий иш, жумладан, миллий журналларда 5 та, халқаро журналларда 18 та мақола, илмий анжуманларда 17 та тезис нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулосалар ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Ишнинг умумий ҳажми 200 бетдан, адабиётлар рўйхати 184 та номдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг «**Яримсодда ва филиформ Лейбниц алгебраларининг таснифи**» деб номланган биринчи бобида зарурий таъриф ва тушунчалар келтирилиб, яримсодда Лейбниц алгебраларинининг бир қанча хоссалари топилган, характеристик нилпотент бўлмайдиган филиформ Лейбниц алгебралари ва узунлиги $n-1$ га тенг бўлган n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган.

Таъриф 1. F майдон устида аниқланган L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда $[-, -]$ – L алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги кетма-кетликларни қараймиз:

$$а) L^{[1]} = L, L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}]; \quad б) L^1 = L, L^{n+1} = [L^n, L^1].$$

Таъриф 2. Агар бирор $m \in \mathbb{N}$ сони учун $L^{[m]} = 0$ шарт бажарилса, L Лейбниц алгебраси ечилувчан дейилади. $L^{[m-1]} \neq 0$ ва $L^{[m]} = 0$ шартлар ўринли бўлса, m натурал сони L алгебранинг ечилувчанлик индекси дейилади.

Агар бирор $s \in N$ сони учун $L^s = 0$ шарт бажарилса, L Лейбниц алгебраси нилпотент дейилади. Бу шартни қаноатлантирувчи энг кичик сонга эса L алгебранинг нилпотентлик индекси ёки нилиндекси дейилади.

Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент (ечилувчан) идеали унинг нилрадикали (радикали) дейилади.

Маълумки, ихтиёрий Ли бўлмаган L Лейбниц алгебраси элементларнинг квадратларидан тузилган хос бўлмаган $I = \text{span}\{[x, x], x \in L\}$ идеалга эга бўлиб, фактор алгебра L/I эса Ли алгебрасини ташкил қилади. Шунинг учун Лейбниц алгебралари классик маънода содда эмас. А.С.Джумадиладев томонидан содда Лейбниц алгебрасига қуйидагича таъриф берилган.

Таъриф 3. Фақат $\{0\}$, I , L идеалларга эга бўлиб, $L^2 \neq I$ шартни қаноатлантирувчи L Лейбниц алгебраси содда дейилади.

Таъриф 4. Максимал ечилувчан идеали I га тенг бўлган L Лейбниц алгебраси яримсодда дейилади.

Равшанки, содда Лейбниц алгебрасининг I бўйича фактори L/I содда Ли алгебраси бўлади. Лекин тескариси ҳар доим ҳам ўринли эмас, яъни фактор алгебраси L/I содда Ли алгебраси бўлиб, ўзи содда бўлмайдиган Лейбниц алгебралари мавжуд.

Таъриф 5. I бўйича фактори L/I содда Ли алгебраси бўладиган L Лейбниц алгебраси Ли-содда дейилади.

Юқорида эслатиб ўтилгани каби Леви теоремасининг аналогиси Лейбниц алгебралари учун Д.Барнс томонидан исботланган. Яримсодда Лейбниц алгебраларини содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинми деган саволга диссертациянинг биринчи боби иккинчи параграфида жавоб топилган.

Айтайлик, L яримсодда Лейбниц алгебраси ва I унинг элементлари квадратларидан тузилган идеали бўлсин. У ҳолда $L = S + I$ бўлади, бу ерда S – яримсодда Ли алгебраси ва $[I, S] = I$. Ярим содда Ли алгебраси S қуйидаги $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$, ёйилмага эга бўлгани учун $L = (S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k) + I$ ни ҳосил қиламиз. Белгилаш киритамиз $I_j = [I, S_j]$, $1 \leq j \leq k$.

Қуйидаги теоремада $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ содда Ли алгебралари уч ўлчамли алгебра sl_2 га изоморф бўлиб, барча I_j лар S_j да келтирилмас модул бўлса, у ҳолда L яримсодда Лейбниц алгебраси содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланиши исботланган.

Теорема 1. L яримсодда Лейбниц алгебраси бўлиб, $L = (sl_2^1 \oplus sl_2^2 \oplus \dots \oplus sl_2^{k-1} \oplus S^k) + I$ ва I_j лар sl_2^j ($1 \leq j \leq k-1$) S_j да, I_k эса S^k да келтирилмас модул бўлсин. У ҳолда L содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида қуйидагича ифодаланади

$$L = (sl_2^1 + I_1) \oplus (sl_2^2 + I_2) \oplus \dots \oplus (sl_2^{k-1} + I_{k-1}) \oplus (S^k + I_k).$$

Таъкидлаш жоизки, агар I_j модул S_j да келтирилувчи бўлса, у ҳолда берилган яримсодда Лейбниц алгебраси содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланмайди. Лекин уни Ли-содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин. Демак табиий равишда

яримсодда Лейбниц алгебраларини Ли-содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинми деган савол туғилади.

Қуйидаги мисол ушбу саволнинг жавоби ижобий эмаслигини кўрсатади.

Мисол 1. Басизи $\{x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, f_1, h_1, e_2, f_2, h_2\}$ бўлган, бу ерда $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $sl_2^1 = \{e_1, f_1, h_1\}$, $sl_2^2 = \{e_2, f_2, h_2\}$ ва қуйидаги кўпайтмага эга бўлган 10-ўлчамли яримсодда Лейбниц алгебраси L ни қараймиз:

$$\begin{aligned} [sl_2^1, sl_2^1]: & \quad [e_1, h_1] = 2e_1, & [f_1, h_1] = -2f_1, & [e_1, f_1] = h_1, \\ & [h_1, e_1] = -2e_1, & [h_1, f_1] = 2f_1, & [f_1, e_1] = -h_1, \\ [sl_2^2, sl_2^2]: & \quad [e_2, h_2] = 2e_2, & [f_2, h_2] = -2f_2, & [e_2, f_2] = h_2, \\ & [h_2, e_2] = -2e_2, & [h_2, f_2] = 2f_2, & [f_2, e_2] = -h_2, \\ [I, sl_2^1]: & \quad [x_1, f_1] = x_2, & [x_1, h_1] = x_1, & [x_2, e_1] = -x_1, & [x_2, h_1] = -x_2, \\ & [x_3, f_1] = x_4, & [x_3, h_1] = x_3, & [x_4, e_1] = -x_3, & [x_4, h_1] = -x_4, \\ [I, sl_2^2]: & \quad [x_1, f_2] = x_3, & [x_1, h_2] = x_1, & [x_3, e_2] = -x_1, & [x_3, h_2] = -x_3, \\ & [x_2, f_2] = x_4, & [x_2, h_2] = x_2, & [x_4, e_2] = -x_2, & [x_4, h_2] = -x_4. \end{aligned}$$

Кўпайтмалардан $[I, sl_2^1] = I$, $[I, sl_2^2] = I$ тенгликларни ва I модул sl_2^1 да $\{x_1, x_2\} \oplus \{x_3, x_4\}$ кўринишида, sl_2^2 да эса $\{x_1, x_3\} \oplus \{x_2, x_4\}$ кўринишида ёйилишини ҳосил қиламиз. Бундан $L = (sl_2^1 \oplus sl_2^2) + I$ яримсодда Лейбниц алгебрасини $sl_2^1 + I_1$ ва $sl_2^2 + I_2$ Ли-содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодалаб бўлмаслиги келиб чиқади.

Лейбниц алгебраси учун Лейбниц дифференциаллашлари тушунчасини киритамиз.

Таъриф 6. L Лейбниц алгебрасида аниқланган d чизикли алмаштириш ва ихтиёрий $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ лар учун

$$d([\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [\dots[\dots[[x_1, x_2], \dots, x_{i-1}], d(x_i)], \dots, x_n].$$

тенглик бажарилса, у ҳолда d чизикли алмаштириш n -тартибли Лейбниц дифференциаллаши дейилади.

Қуйидаги теоремада комплекс Лейбниц алгебраларининг Лейбниц дифференциаллаши ёрдамидаги нилпотентлик хоссаси исботланган.

Теорема 2. Характеристикаси нолга тенг майдон устида берилган Лейбниц алгебраси нилпотент бўлиши учун унинг хосмас Лейбниц дифференциалга эга бўлиши зарур ва етарли.

Таъриф 7. Агар $\dim L^i = n - i$ (бу ерда $n = \dim L$ ва $2 \leq i \leq n$) бўлса, L филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

Маълумки, ихтиёрий n -ўлчамли филиформ Лейбниц алгебрасида шундай $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис топиладики, бу базисда алгебранинг кўпайтмаси қуйидаги кўринишлардан бирига келади:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta): & \quad [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ & [e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n, \\ & [e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} e_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\ F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma): & \quad [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3): \quad & [e_1, e_2] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \dots + \beta_n e_n, & [e_2, e_2] = \gamma e_n, \\
& [e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} e_n, & 3 \leq j \leq n-2, \\
& [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, & [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, & [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\
& [e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \dots, e_n\}, & 3 \leq j \leq n-2, \\
& [e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \dots, e_n\}, & 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i \leq j \leq n-i,
\end{aligned}$$

бу ерда $\alpha_i, \theta, \beta_i, \gamma \in \mathbb{C}$ ва келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг.

Таъриф 8. Ихтиёрий дифференциаллаши нилпотент бўлган Лейбниц алгебраси характеристик нилпотент Лейбниц алгебраси дейилади.

Қуйидаги теоремаларда $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ ва $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ синфларда ётувчи характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраларининг таснифлари келтирилган.

Теорема 3. $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ синфда ётувчи характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$F_1^s(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \alpha_n), \quad 4 \leq s \leq n,$$

бу ерда

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & \text{агар } k \not\equiv s \pmod{s-3}; \\ (-1)^t Q_{t+1}^{s-1}, & \text{агар } k \equiv s \pmod{s-3} \text{ for } t = \frac{k-s}{s-3}, \end{cases}$$

$4 \leq k \leq n$ ва $Q_n^p = \frac{1}{(p-1)n+1} \cdot \frac{(pn)!}{n!((p-1)n!)} - p$ даражали Каталан сонлари.

Теорема 4. $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ синфда ётувчи характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

n жуфт бўлганда: $F_2^j(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0), 1 \leq j \leq n-2;$

n тоқ бўлганда: $F_2(0, \dots, 0, \beta_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots, 0, 1)$ ва $F_2^j(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), 1 \leq j \leq n-3.$

Энди $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ синфда ётувчи Лейбниц алгебрасини қараймиз. Агар L учинчи синфда ётувчи характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраси бўлса, у ҳолда унинг кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, \\ [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\ [e_i, e_{n+1-i}] = -[e_{n+1-i}, e_i] = \alpha(-1)^i e_n, & 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Теорема 5. L алгебра $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ синфда ётувчи характеристик нилпотент бўлмаган Лейбниц алгебраси бўлса, у ҳолда у қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$L(1,0,0), \quad L(0,1,0), \quad L(0,0,1).$$

Айтайлик L чекли сондаги нолдан фарқли фазолардан ташкил топган Z -градуирланган Лейбниц алгебраси бўлсин, яъни $L = \bigoplus_{i \in Z} V_i$, бу ерда ихтиёрий $i, j \in Z$ учун $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ бўлади.

Агар $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$ да барча i ($k_1 \leq i \leq k_t$) лар учун $V_i \neq 0$ бўлса, L нилпотент Лейбниц алгебраси боғлиқли градуировкага мувофиқлашади дейилади. $l(L) = \max \{ \text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1 \mid L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ боғлиқли градуировка} \}$ сонини L Лейбниц алгебранинг узунлиги деб атаймиз.

Биринчи бобнинг бешинчи параграфи асосой натижаси ҳисобланган, узунлиги $n-1$ га тенг бўлган n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган теоремани келтирамиз.

Теорема 6. Узунлиги $n-1$ га тенг бўлган ихтиёрий n -ўлчамли комплекс филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$\begin{aligned} F_n^2 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_3, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \end{cases} & 3 \leq i \leq n-1, \\ F_n^3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = -[y_1, y_i] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_{n+1-i}] = -[y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} y_n, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \\ M_1(k) : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{k+i-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq n-k, 3 \leq k \leq n-1, \end{matrix} \\ M_2 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, \\ [y_n, y_n] = \alpha y_{n-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ \alpha \neq 0, \end{matrix} \\ M_3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_n, y_n] = y_{n-1}, \end{cases} & 1 \leq i \leq n-2, \\ M_4 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_n, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \end{aligned}$$

бу ерда $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – алгебраларнинг базислари ва келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг.

Диссертациянинг «**Кичик ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тавсифи**» деб номланган иккинчи бобида тўрт ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраларининг тавсифи ва нилрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тавсифлари олинган.

Таъкидлаш жоизки, тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебрасининг нилрадикали икки ёки уч ўлчамли бўлади. Икки ва уч ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебралари эса мос равишда Ж.Л.Лоде ва Б.А.Омировларнинг ишларида таснифланган.

Изоморфизм аниқлигида қуйидаги иккита икки ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебралари мавжуд:

$$\mu_1: [e_1, e_1] = e_1, \quad \mu_2: \text{абел алгебраси.}$$

Уч ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебралари эса қуйидаги олти алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$\lambda_1: [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3;$$

$$\lambda_2(\alpha): [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha \neq -1 \text{ и } \lambda_2(\alpha) \cong \lambda_2(\alpha'), \text{ если } \alpha\alpha' = 1;$$

$$\lambda_3: [e_1, e_1] = e_3;$$

$$\lambda_4: [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3;$$

$$\lambda_5: [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = -e_3;$$

$$\lambda_6: \text{абел алгебраси.}$$

Қуйидаги теоремада нилрадикали икки ўлчамли бўлган тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифи келтирилган.

Теорема 7. Нилрадикали икки ўлчамли бўлган ихтиёрий тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$R_1: [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2,$$

$$R_2: [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [x, e_1] = -e_1, [y, e_2] = -e_2,$$

$$R_3: [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [y, e_2] = -e_2,$$

бу ерда $\{x, y, e_1, e_2\}$ – алгебранинг базиси.

Навбатдаги теоремада нилрадикали λ_1 га изоморф бўлган тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

Теорема 8. L – нилрадикали λ_1 га изоморф бўлган тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда L қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$L_1(\gamma): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = \gamma e_2, \\ [e_3, x] = (1 + \gamma)e_3, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = -\gamma e_2, \\ [x, e_3] = -(1 + \gamma)e_3. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = -e_2, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = e_2, \\ [x, x] = e_3. \end{cases} \quad L_3: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1 + e_2, \\ [e_2, x] = e_2, \\ [e_3, x] = 2e_3, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, \\ [x, e_2] = -e_2, \\ [x, e_3] = -2e_3. \end{cases}$$

Юқоридаги теорема каби нилрадикали уч ўлчамли бўлган барча тўрт ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган бўлиб, қуйидагича натижалар олинган:

- нилрадикали $\lambda_2(\alpha)$ бўлган 5 та тўрт ўлчамли алгебра мавжуд;
- нилрадикали λ_3 бўлган 11 та алгебра мавжуд;

- нилрадикали λ_4 бўлган 1 та алгебра мавжуд;
- нилрадикали λ_5 бўлган тўрт ўлчамли алгебра мавжуд эмас;
- нилрадикали λ_6 бўлган 23 та алгебра мавжуд

Энди нилрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларини қараймиз. У ҳолда нилрадикал λ_1 , $\lambda_2(\alpha)$, λ_3 , λ_4 , λ_5 ва λ_6 алгебралардан бирига изоморф бўлади.

Теорема 9. L – нилрадикали λ_1 га изоморф бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда L қуйидаги алгебрага изоморф бўлади:

$$M_1: [e_2, e_1] = e_3, [e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_1] = e_3, [e_3, x_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, [x_1, e_1] = -e_1, [x_2, e_2] = -e_2, [x_1, e_3] = -e_3, [x_2, e_3] = -e_3.$$

Тўрт ўлчамли алгебраларнинг таснифлари каби нилрадикали уч ўлчамли бўлган барча беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган, ҳамда қуйидагича натижалар олинган:

- нилрадикали $\lambda_2(0)$ бўлган 1 та беш ўлчамли алгебра мавжуд;
- нилрадикали λ_3 бўлган 2 та алгебра мавжуд;
- нилрадикали уч ўлчамли λ_4 , λ_5 , $\lambda_2(\alpha)$, $\alpha \neq 0$ алгебралардан бирига изоморф бўлган беш ўлчамли алгебра мавжуд эмас;
- нилрадикали λ_6 бўлган 18 та беш ўлчамли алгебра мавжуд.

Диссертациянинг «Баъзи алгебралар кўпхилликларининг бузилиш-лари ва Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари» деб номланган учинчи боби комплекс сонлар майдони устида берилган алгебраларнинг геометрик усул ёрдамида татқиқ қилишга бағишланган.

$\text{Alg}_n(F)$ тўпламга $\text{GL}_n(F)$ группанинг таъсирини қуйидагича аниқлаймиз:

$$[x, y]_g := g [g^{-1}x, g^{-1}y],$$

бу ерда $g \in \text{GL}_n(F)$ и $x, y \in L$.

$\text{Orb}(L)$ орқали L алгебранинг орбитасини белгилаймиз.

Таъриф 9. Агар M Лейбниц алгебраси L алгебранинг орбитасининг ёпиғида ётса, M алгебра L нинг бузилиши натижасида ҳосил қилинган, ёки L нинг бузилиши дейилади, ҳамда $L \rightarrow M$ каби белгиланади.

$\text{LSolv}(N)$ орқали нилрадикали N га изоморф бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 10. Агар $R_1 \in \text{LSolv}(N_1)$, $R_2 \in \text{LSolv}(N_2)$ ва $R_2 \in \overline{\text{Orb}(R_1)}$ бўлса, у ҳолда $\dim(N_2) \geq \dim(N_1)$ бўлади.

Агар L ва M изоморф бўлса, у ҳолда $L \rightarrow M$ бузилиш тривиал дейилади. Орасида нотривиал бузилишга эга бўлмаган нотривиал бузилишга бевосита бузилиш дейилади.

Таъриф 10. n -ўлчамли абел алгебраси a_n га бузилувчи бевосита бузилишлар занжирларинг максимал узунлигига L алгебранинг сатҳи дейилади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида n -ўлчамли комплекс алгебралар кўпхиллигида биринчи сатҳли алгебралар таснифланган.

Теорема 11. n ($n \geq 3$) ўлчамли комплекс алгебраси биринчи сатҳли бўлиши учун унинг қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлиши зарур ва етарли:

$$p_n^- : e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = -e_i, \quad i \geq 2,$$

$$n_3^- \oplus a_{n-3} : e_1 \cdot e_2 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_3,$$

$$\lambda_2 \oplus a_{n-2} : e_1 \cdot e_1 = e_2,$$

$$v_n(\alpha) : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = \alpha e_i, \quad e_i \cdot e_1 = (1 - \alpha)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Қуйидаги теоремада n -ўлчамли комплекс Йордан алгебралар кўпхиллигида иккинчи сатҳли алгебралар тўлиқ таснифланган.

Теорема 12. Ихтиёрий n -ўлчамли иккинчи сатҳли комплекс Йордан алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$$J_1 = \{e\} \oplus a_{n-1} : e \cdot e = e;$$

$$J_2 = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$J_3 = \{e_1, e_2, e_3\} \oplus a_{n-3} : e_1 \cdot e_2 = e_3.$$

Д.Бурденинг ишида уч ва тўрт ўлчамли комплекс Ли алгебраларининг геометрик таснифи тўлиқ олинганлиги учун Ли алгебралар кўпхиллигидаги иккинчи сатҳли алгебраларни таснифлашда $n \geq 5$ бўлган ҳолни кўриб чиқиш етарли.

Теорема 12. Ихтиёрий n ($n \geq 5$) ўлчамли иккинчи сатҳли комплекс Ли алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$n_{5,1} \oplus a_{n-5} : [e_1, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5,$$

$$n_{5,2} \oplus a_{n-5} : [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_3] = e_5,$$

$$r_2 \oplus a_{n-2} : [e_1, e_2] = e_2,$$

$$g_{n,1}(\alpha) : [e_1, e_2] = \alpha e_2, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n, \quad \alpha \neq 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$$

$$g_{n,2} : [e_1, e_2] = e_2 + e_3, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n.$$

Ассоциатив алгебралар кўпхиллиги учун қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема 13. Ихтиёрий n ($n \geq 5$) ўлчамли иккинчи сатҳли комплекс ассоциатив алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$A_1 : e \cdot e = e;$$

$$A_2 : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$A_3 : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$A_4 : e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$A_5(\alpha) : e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = \alpha e_3;$$

$$A_6 : e_1 \cdot e_1 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_3.$$

бу ерда $\alpha \in \{|z| < 1\} \cup \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида NF_n нол-филиформ Лейбниц алгебрасининг инфинитезимал деформациялари таснифланган.

Теорема 15. $ZL^2(NF_n, NF_n)$ фазонинг базиси қуйидаги 2-коцикллардан иборат бўлади.

$$\varphi_{j,k}(x_j, x_1) = x_k, \quad 1 \leq j \leq n, 2 \leq k \leq n.$$

$$\psi_j(1 \leq j \leq n-1) = \begin{cases} \psi_j(x_j, x_1) = x_1, \\ \psi_j(x_i, x_{j+1}) = -x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Натижа 1. $\dim HL^2(NF_n, NF_n) = n-1$ ва $HL^2(NF_n, NF_n)$ фазонинг базиси $\{\overline{\varphi_{n,2}}, \overline{\varphi_{n,3}}, \dots, \overline{\varphi_{n,n}}\}$ дан иборат бўлади.

Энди NF_n алгебрининг $\mu_t = NF_n + t \sum_{j,k} a_{j,k} \varphi_{j,k}$ чизикли давом эттирилувчи деформациясини қараймиз. Ихтиёрий нотривиал эквивалент деформациялар синфи $HL^2(L, L)$ фазонинг ягона элементи орқали аниқланганлиги учун, Натижа 1 га асосан $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n) = NF_n + t \sum_{k=2}^n a_k \varphi_{n,k}$ деформацияни қараш етарли, бу ерда $(a_2, a_3, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Демак $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n)$ алгебрининг кўпайтмаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} [x_i, x_1] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [x_n, x_1] = t \sum_{k=2}^n a_k x_k. \end{cases}$$

Теорема 16. $\bigcup_{a_2, \dots, a_n} \text{Orb}(\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n))$ тўпلام n -ўлчамли Лейбниц

алгебралар кўпхиллигида келтирилмас компонента бўлади.

F_n^1 ва F_n^2 филиформ Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари таснифи орқали қуйидаги муносабатларни осонгина олиш мумкин

$$\dim \text{Der}(F_n^1) = n+1, \quad \dim BL^2(F_n^1, F_n^1) = n^2 - n - 1,$$

$$\dim \text{Der}(F_n^2) = n+2, \quad \dim BL^2(F_n^2, F_n^2) = n^2 - n - 2.$$

Қуйидаги теоремада F_n^1 филиформ Лейбниц алгебрасининг инфинитезимал деформациялари таснифи келтирилган.

Теорема 17. Филиформ Лейбниц алгебраси F_n^1 нинг ихтиёрий инфинитезимал деформацияси қуйидаги кўринишга эга:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x_1, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{1,k} x_k, & \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, & 2 \leq j \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n,k} x_k, & \varphi(x_1, x_2) = \gamma_1 x_1 + \gamma_n x_n, \\ \varphi(x_i, x_2) = ((i-2)\gamma_1 + \beta_2)x_i + \sum_{k=3}^{n+2-i} \beta_k x_{k+i-2}, & & 2 \leq i \leq n, \\ \varphi(x_i, x_3) = -(\alpha_{2,1} + \gamma_1)x_{i+1}, & & 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1} x_{i+1}, & & 2 \leq i \leq n-1, 3 \leq j \leq n-1. \end{array} \right.$$

Теорема 18. F_n^2 филиформ Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий инфинитезималь деформацияси куйидаги кўринишга эга:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, \quad 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_{n-1}, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n-1,k} x_k, \quad \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} x_k, \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1} x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_1, x_n) = -\alpha_{n,1} x_1 + \sum_{k=2}^n \beta_k x_k, \\ \varphi(x_i, x_n) = -i\alpha_{n,1} x_i + \sum_{k=2}^{n-i} \beta_k x_{k+i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_n) = \gamma_1 x_{n-1} + \gamma_n x_n. \end{array} \right.$$

Диссертациянинг «**Нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган Лейбниц супералгебраларининг таснифи**» деб номланган тўртинчи бобида тоқ ва жуфт қисмларининг ўлчамлари мос равишда n ва m га тенг бўлган комплекс Лейбниц супералгебраларининг тўлиқ тавсифи олинган.

Айталик, $L=L_0 \oplus L_1$ нилпотент комплекс Лейбниц супералгебраси бўлсин. Ихтиёрий $x \in L_0$ элемент учун R_x ўнгдан кўпайтириш оператори, L_i , $i \in \{0,1\}$ фазода нилпотент эндоморфизм бўлади. R_x операторнинг Жордан катаклари ўлчамларини камайиш тартибида ёзишдан тузилган сонли кетма-кетликни $C_i(x)$, $i \in \{0,1\}$ орқали белгилаймиз. $C_i(L_0)$ тўпламида лексикографик тартиб киритамиз.

Таъриф 12. Ушбу $C(L) = \left(\max_{x \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_0(x) \mid \max_{\tilde{x} \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_1(\tilde{x}) \right)$ кетма-кетлик L

супералгебранинг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

Таъриф 13. Агар $C(L) = (n \mid m)$ (мос равишда $C(L) = (n-1, 1 \mid m)$) бўлса, L нол-филиформ (мос равишда филиформ) Лейбниц супералгебраси дейилади.

Нол-филиформ ва филиформ Лейбниц супералгебралари синфларини мос равишда $ZF_{n,m}$ ва $F_{n,m}$ орқали белгилаймиз.

Куйидаги теоремада жуфт қисмининг ўлчами иккига, нилиндекси $m+2$ га тенг бўлган нол-филиформ Лейбниц супералгебраларининг таснифи келтирилган.

Теорема 19. $L \in ZF_{2,m}$ ($m \geq 2$) ва супералгебранинг нилиндекси $m+2$ га тенг бўлсин, у ҳолда m тоқ бўлади ва L супералгебрасида шундай $\{x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ базис топиладики, бу базисда супералгебранинг кўпайтмаси куйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_2, \\ [y_i, x_1] &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ [x_1, y_i] &= -y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] &= (-1)^{i+1} x_2, \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

$n \geq 3$ ва $m \geq 2$ бўлган ҳолда эса, куйидаги лемма ўринли.

Лемма 1. $ZF_{n,m}$ ($n \geq 3$, $m \geq 2$) синфда ётувчи, иккита ҳосил қилувчига эга бўлган ихтиёрий Лейбниц супералгебраси, $n+m$ сонидан кичик нилиндексга эга.

Нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган филиформ Лейбниц супералгебралари $n=m=2$ бўлган ҳолда алоҳида хусусиятга эга.

Теорема 20. L алгебра $F_{2,2}$ тўпلامда ётувчи, нилиндекси 4 га тенг бўлган Лейбниц супералгебраси бўлсин. U ҳолда U қуйидаги иккита ўзаро изоморф бўлмаган супералгебралардан бирига изоморф бўлади:

$$F_{2,2}^1 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2, \end{cases} \quad F_{2,2}^2 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_1, y_1] = \frac{1}{2}y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2. \end{cases}$$

Филиформ Лейбниц супералгебралари учун, $n \geq 3$ бўлганда Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров ва М.Вернларнинг ишларида олинган натижалардан келиб чиқувчи, соддалаштирилган базиснинг мавжудлиги ҳақидаги қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 21. L алгебра $F_{n,m}$ тўпلامда ётувчи Лейбниц супералгебраси бўлсин. U ҳолда L супералгебрада қуйидаги учта шартлардан бирини қаноатлантирувчи $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ базис мавжуд.

- а) $[x_1, x_1] = x_3$, $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_2] = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n$,
 $[x_j, x_2] = \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n$, $2 \leq j \leq n-2$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ ва $x \in L_0 \setminus L_0^2$,
- б) $[x_1, x_1] = x_3$, $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $3 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_2] = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \dots + \beta_n x_n$, $[x_2, x_2] = \gamma x_n$,
 $[x_j, x_2] = \beta_4 x_{j+2} + \beta_5 x_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} x_n$, $3 \leq j \leq n-2$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ ва $x \in L_0 \setminus L_0^2$,
- в) $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_i] = -x_{i+1}$, $3 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_1] = \theta_1 x_n$, $[x_1, x_2] = -x_3 + \theta_2 x_n$, $[x_2, x_2] = \theta_3 x_n$,
 $[x_2, x_j] = -[x_j, x_2] \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \dots, x_n\}$, $3 \leq j \leq n-2$,
 $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \in \{x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots, x_n\}$, $3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $i \leq j \leq n-i$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ ва $x \in L_0 \setminus L_0^2$.

бу ерда L_0 даги келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг.

Таъкидлаш жозки, в) синфда L_0 даги баъзи базис элементлари учун Лейбниц айнияти текширилмаган ва в) синф Лейбниц супералгебраси

бўлиши учун, барча базис элементларда Лейбниц айниятининг бажарилиши талаб қилинади.

Лемма 2. L – нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган, $F_{n,m}$ тўпламда ётувчи Лейбниц супералгебраси бўлсин. У ҳолда $n+m$ жуфт бўлганда $m=n$, $n+m$ тоқ бўлганда эса $m=n-1$ тенгликлар ўринли бўлади. Хусусан, $m=n-1$ бўлган ҳолда а) синфга тегишли L супералгебрасида шундай $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ базис топиладики, L нинг бу базисдаги кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, x_1] &= y_{j+1}, & & & 1 \leq j \leq n-2, \\ [x_1, y_1] &= \frac{1}{2} y_2, & [x_i, y_1] &= \frac{1}{2} y_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_1] &= x_1, & [y_j, y_1] &= x_{j+1}, & 2 \leq j \leq n-1, \\ [x_1, x_2] &= \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n, \\ [x_j, x_2] &= \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\ [y_1, x_2] &= \alpha_4 y_3 + \alpha_5 y_4 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-2} + \theta y_{n-1}, \\ [y_j, x_2] &= \alpha_4 y_{j+2} + \alpha_5 y_{j+3} + \dots + \alpha_{n+1-j} y_{n-1}, & 2 \leq j \leq n-3, \end{aligned}$$

(келтирилмаган кўпайтмалар нолга тенг).

Юқорида келтирилган леммага ўхшаш, а) синфдан $m=n$ бўлганда, ҳамда б) синфдан $m=n-1$ ва $m=n$ бўлган ҳолларда яна учта филиформ Лейбниц супералгебралар синфлари ҳосил қилинган. Ҳосил бўлган тўртта синфни мос равишда $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$, $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$, $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$ каби белгилаб оламиз.

Энди $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ синфга тегишли бўлган иккита супералгебра изоморф бўлишлигининг зарурий ва етарли шартини келтирамыз.

Тасдиқ 1. Берилган $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ ва $L'(\alpha'_4, \alpha'_5, \dots, \alpha'_n, \theta')$ супералгебралар изоморф бўлиши учун, шундай $a \in \mathbb{C}$ сони топилиб,

$$\begin{cases} \alpha_j = a^{2(j-3)} \alpha'_j, & 4 \leq j \leq n, \\ \theta = a^{2n-6} \theta'. \end{cases}$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Диссертацияда $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ ва $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$ синфлар учун ҳам, юқоридаги каби изоморфлик аломатлари келтирилган ва бу аломатлар ёрдамида нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган филиформ Лейбниц супералгебраларини тўлиқ таснифи олинган.

Теорема 21 да келтирилган в) синфда ётувчи Лейбниц супералгебралари учун қуйидаги лемма ўринли.

Лемма 2. в) синфда ётувчи ихтиёрий Лейбниц супералгебрасининг нилиндекси $n+m$ дан кичик бўлади.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида жуфт қисми нол-филиформ Лейбниц алгебраси бўлган, $n+m$ нилиндексли барча Лейбниц супералгебралари тавсифланган. Тўртинчи бобнинг учинчи параграфи асосий натижаси қуйидаги теоремада ўз аксини топади.

Теорема 22. L – характеристик кетма-кетлиги $(n \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ га тенг бўлган Лейбниц супералгебраси бўлсин, бу ерда $m_1 \leq m-2$. У ҳолда унинг нилиндекси $n+m$ дан кичик бўлади.

Тўртинчи бобнинг тўртинчи параграфида характеристик кетма-кетлиги $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ га тенг бўлган Лейбниц супералгебралари ўрганилган, бу ерда $m_1 \leq m-1$, ҳамда бундай супералгебраларнинг нилиндекси $n+m$ дан кичик эканлиги исботланган.

Теорема 23. L – характеристик кетма-кетлиги $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ га тенг бўлган Лейбниц супералгебраси бўлсин, бу ерда $m_1 \leq m-1$. У ҳолда L нинг нилиндекси $n+m$ дан кичик бўлади.

Тўртинчи бобнинг бешинчи параграфида асосий натижаларидан бири қуйидаги теоремада келтирилган.

Теорема 24. L характеристик кетма-кетлиги $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ га тенг бўлган Лейбниц супералгебраси бўлсин, бу ерда $n_1 \leq n-2$, $m_1 \leq m-1$. Агар супералгебранинг иккала ҳосил қилувчиси ҳам L_1 га тегишли бўлса, у ҳолда L нинг нилиндекси $n+m$ дан кичик бўлади.

Тўртинчи бобнинг бешинчи параграфида характеристик кетма-кетликли $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ бўлган барча Лейбниц супералгебралари қараб чиқилган ва $n_1 \leq n-2$ шарт бажарилганда уларнинг нилиндекси $n+m$ дан кичик эканлиги исботланган.

ХУЛОСАЛАР

1. Яримсодда Лейбниц алгебраларининг бир қанча хоссалари топилиб, яримсодда Ли алгебраларини содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкинлиги ҳақидаги натижа Лейбниц алгебралари учун ўринли бўлмаслиги кўрсатилган.

2. Хосмас Лейбниц дифференциаллашлар ёрдамида чекли ўлчовли нилпотент Лейбниц алгебраларининг хусусиятлари ўрганилган ва Лейбниц алгебраси нилпотент бўлиши учун унинг хосмас Лейбниц дифференциаллашга эга бўлиши зарур ва етарлилиги исботланган.

3. Характеристик нилпотент бўлмайдиган, ҳамда узунлиги $n-1$ га тенг бўлган n ўлчовли комплекс филиформ Лейбниц алгебралари таснифланган.

4. Изоморфизм аниқлигида барча тўрт ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраларининг тавсифи олинган ва нилрадикали уч ўлчамли бўлган беш ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

5. Нилрадикали нол-филиформ Лейбниц алгебраларининг тўғри йиғиндисидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари таснифланган.

6. Лейбниц алгебраларининг сиқилишларига доир бир қанча натижалар олинган бўлиб, жумладан агар бирор ечилувчан Лейбниц алгебраси бошқа бир Лейбниц алгебрага сиқилса, у ҳолда иккинчи алгебранинг нилрадикали ўлчами биринчи алгебра нилрадикали ўлчамидан кичик эмаслиги исботланган.

7. Алгебралар кўпхиллигида қуйи сатҳда жойлашган алгебралар ўрганилиб, биринчи сатҳдаги барча алгебралар, ҳамда ассоциатив, Йордан и Ли алгебралари кўпхиллигида иккинчи сатҳда жойлашган алгебраларнинг тўлиқ таснифи олинган.

8. Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари ўрганилган ва нол-филиформ Лейбниц алгебраларининг иккинчи группа когомологиялари тавсифланган. Битта ҳосил қилувчига эга бўлган Лейбниц алгебралари синфининг орбитасининг ёпилмаси чекли ўлчамли комплекс Лейбниц алгебралари кўпхиллигида келтирилмас компонента эканлиги исботланган.

9. Табиий усулда градуирланган филиформ Лейбниц алгебраларининг иккинчи группа когомологиялари топилган.

10. Тоқ ва жуфт қисмларининг ўлчамлари n ва m га нилиндекси $n+m$ га тенг бўлган Ли супералгебраларининг таснифи Лейбниц супералгебраларига давом эттирилган.

Диссертация назарий ҳарактерга эга. Диссертацияда олинган асосий натижалар ва усуллардан бошқа турдаги алгебра ва супералгебралар назарияларини ўрганишда, категориялар назариясида, турли хил усулларда градуирланган алгебраларни таснифлашда, гомологик ва когомологик группаларни ҳисоблашда, ҳамда назарий физиканинг турли жараёнларини таҳлил қилишда фойдаланиш куталади.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ 16.07.2013.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК
ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ХУДОЙБЕРДИЕВ АБРОР ХАКИМОВИЧ

**СТРУКТУРНАЯ ТЕОРИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ
АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА И КЛАССИФИКАЦИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ
СУПЕРАЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА**

**01.01.06 – Алгебра
(физико-математические науки)**

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.3-4.FM22.

Докторская диссертация выполнена в Институте Математики при Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:

Аюпов Шавкат Абдуллаевич

доктор физико-математических наук, профессор,
академик.

Официальные оппоненты:

Хаджиев Джавват

доктор физико-математических наук, профессор,
академик

Кудайбергенов Каримберган Кадирбергенович

доктор физико-математических наук

Аллаков Исмаил

доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация:

Институт математики и математического

**моделирования Министерство образования и
науки Республики Казахстан**

Защита диссертации состоится «24» марта 2016 года в 10⁰⁰ часов на заседании Научного совета 16.07.2013.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № M 14912). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «19» февраля 2016 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» февраля 2016 года).

А.А.Азамов

Председатель Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

А.А.Абдушукуров

Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

У.А.Розиков

Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученой степени доктора
наук, д.ф.-м.н., профессор

Введение (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Алгебраические средства весьма полезны при исследовании элементарных частиц в квантовой механике, свойств твердого тела и кристаллов, при анализе модельных задач экономики, в задачах популяционной биологии и т.д. Так как ассоциативные алгебры, задающиеся определенным тождеством, начаты рассматриваться после выявления свойства замкнутости относительно обычного умножения квадратных матриц, то их дальнейшее интенсивное развитие привело к созданию теории альтернативных, лиевых, йордановых алгебр, которые тесно переплетены между собой и имеют многочисленные связи с различными областями математики. Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли, и поэтому многие свойства, справедливые для алгебр Ли, продолжаются на случай алгебр Лейбница. Одним из приоритетных направлений исследований, в этой области, является доказательство аналогов теорем из теории алгебр Ли для алгебр Лейбница и детальное изучение свойств, присущих не Лиевым алгебрам Лейбница.

Из классической теории алгебр Ли известно, что произвольная конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль разлагается в полупрямую сумму максимального разрешимого идеала и её полупростой подалгебры. В свою очередь конечномерные алгебры Лейбница также разлагаются в полупрямую сумму максимального разрешимого идеала и полупростой алгебры Ли. Исследование разрешимых алгебр с нильрадикалами специальных типов связано с различными моделями физики. Таким образом, аналогично случаю алгебр Ли, изучение разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами является актуальной задачей.

Напомним, что нильпотентные алгебры Ли являются разрешимыми алгебрами специального типа. В связи с тем, что описание нильпотентных алгебр Ли представляется необозримой задачей, то их изучение должно проводится с дополнительными ограничениями. В частности, при изучении нильпотентных алгебр одним из основных ограничений является ограничение на индекс нильпотентности. Следует отметить, что максимальный нильиндекс для алгебры Ли совпадает с размерностью самой алгебры, и такие алгебры получили название филиформных алгебр. Несмотря на то, что филиформные алгебры Лейбница в классе нильпотентных алгебр имеют относительно простое ограничение, они имеют достаточно сложную структуру, которую удобно исследовать с наложением условия градуирования. Эффективность максимальной градуировки обусловлена тем, что она даёт максимально точную информацию о структурных константах в таблице умножения алгебры.

Понятия вырождения, сжатия и деформации алгебры появились из физики. Например, сжатие в алгебре Ли с физической точки зрения означает процесс при котором одна физическая модель получается из другой пределом при воздействии группы инвариантов, в то время как, деформации

характеризуются локальным поведением в малой окрестности многообразия объектов заданного типа. Таким образом, изучение деформаций алгебр важно при исследовании локальных геометрических свойств многообразий. В силу того, что алгебраическое многообразие есть объединение конечного числа неприводимых компонент и замыкание орбит жестких алгебр дает неприводимые компоненты многообразия, то нахождение жестких алгебр представляет собой определенный интерес при исследовании свойств конечномерных алгебр с геометрической точки зрения. Основной причиной востребованности исследований, связанных с тематикой настоящей диссертации, является тесная связь алгебр Лейбница и их когомологических свойств с проблемами йордановых алгебр, алгебр Ли и других их обобщений.

Мотивация изучения другого обобщения алгебр Ли - супералгебр Ли возникла из свойств суперсимметрии в математической физике. Теория супералгебр Ли зарекомендовала себя как универсальный объект в современной алгебре. Так как супералгебры Лейбница обобщают не только алгебры Лейбница, но и супералгебры Ли, то, естественно, их изучение должно проходить в некоторой степени параллельно исследованиям данных многообразий. Аналогично алгебрам Лейбница, изучение конечномерных нильпотентных супералгебр Лейбница с максимальным индексом нильпотентности и супералгебр Лейбница, имеющих индекс нильпотентности, равный размерности самих супералгебр, является актуальной проблемой.

Связь исследования к приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. В направлениях структурной теории неассоциативных алгебр, в частности, алгебр Ли и алгебр Лейбница, и изучение их когомологических свойств ведутся широкие научные исследования в научных центрах и университетах ведущих стран, в том числе в Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Haute Alsace, Institut de mathématiques de Jussieu (Франция); University of Seville, University of Santiago de Compostela, Complutense University of Madrid (Испания); University of Dusseldorf, Institut Computational Mathematics (Германия); University of Vienna (Австрия); Eötvös Loránd University (Венгрия); University of San-Diego, University of Iowa, University of Toledo (США); University of Sao Paulo (Бразилия); East China Normal University (Китай); University of Putra Malaysia (Малайзия); University of Sydney (Австралия); Московский государственный университет, Институт математики имени С.Л.Соболева (Россия); Институт математики и математического моделирования (Казахстан).

В результате научных исследований, проведенных по описанию конечномерных комплексных алгебр Ли, классификации нильпотентных и разрешимых алгебр Лейбница и нахождению их замыканий орбит, в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе, были получены

следующие научные результаты: описаны естественным образом градуированные филифорные алгебры Ли и нильпотентные алгебры Ли малых размерностей (Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Haute Alsace); получено полное описание семимерных нильпотентных алгебр Ли (University of Toledo); получено геометрическое описание трехмерных и четырехмерных алгебр Ли, а также найдены их замыкания орбит (University of Dusseldorf, Institut Computational Mathematics); классифицированы разрешимые алгебры Ли, нильрадикал которых является естественным образом градуированной филиформной алгеброй (Complutense University of Madrid); доказано, что вторая группа когомологий жестких алгебр Лейбница равна нулю (Institut de mathématiques de Jussieu); классифицированы естественным образом градуированные 2-филиформные и квази-филиформные алгебры Лейбница (University of Seville); получено полное описание филиформных алгебр Лейбница до размерности 10 (University of Putra Malaysia); доказано, что произвольная конечномерная комплексная алгебра Лейбница представляется в виде полупрямой суммы полупростой алгебры Ли и разрешимого радикала (University of Sydney).

На сегодняшний день осуществляются приоритетные научно-исследовательские работы по описанию разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами, нахождению замыканий орбит алгебр Лейбница малых размерностей, нахождению жестких алгебр в многообразии конечномерных алгебр Лейбница, описанию дифференцирований и инфинитезимальных деформаций алгебр Лейбница.

Степень изученности проблемы. В классической теории алгебр Ли хорошо известен результат о том, что любая конечномерная алгебра Ли представляется в виде полупрямой суммы полупростой подалгебры и её максимального разрешимого идеала (теорема Леви), причём полупростая алгебра Ли разлагается в прямую сумму простых идеалов. Аналог теоремы Леви для алгебры Лейбница был доказан Д.Барнсом в 2011 году.

Н.Джекобсон установил, что над полем характеристики нуль алгебра Ли, имеющая невырожденное дифференцирование, нильпотентна, но обратная гипотеза, т.е. следует ли из нильпотентности алгебры Ли существование невырожденного дифференцирования, была открыта. Пример нильпотентной алгебры Ли, у которой все дифференцирования нильпотентны (а значит, вырождены), отвечающий на этот вопрос отрицательно, был построен Ж.Дискмье и В.Г.Листером. Впоследствии, алгебры, у которых все дифференцирования нильпотентны, получили название характеристически нильпотентных. Характеристически нильпотентные алгебры Ли изучены в работах Ю.Хакимджанова, Ф.Ж.Кастро-Хименеза, Х.Н.Валдеса и др.

Описание нильпотентных алгебр Ли малых размерностей и n -мерных алгебр с помощью естественной градуировки рассмотрено в работах Х.М.Кабезаса, Э.Пастора, Х.Р.Гомеза, Х.М.Анкочеа-Бермудеса, А.Хименеза-Мершана, М.Гозе, Ю.Б.Хакимджанова, Ж.Рейеса и других, а в случае алгебр Лейбница – в работах Ш.А.Аюпова, Б.А.Омирова, И.С.Рахимова, Х.Р.Казаса, М.Ладры, Х.Р.Гомеза, Л.М.Камачо, И.М.Рихсибоева и А.Р.Гонсалеса. Другой

вид градуировки, так называемой максимальной градуировки, предложен Ю.Б. Хакимджановым, и в работе Х.Р.Гомеза, А.Хименез-Мершана, Ж.Рейеса классифицированы филиформные алгебры Ли максимальной длины. Так в работах Ш.А.Аюпова, Б.А.Омирова, Х.Р.Гомеза, Л.М.Камачо получены классификации филиформных и квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

В 1945 году А.И.Мальцев доказал, что разрешимая алгебра Ли определяется однозначно ее нильрадикалом. Далее, в 1963 году Г.М.Мубарякзянов разработал метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и ниль-независимых дифференцирований нильрадикала. Методом Мубарякзянова, в работах Х.М.Анкочеа-Бермудеса, Р.Кампамур-Струстберга, В.Бойко, Ж.С.Ндогмо, П.Винтернитса, Л.Снобла, Й.Ванга были получены описания некоторых классов разрешимых алгебр Ли. Описанию разрешимых алгебр Лейбница с некоторыми заданными нильрадикалами посвящены работы Х.М.Касаза, М.Ладры, Б.А.Омирова, И.А.Каримжанова, Л.Боско, Ж.Д.Думбара.

Классическая теория деформаций ассоциативных алгебр и алгебр Ли восходит к работам М.Герстенхабера и А.Нейенхейса, Р.В.Ричардсона в 60-х годах прошлого столетия. Ими были изучены однопараметрические деформации и установлена связь между когомологией алгебры Ли и инфинитезимальными деформациями. В работах А.Фиаловски, М.Пенкава, М.Гильда, Д.В.Миллионщикова рассмотрены различные виды деформаций алгебр Ли и изучены их свойства. В частности, в работах Ю.Б.Хакимджанова и Р.М.Наварро были описаны инфинитезимальные деформации филиформных алгебр и супералгебр Ли. Изучению когомологических свойств и деформаций алгебр Лейбница посвящены работы Ж.Л.Лоде и Т.Пиравили, Д.Балована, Ж.М.Лоддера, А.Фиаловского и др.

Основные понятия и систематическое изложение основ супералгебр Ли приведены в монографии В.Г.Каца. Описанию простых и полупростых супералгебр Ли посвящены работы Ф.А.Березина, В.Г.Каца, Д.А.Лейтеса и других. Изучению же нильпотентных супералгебр Ли на данный момент посвящены работы Х.Р.Гомеза, Ю.Б.Хакимджанова, Р.М.Наварро, М.Гильда и других. Понятие супералгебры Лейбница впервые появилось в 2005 году в работе С.Альбеверию, Ш.А.Аюпова и Б.А.Омирова. Более того, ими были классифицированы супералгебры Лейбница с максимальным нильиндексом, и, как оказалось, они имеют нильиндекс равный $n+m+1$. Первая попытка описания супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$ и характеристической последовательностью, равной $(n \mid m-1, 1)$, была предпринята в работе Л.М.Камачо, Х.Р.Гомеза, Р.М.Наварро и Б.А.Омирова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования «Полупростые супералгебры Лейбница и их дифференцирования», Институт Математики (ФЁ4-ФА-Ф016, 2012-2013 гг.); «Линейно продолжаемые и инфинитезимальные деформации разрешимых алгебр Лейбница», Институт

Математики (ЁФ4-ОТ-0-20581, 2014-2015 гг.); «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» Институт Математики (Ф4-ФА-Ф013, 2012-2016 гг.); «Структурная теория неассоциативных алгебр, банаховых модулей и дискретные динамические системы», Национальный университет Узбекистана (Ф-4-09, 2012-2016 гг.)

Целью исследования является изучение структурной теории комплексных конечномерных алгебр Лейбница и их дифференцирований, дальнейшее развитие теории вырождений и деформаций неассоциативных алгебр, а также описание нильпотентных супералгебр Лейбница.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

изучение свойств нильпотентных конечномерных алгебр Лейбница;

описание свойств полупростых алгебр Лейбница и построение примеров полупростых алгебр Лейбница, которые не разлагаются в прямую сумму простых алгебр;

классификация комплексных n -мерных филиформных алгебр Лейбница, не являющихся характеристически нильпотентными, и описание с точностью до изоморфизма комплексных n -мерных филиформных алгебр Лейбница длины $n-1$;

классификация разрешимых алгебр Лейбница малых размерностей и описание разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикал которых является прямой суммой нуль-филиформных идеалов;

изучение алгебр нижнего уровня в некоторых многообразиях алгебр;

исследование группы когомологий нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница;

классификация супералгебр Лейбница с нильиндексом $n+m$, где n и m - размерности четной и нечетной части, соответственно.

Объект исследования. Нильпотентные алгебры Лейбница, разрешимые алгебры, полупростые алгебры, дифференцирования, вырождения, деформации, группы когомологий, нильпотентные супералгебры Лейбница.

Предмет исследования. Z – градуированные филиформные алгебры Лейбница, характеристически нильпотентные алгебры, четырехмерные и пятимерные разрешимые алгебры Лейбница, дифференцирования и деформации нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница, нильпотентные супералгебры Лейбница с максимальным индексом нильпотентности.

Методы исследования. В работе используются классификационные методы, метод градуирований, метод структурных констант, методы теории вырождений, теории деформаций и теории инвариантов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получена характеристика нильпотентности конечномерной алгебры Лейбница в терминах Лейбницева дифференцирования;

классифицированы филиформные алгебры Лейбница, не являющиеся характеристически нильпотентными, и n -мерные филиформные алгебры Лейбница длины $n-1$;

построен пример, показывающий, что классический результат о разложении полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых идеалов не является верным для алгебр Лейбница;

получено полное описание четырехмерных комплексных алгебр Лейбница и классифицированы пятимерные комплексные разрешимые алгебры Лейбница с трехмерным нильрадикалом;

описаны с точностью до изоморфизма разрешимые алгебры Лейбница, нильрадикал которых является прямой суммой нуль-филиформных идеалов;

классифицированы все алгебры уровня один и алгебры уровня два в многообразиях конечномерных комплексных ассоциативных, йордановых и лиевых алгебр;

описаны вторые группы когомологий нуль-филиформных алгебр Лейбница и получено описание инфинитезимальных деформаций естественным образом градуированных филиформных алгебр Лейбница;

описаны все супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$, и доказано, что кроме нуль-филиформных и филиформных супералгебр Лейбница и супералгебр Лейбница, имеющих характеристическую последовательность $(n \mid m-1, 1)$, все остальные супералгебры Лейбница имеют нильиндекс меньше, чем $n+m$.

Практические результаты исследования. В результате исследований супералгебр Лейбница были разработаны новые методы исследования, использующие метод градуировки свойства четной части супералгебры. В частности, известное описание супералгебры Ли максимального нильиндекса получено более изящным и простым способом.

Результаты диссертации, касающиеся классификации разрешимых алгебр Лейбница малых размерностей, позволят проверить справедливость ряда гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница произвольных заданных размерностей.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием известных методов исследования других классов алгебр и супералгебр, применением фундаментальных результатов теории алгебр и супералгебр Ли. Результаты классификационных утверждений в случае малых заданных размерностей были проверены с помощью специально созданных программ на языке математического программирования Mathematica 12.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований других многообразий алгебр и супералгебр. В частности, техника и методы, разработанные в данной диссертации, могут быть использованы для решения известной проблемы Грюневальда о не существовании жестких нильпотентных алгебр Ли в многообразии всех алгебр Ли.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что результаты диссертации, касающиеся классификации разрешимых алгебр Лейбница

малых размерностей, позволят проверить справедливость ряда гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница произвольных заданных размерностей. Классификации конечномерных алгебр уровня один и уровня два являются важным результатом для получения полной информации о дереве вырождений других многообразий алгебр.

Внедрение результатов исследования. Описание n -мерных комплексных филиформных алгебр Лебница длины $n-1$ и филиформных не характеристически нильпотентных алгебр Лейбница были использованы в исследованиях зарубежного проекта FQM143(University of Sevilla, Spain, справка от 25 сентября 2015 года). В частности, данное описание было использовано при получении классификации естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Лейбница и при описании комплексных не лиевых разрешимых алгебр Лейбница с филиформными нильрадикалами.

Полученное в диссертационной работе описание инфинитезимальных деформаций нильпотентных супералгебр Лейбница и характеристика свойств некоторых полупростых алгебр Лейбница использованы в исследованиях проекта MTM2009-14464-C02 (Institute of Mathematics at the University of Santiago de Compostela, Spain, справка от 4 ноября 2015 года) при описании вторых групп когомологий простых алгебр Лейбница.

Описание инфинитезимальных деформаций нильпотентных алгебр Лейбница использованы в проекте 05-02-12-2188FR (Университет Путра Малайзия, справка от 2 февраля 2016 года) для описания замыканий орбит некоторых классов алгебр Лейбница под действием линейной группы на многообразия алгебр Лейбница.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на следующих международных и республиканских научных конференциях: «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2005 г.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Нукус, 2009 г.), «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2012 г.), «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» (Нукус, 2012 г.), «Актуальные проблемы математического анализа» (Ургенч, 2012 г.), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2013 г.), «Проблемы современной топологии и её приложения» (Ташкент, 2013 г.), «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2014 г.), «Алгебра, анализ и квантовая вероятность» (Ташкент, 2015 г.).

Настоящая работа обсуждалась на республиканских семинарах «Операторные алгебры и их приложения» Института Математики при Национальном университете Узбекистана, на научном семинаре «Современная алгебра и её приложения» Национального университета Узбекистана, на городском семинаре кафедры алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана, на семинарах Института Математики, Университет Сантьяго де Компостела (Испания, 2012 г.),

семинаре “On recent achievements on harmonic analysis, algebras and their applications” Университет Путра Малайзия (Малайзия, 2013 г.), семинаре “Non-associative algebras” Университет Севилья (Испания, 2014 г.). Полученные результаты докладывались также на следующих международных конгрессах «International Congress of Mathematicians-Seoul 2014» (Korea, 2014), «TWAS 25th General Meeting. 2014» (Oman, 2014).

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 40 научных работах, из них 5 статей в национальных журналах, 18 статей в зарубежных журналах, 17 тезисов в научных конференциях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, заключения и списка использованной литературы из 184 наименований. Общий объем диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Описание полупростых и филиформных алгебр Лейбница**», приведены предварительные сведения, получены некоторые свойства полупростых алгебр, классифицированы комплексные n -мерные филиформные алгебры Лейбница длины $n-1$ и описаны с точностью до изоморфизма филиформные алгебры Лейбница, не являющиеся характеристически нильпотентными.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ – умножение в L .

Для произвольной алгебры Лейбница L определим ряды:

$$\text{а) } L^{[1]} = L, \quad L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}]; \quad \text{б) } L^1 = L, \quad L^{n+1} = [L^n, L^1].$$

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется разрешимой, если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{[m]} = 0$. Натуральное число m называется индексом разрешимости алгебры L , если $L^{[m-1]} \neq 0$ и $L^{[m]} = 0$.

Алгебра Лейбница L называется нильпотентной, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $L^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством, называется индексом нильпотентности (нильиндексом) алгебры L .

Максимальный нильпотентный (разрешимый) идеал алгебры Лейбница L называется нильрадикалом (радикалом).

Известно, что в произвольной не Лиевой алгебре Лейбница существует идеал, порожденный квадратами $I = \text{span}\{[x, x], x \in L\}$, и фактор-алгебра L/I является алгеброй Ли. В связи с тем, что в классическом понимании алгебры Лейбница не являются простыми, то в работе А.С.Джумадилова предложено следующее естественное определение простой алгебры Лейбница.

Определение 3. Алгебра Лейбница L называется простой, если $L^2 \neq I$ и она имеет только следующие идеалы: $\{0\}$, I , L .

Определение 4. Алгебра Лейбница L называется полупростой, если её максимальный разрешимый идеал равен I .

Очевидно, что если L простая, то фактор-алгебра L/I – простая алгебра Ли. Но обратная утверждения, вообще говоря, неверна, т.е. существует алгебра Лейбница L , не являющейся простой, но L/I – простая алгебра Ли.

Определение 5. Алгебра Лейбница L называется Ли-простой, если L/I является простой алгеброй Ли.

Как было отмечено, аналог теоремы Леви для алгебры Лейбница было доказано Д.Барнсом. А вопрос о том, что разлагается ли полупростая алгебра Лейбница в прямую сумму простых идеалов, рассмотрен в первом параграфе первой главы диссертации.

Пусть L – полупростая алгебра Лейбница и I – идеал, порожденный квадратами элементов алгебры L . Тогда $L = S + I$, где S – полупростая алгебра Ли и $[I, S] = I$. Более того, имеем разложение $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$, т.е., $L = (S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k) + I$. Введем обозначение $I_j = [I, S_j]$, $1 \leq j \leq k$.

В следующем теореме доказано, что если простые алгебры $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ изоморфны трехмерной алгебре sl_2 и каждый I_j неприводимый модуль над S_j , то полупростая алгебра Лейбница L разлагается в прямую сумму простых идеалов.

Теорема 1. Пусть L – полупростая алгебра Лейбница такая, что $L = (sl_2^1 \oplus sl_2^2 \oplus \dots \oplus sl_2^{k-1} \oplus S^k) + I$. Пусть I_j – неприводимый модуль над sl_2^j ($1 \leq j \leq k-1$) и I_k – неприводимый модуль над S^k . Тогда L разлагается в прямую сумму простых алгебр Лейбница, а именно,

$$L = (sl_2^1 + I_1) \oplus (sl_2^2 + I_2) \oplus \dots \oplus (sl_2^{k-1} + I_{k-1}) \oplus (S^k + I_k).$$

Отметим, что если I_j приводим над S_j , то полупростая алгебра Лейбница не представляется в виде прямой суммы простых идеалов. Однако она могут разлагаться в прямую сумму Ли-простых алгебр Лейбница. Естественно возникает вопрос: разлагается ли всякая полупростая алгебра Лейбница в прямую сумму Ли-простых алгебр?

Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример 1. Пусть L – 10-мерная полупростая алгебра Лейбница. Пусть $\{x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, f_1, h_1, e_2, f_2, h_2\}$ – базис в L такой, что $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $sl_2^1 = \{e_1, f_1, h_1\}$, $sl_2^2 = \{e_2, f_2, h_2\}$ и имеет место следующая таблица умножения:

$$\begin{aligned}
[sl_2^1, sl_2^1]: \quad & [e_1, h_1] = 2e_1, & [f_1, h_1] = -2f_1, & [e_1, f_1] = h_1, \\
& [h_1, e_1] = -2e_1, & [h_1, f_1] = 2f_1, & [f_1, e_1] = -h_1, \\
[sl_2^2, sl_2^2]: \quad & [e_2, h_2] = 2e_2, & [f_2, h_2] = -2f_2, & [e_2, f_2] = h_2, \\
& [h_2, e_2] = -2e_2, & [h_2, f_2] = 2f_2, & [f_2, e_2] = -h_2, \\
[I, sl_2^1]: \quad & [x_1, f_1] = x_2, & [x_1, h_1] = x_1, & [x_2, e_1] = -x_1, & [x_2, h_1] = -x_2, \\
& [x_3, f_1] = x_4, & [x_3, h_1] = x_3, & [x_4, e_1] = -x_3, & [x_4, h_1] = -x_4, \\
[I, sl_2^2]: \quad & [x_1, f_2] = x_3, & [x_1, h_2] = x_1, & [x_3, e_2] = -x_1, & [x_3, h_2] = -x_3, \\
& [x_2, f_2] = x_4, & [x_2, h_2] = x_2, & [x_4, e_2] = -x_2, & [x_4, h_2] = -x_4.
\end{aligned}$$

Из этих умножений имеем, что $[I, sl_2^1] = I$, $[I, sl_2^2] = I$ и модуль I разлагается над sl_2^1 в виде $\{x_1, x_2\} \oplus \{x_3, x_4\}$, над sl_2^2 в виде $\{x_1, x_3\} \oplus \{x_2, x_4\}$. Нетрудно проверить, что если алгебра L разлагается в прямую сумму Ли-простых алгебр, то она должна иметь вид $(sl_2^1 + I_1) \oplus (sl_2^2 + I_2)$. В силу того, что $[I_1, sl_2^2] \neq 0$ и $[I_2, sl_2^1] \neq 0$, мы получаем противоречие с существованием разложения алгебры L в прямую сумму Ли-простых идеалов.

Определим понятие Лейбница дифференцирования для алгебры Лейбница.

Определение 6. Линейное преобразование d в алгебре Лейбница L называется Лейбницевым дифференцированием порядка n , если для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$ выполняется следующее равенство:

$$d([\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [\dots[\dots[[x_1, x_2], \dots, x_{i-1}], d(x_i)], \dots, x_n].$$

В следующей теореме приведён критерий нильпотентности комплексных алгебр Лейбница в терминах Лейбница дифференцирования.

Теорема 2. Алгебра Лейбница над полем характеристики нуль является нильпотентной тогда и только тогда, когда она имеет невырожденное Лейбницево дифференцирование.

Определение 7. Алгебра Лейбница L называется филиформной, если $\dim L^i = n-i$, $2 \leq i \leq n$.

Известно, что в любой n -мерной комплексной филиформной алгебре Лейбница существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что ее умножение в этом базисе имеет один из следующих видов:

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta): \quad & [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n, \\
& [e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} e_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\
F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma): \quad & [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_2] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \dots + \beta_n e_n, & [e_2, e_2] = \gamma e_n, \\
& [e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} e_n, & 3 \leq j \leq n-2, \\
F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3): \quad & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, & [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, & [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\
& [e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \dots, e_n\}, & 3 \leq j \leq n-2,
\end{aligned}$$

$$[e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \dots, e_n\}, \quad 3 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right], i \leq j \leq n-i,$$

где $\alpha_i, \theta, \beta_i, \gamma \in \mathbb{C}$ и отсутствующие произведения равны нулю.

Определение 8. Нильпотентная алгебра Лейбница называется характеристически нильпотентной, если любое её дифференцирование нильпотентно.

В следующих теоремах предложена классификация не характеристически нильпотентных алгебр Лейбница из классов $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ и $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$.

Теорема 3. Пусть L – не характеристически нильпотентная алгебра Лейбница из класса $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$. Тогда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$F_1^s(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \alpha_n), \quad 4 \leq s \leq n,$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \not\equiv s \pmod{s-3}; \\ (-1)^t Q_{t+1}^{s-1}, & \text{если } k \equiv s \pmod{s-3} \text{ при } t = \frac{k-s}{s-3}, \end{cases}$$

$$4 \leq k \leq n \text{ и } Q_n^p = \frac{1}{(p-1)n+1} \cdot \frac{(pn)!}{n!((p-1)n!)} - \text{число Каталана степени } p.$$

Теорема 4. Пусть L – не характеристически нильпотентная филиформная алгебра Лейбница из класса $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$. Тогда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\text{при четным } n: F_2^j(0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq n-2;$$

$$\text{при нечетным } n: F_2(0, \dots, 0, \beta_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots, 0, 1) \text{ и } F_2^j(0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq j \leq n-3.$$

Далее рассмотрим филиформную алгебру Лейбница L из класса $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

Нетрудно видеть, что если L – не характеристически нильпотентная филиформная алгебра Лейбница из класса $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, то таблица умножения алгебры имеет следующий вид:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, \\ [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\ [e_i, e_{n+1-i}] = -[e_{n+1-i}, e_i] = \alpha(-1)^i e_n, & 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть L – не характеристически нильпотентная филиформная алгебра Лейбница из класса $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда она изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$$L(1,0,0), \quad L(0,1,0), \quad L(0,0,1).$$

Пусть L – Z -градуированная алгебра Лейбница с конечным числом ненулевых пространств, т.е. $L = \bigoplus_{i \in Z} V_i$, где $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ для любых $i, j \in Z$.

Будем говорить, что нильпотентная алгебра Лейбница L допускает связное градуирование, если $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$, где $V_i \neq 0$ для всех i ($k_1 \leq i \leq k_t$). В дальнейшем число $l(L) = \max\{\text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1 \mid \text{градуирование } L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ связно}\}$ будем называть длиной алгебры Лейбница L .

Приведем основной результат пятого параграфа первой главы. А именно, в следующей теореме получена классификация комплексных n -мерных филиформных алгебр Лейбница длины $n-1$.

Теорема 6. Произвольная n -мерная комплексная филиформная алгебра Лейбница длины $n-1$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} F_n^2 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_3, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \end{cases} & 3 \leq i \leq n-1, \\ F_n^3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = -[y_1, y_i] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_{n+1-i}] = -[y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} y_n, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \\ M_1(k) : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{k+i-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq n-k, 3 \leq k \leq n-1, \end{matrix} \\ M_2 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, \\ [y_n, y_n] = \alpha y_{n-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ \alpha \neq 0, \end{matrix} \\ M_3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_n, y_n] = y_{n-1}, \end{cases} & 1 \leq i \leq n-2, \\ M_4 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_n, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \end{aligned}$$

где $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – базисы в алгебрах и отсутствующие произведения равны нулю.

Во второй главе диссертации, названной «**Описание разрешимых алгебр Лейбница малых размерностей**», классифицированы четырехмерные комплексные алгебры Лейбница и получено описание пятимерных разрешимых алгебр Лейбница с трехмерным нильрадикалом.

Напомним, что размерность нильрадикала четырехмерных разрешимых алгебр Лейбница равна либо двум либо трем. Классификация с точностью до изоморфизма комплексных нильпотентных алгебр Лейбница размерностей два и три получена в работах Ж.Л.Лоде и Б.А.Омирова.

В размерности два имеются две нильпотентные алгебры Лейбница:

$$\mu_1: [e_1, e_1] = e_1, \quad \mu_2: \text{абелева.}$$

В размерности три имеются шесть попарно не изоморфных нильпотентных алгебр, одно из которых параметрическое семейство:

$$\begin{aligned} \lambda_1: & [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3; \\ \lambda_2(\alpha): & [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = \alpha e_3, \alpha \neq -1 \text{ и } \lambda_2(\alpha) \cong \lambda_2(\alpha'), \text{ если } \alpha\alpha' = 1; \\ \lambda_3: & [e_1, e_1] = e_3; \\ \lambda_4: & [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3; \\ \lambda_5: & [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = -e_3; \\ \lambda_6: & \text{абелева.} \end{aligned}$$

В следующей теореме приведена классификация четырехмерных разрешимых алгебр Лейбница с двумерным нильрадикалом.

Теорема 7. Пусть L – четырехмерная разрешимая алгебра Лейбница с двумерным нильрадикалом. Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} R_1: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, \\ R_2: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [x, e_1] = -e_1, [y, e_2] = -e_2, \\ R_3: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [y, e_2] = -e_2, \end{aligned}$$

где $\{x, y, e_1, e_2\}$ – базис алгебры.

В следующей теореме получена классификация четырехмерных разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом λ_1 .

Теорема 8. Пусть L – четырехмерная разрешимая алгебра Лейбница, нильрадикал которой изоморфен λ_1 . Тогда L изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$L_1(\gamma): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = \gamma e_2, \\ [e_3, x] = (1 + \gamma)e_3, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = -\gamma e_2, \\ [x, e_3] = -(1 + \gamma)e_3. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = -e_2, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = e_2, \\ [x, x] = e_3. \end{cases} \quad L_3: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1 + e_2, \\ [e_2, x] = e_2, \\ [e_3, x] = 2e_3, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, \\ [x, e_2] = -e_2, \\ [x, e_3] = -2e_3. \end{cases}$$

Аналогичным образом, получена классификация всех четырехмерных разрешимых алгебр Лейбница с трехмерным нильрадикалом. А именно

- Существуют 5 алгебр с нильрадикалом $\lambda_2(\alpha)$;
- Существуют 11 алгебр с нильрадикалом λ_3 ;
- Существуют 1 алгебра с нильрадикалом λ_4 ;
- Не существуют алгебр с нильрадикалом λ_5 ;
- Существуют 23 алгебры с нильрадикалом λ_6 .

Далее рассмотрим пятимерную разрешимую алгебру Лейбница с трехмерными нильрадикалом равным одному из λ_1 , $\lambda_2(\alpha)$, λ_3 , λ_4 , λ_5 и λ_6 .

Теорема 9. Пусть L – пятимерная разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом λ_1 . Тогда L является алгеброй Ли и она изоморфна алгебре:

$$M_1: [e_2, e_1] = e_3, [e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_1] = e_3, [e_3, x_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, [x_1, e_1] = -e_1, [x_2, e_2] = -e_2, [x_1, e_3] = -e_3, [x_2, e_3] = -e_3.$$

Аналогичным образом, получена классификация пятимерных разрешимых алгебр Лейбница с трехмерным нильрадикалом. А именно

- Существуют 1 алгебра с нильрадикалом $\lambda_2(0)$;
- Существуют 2 алгебры с нильрадикалом λ_3 ;
- Не существуют алгебр с нильрадикалами $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_2(\alpha), \alpha \neq 0$;
- Существуют 18 алгебр с нильрадикалом λ_6 .

Третья глава названной, «**О вырождениях в некоторых многообразиях алгебр и инфинитезимальные деформации алгебр Лейбница**», диссертации посвящена геометрическому подходу к исследованию конечномерных алгебр над полем комплексных чисел.

Определим действие группы $GL_n(F)$ на множестве $Leib_n(F)$ следующим образом:

$$[x, y]_g := g [g^{-1}x, g^{-1}y],$$

где $g \in GL_n(F)$ и $x, y \in L$.

Через $Orb(L)$ обозначим орбиту алгебры L при этом действии.

Определение 9. Будем говорить, что алгебра Лейбница L вырождается в алгебру Лейбница M , если M лежит в замыкании орбиты алгебры L . В этом случае мы будем обозначать $L \rightarrow M$.

Обозначим через $LSolv(N)$ – множество разрешимых алгебр, с нильрадикалом N .

Теорема 10. Пусть $R_1 \in LSolv(N_1)$, $R_2 \in LSolv(N_2)$ и пусть $R_2 \in \overline{Orb(R_1)}$. Тогда $\dim(N_2) \geq \dim(N_1)$.

Вырождение $L \rightarrow M$ назовем тривиальным, если L и M изоморфны. Нетривиальное вырождение называется непосредственным, если оно не имеет не тривиальных промежуточных вырождений, т.е. не существует цепочки нетривиальных вырождений $L \rightarrow N \rightarrow M$.

Определение 10. Уровнем алгебры L называется максимальная длина цепочки непосредственных вырождений $L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n$, где a_n – n -мерная абелева алгебра.

Во втором параграфе третьей главы получено описание алгебр уровня один в многообразиях комплексных n -мерных алгебр.

Теорема 11. n -мерная ($n \geq 3$) алгебра является алгеброй уровня один тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$p_n^-: \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = -e_i, \quad i \geq 2, \\ n_3^- \oplus a_{n-3}: \quad e_1 \cdot e_2 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_3, \\ \lambda_2 \oplus a_{n-2}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2, \\ v_n(\alpha): \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = \alpha e_i, \quad e_i \cdot e_1 = (1 - \alpha)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

В следующей теореме получено полное описание алгебр уровня два в многообразии конечномерных йордановых алгебр.

Теорема 12. n -мерная йорданова алгебра J является алгеброй уровня два тогда и только тогда, когда она изоморфна одно из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} J_1 &= \{e\} \oplus a_{n-1} : & e \cdot e &= e; \\ J_2 &= \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} : & e_1 \cdot e_1 &= e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ J_3 &= \{e_1, e_2, e_3\} \oplus a_{n-3} : & e_1 \cdot e_2 &= e_3. \end{aligned}$$

Далее, мы опишем алгебры уровня два в многообразии комплексных n -мерных алгебр Ли. Ввиду того, что в работе Д.Бурде получено полное геометрическое описание многообразия трехмерных и четырехмерных алгебр Ли, то достаточно рассмотреть случай $n \geq 5$.

Теорема 13. Всякая n ($n \geq 5$)-мерная алгебра Ли уровня два изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} n_{5,1} \oplus a_{n-5} : & [e_1, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5, \\ n_{5,2} \oplus a_{n-5} : & [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_3] = e_5, \\ r_2 \oplus a_{n-2} : & [e_1, e_2] = e_2, \\ g_{n,1}(\alpha) : & [e_1, e_2] = \alpha e_2, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{C}^* \\ g_{n,2} : & [e_1, e_2] = e_2 + e_3, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Для ассоциативных алгебр, мы получаем следующую теорему.

Теорема 14. Всякая n ($n \geq 5$)-мерная ассоциативная алгебра уровня два изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$\begin{aligned} A_1 : & e \cdot e = e; \\ A_2 : & e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_3 : & e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_4 : & e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_5(\alpha) : & e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = \alpha e_3; \\ A_6 : & e_1 \cdot e_1 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_3. \end{aligned}$$

где $\alpha \in \{|z| < 1\} \cup \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

В четвертом параграфе третьей главы получено описание инфинитезимальных деформаций нуль-филиформных алгебр Лейбница NF_n .

Теорема 15. Следующие 2-коциклы

$$\varphi_{j,k}(x_j, x_1) = x_k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 2 \leq k \leq n.$$

$$\psi_j(1 \leq j \leq n-1) = \begin{cases} \psi_j(x_j, x_1) = x_1, \\ \psi_j(x_i, x_{j+1}) = -x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

образуют базис пространства $ZL^2(NF_n, NF_n)$.

Следствие 1. $\dim HL^2(NF_n, NF_n) = n - 1$ и базисом пространства $HL^2(NF_n, NF_n)$ является $\{\varphi_{n,2}, \varphi_{n,3}, \dots, \varphi_{n,n}\}$.

Рассмотрим линейные продолжаемые деформации $\mu_t = NF_n + t \sum_{j,k} a_{j,k} \varphi_{j,k}$ алгебры NF_n . Так как каждый нетривиальный класс эквивалентности деформаций определяет единственный элемент из $HL^2(L, L)$, то из Следствия 1 следует, что достаточно рассмотреть $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n) = NF_n + t \sum_{k=2}^n a_k \varphi_{n,k}$, где $(a_2, a_3, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Таким образом, таблица умножения $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n)$ имеет вид:

$$\begin{cases} [x_i, x_1] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [x_n, x_1] = t \sum_{k=2}^n a_k x_k. \end{cases}$$

Теорема 16. $\bigcup_{a_2, \dots, a_n} \text{Orb}(\mu_1(a_2, a_3, \dots, a_n))$ является неприводимой компонентой.

Из описания дифференцирований алгебры филиформных алгебр Лейбница F_n^1, F_n^2 , нетрудно заключить, что

$$\begin{aligned} \dim \text{Der}(F_n^1) &= n+1, & \dim \text{BL}^2(F_n^1, F_n^1) &= n^2 - n - 1, \\ \dim \text{Der}(F_n^2) &= n+2, & \dim \text{BL}^2(F_n^2, F_n^2) &= n^2 - n - 2. \end{aligned}$$

В следующих теоремах приведем результат, описывающий инфинитезимальные деформации филиформных алгебр Лейбница F_n^1 и F_n^2 .

Теорема 17. Всякая инфинитезимальная деформация филиформной алгебры Лейбница F_n^1 имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{1,k} x_k, & \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, & 2 \leq j \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n,k} x_k, & \varphi(x_1, x_2) = \gamma_1 x_1 + \gamma_n x_n, \\ \varphi(x_i, x_2) = ((i-2)\gamma_1 + \beta_2)x_i + \sum_{k=3}^{n+2-i} \beta_k x_{k+i-2}, & 2 \leq i \leq n, \\ \varphi(x_i, x_3) = -(\alpha_{2,1} + \gamma_1)x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1}x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, 3 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Теорема 18. Всякая инфинитезимальная деформация филиформной алгебры Лейбница F_n^2 имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, \quad 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_{n-1}, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n-1,k} x_k, \quad \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} x_k, \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1} x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_1, x_n) = -\alpha_{n,1} x_1 + \sum_{k=2}^n \beta_k x_k, \\ \varphi(x_i, x_n) = -i\alpha_{n,1} x_i + \sum_{k=2}^{n-i} \beta_k x_{k+i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_n) = \gamma_1 x_{n-1} + \gamma_n x_n. \end{array} \right.$$

В четвертой главе диссертации, названной «Классификация комплексных супералгебр Лейбница нильиндекса $n+m$ », получено полное описание комплексных супералгебр Лейбница нильиндекса $n+m$, где n и m – размерности четной и нечетной частей соответственно.

Пусть $L=L_0 \oplus L_1$ – комплексная нильпотентная супералгебра Лейбница. Для произвольного элемента $x \in L_0$ оператор правого умножения R_x является нильпотентным эндоморфизмом пространства L_i , $i \in \{0,1\}$. Обозначим через $C_i(x)$, $i \in \{0,1\}$ убывающую последовательность размеров жордановых блоков оператора R_x . Рассмотрим на множестве $C_i(L_0)$ лексикографический порядок.

Определение 11. Последовательность

$$C(L) = \left(\max_{x \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_0(x) \mid \max_{\tilde{x} \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_1(\tilde{x}) \right)$$

назовем характеристической последовательностью для супералгебры Лейбница L .

Определение 12. Супералгебра Лейбница L называется нуль-филиформной (соответственно, филиформной), если $C(L) = (n|m)$ (соответственно, $C(L) = (n-1, 1|m)$).

Классы нуль-филиформных и филиформных супералгебр Лейбница будем обозначать $ZF_{n,m}$ и $F_{n,m}$, соответственно.

В следующей теореме представлена классификация нуль-филиформных супералгебр Лейбница с двумерной четной частью и нильиндексом, равным $m+2$, т.е. случай $n=2$.

Теорема 19. Пусть $L \in ZF_{2,m}$ ($m \geq 2$) с нильиндексом, равным $m+2$; тогда m нечетно и существует базис $\{x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ в супералгебре L такой, что ее умножение в этом базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_2, \\ [y_i, x_1] &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ [x_1, y_i] &= -y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] &= (-1)^{i+1} x_2, \quad 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

При ограничениях $n \geq 3$ и $m \geq 2$ справедлива

Лемма 1. Произвольная двупорожденная супералгебра Лейбница, принадлежащая классу $ZF_{n,m}$ ($n \geq 3$, $m \geq 2$), имеет нильиндекс меньше числа $n+m$.

Исключительная особенность в классе филиформных супералгебр Лейбница с нильиндексом $n+m$ появляется при $n=m=2$.

Теорема 20. Пусть L – супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $F_{2,2}$, с нильиндексом, равным 4. Тогда она изоморфна одной из следующих двух неизоморфных супералгебр:

$$F_{2,2}^1 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2, \end{cases} \quad F_{2,2}^2 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_1, y_1] = \frac{1}{2}y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2. \end{cases}$$

Для филиформных супералгебр Лейбница при $n \geq 3$, существование адаптированного базиса приводится в следующей теореме, которая получена как следствие результатов работы Ш.А.Аюпова, Б.А.Омирова и М.Вернь.

Теорема 21. Пусть L – произвольная супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $F_{n,m}$. Тогда существует базис $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ супералгебры L , удовлетворяющий одному из следующих трёх условий:

- а) $[x_1, x_1] = x_3$, $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_2] = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n$,
 $[x_j, x_2] = \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n$, $2 \leq j \leq n-2$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ и некоторого $x \in L_0 \setminus L_0^2$,
- б) $[x_1, x_1] = x_3$, $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $3 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_2] = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \dots + \beta_n x_n$, $[x_2, x_2] = \gamma x_n$,
 $[x_j, x_2] = \beta_4 x_{j+2} + \beta_5 x_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} x_n$, $3 \leq j \leq n-2$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ и некоторого $x \in L_0 \setminus L_0^2$,
- в) $[x_i, x_1] = x_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_i] = -x_{i+1}$, $3 \leq i \leq n-1$,
 $[x_1, x_1] = \theta_1 x_n$, $[x_1, x_2] = -x_3 + \theta_2 x_n$, $[x_2, x_2] = \theta_3 x_n$,
 $[x_2, x_j] = -[x_j, x_2] \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \dots, x_n\}$, $3 \leq j \leq n-2$,
 $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \in \{x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots, x_n\}$, $3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $i \leq j \leq n-i$,
 $[y_j, x] = y_{j+1}$, $1 \leq j \leq m-1$ и некоторого $x \in L_0 \setminus L_0^2$.

где отсутствующие произведения в L_0 равны нулю. Более того, структурные константы алгебр из класса в) супертотждества Лейбница.

Лемма 2. Пусть L – супералгебра Лейбница, принадлежащая множеству $F_{n,m}$, с нильиндексом, равным $n+m$. Тогда при четном значении $n+m$ имеем

$m=n$, а в случае $n+m$ нечетном имеем $m=n-1$. В частности, при $m=n-1$ в супералгебре L из класса а) Теоремы 20 существует базис $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$ такой, что умножение в L имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, x_1] &= y_{j+1}, & & & 1 \leq j \leq n-2, \\ [x_1, y_1] &= \frac{1}{2} y_2, & [x_i, y_1] &= \frac{1}{2} y_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_1] &= x_1, & [y_j, y_1] &= x_{j+1}, & 2 \leq j \leq n-1, \\ [x_1, x_2] &= \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n, \\ [x_j, x_2] &= \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\ [y_1, x_2] &= \alpha_4 y_3 + \alpha_5 y_4 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-2} + \theta y_{n-1}, \\ [y_j, x_2] &= \alpha_4 y_{j+2} + \alpha_5 y_{j+3} + \dots + \alpha_{n+1-j} y_{n-1}, & 2 \leq j \leq n-3, \end{aligned}$$

(отсутствующие произведения равны нулю).

Аналогично, из класса а) при $m=n$, из класса б) при $m=n-1$ и из класса б) при $m=n$ получается ещё три семейств филиформных супералгебр Лейбница с нильиндексом $n+m$. Эти четыре класса соответственно обозначаются через $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$, $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$, $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$.

Приведем необходимые и достаточные условия изоморфности двух алгебр из семейства $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$.

Предложение 1. Две супералгебры $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ и $L'(\alpha'_4, \alpha'_5, \dots, \alpha'_n, \theta')$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует $a \in \mathbb{C}$ такое, что выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \alpha_j = a^{2(j-3)} \alpha'_j, & 4 \leq j \leq n, \\ \theta = a^{2n-6} \theta'. \end{cases}$$

Аналогично, получен критерий изоморфизма для семейств $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$, $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$. С помощью этих критериев получена классификация филиформных супералгебр Лейбница с нильиндексом равным $n+m$ для классов а) и б).

Для супералгебры L , принадлежащая классу в), верна следующая Лемма.

Лемма 2. Пусть L – супералгебра Лейбница, принадлежащая классу в) Теоремы 20. Тогда её нильиндекс меньше $n+m$.

В параграфе 4.3 описаны супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$, у которых четная часть является нуль-филиформной алгеброй Лейбница.

Основным результатом параграфа 4.3 является следующая теорема.

Теорема 22. Пусть супералгебра Лейбница L обладает характеристической последовательностью $(n \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, где $m_1 \leq m-2$. Тогда L имеет нильиндекс меньше числа $n+m$.

В параграфе 4.4 рассматриваются супералгебры Лейбница, с характеристической последовательностью $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, где $m_1 \leq m-1$. А именно, доказывается, что такие супералгебры имеют нильиндекс меньше числа $n+m$.

Теорема 23. Пусть L – супералгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$. Тогда L имеет нильиндекс меньше числа $n+m$.

Одним из основных результатов пятого параграфа четвертой главы является следующая теорема.

Теорема 24. Пусть L – супералгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, где $n_1 \leq n-2$, $m_1 \leq m-1$, и пусть оба порождающих элемента лежат в L_1 . Тогда L имеет нильиндекс меньше числа $n+m$.

В параграфе 4.5 доказано, что в остальных случаях супералгебры Лейбница с характеристической последовательностью $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, с условием $n_1 \leq n-2$, также имеют нильиндекс меньше чем $n+m$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Выявлены свойства некоторых полупростых алгебр Лейбница и доказано, что для алгебр Лейбница аналог классического результата о разложении полупростой алгебры Ли в прямую сумму простых алгебр Ли не верен.

2. Изучено свойство нильпотентности конечномерных алгебр Лейбница. Доказано, что конечномерная алгебра Лейбница нильпотентна тогда и только тогда, когда существует невырожденное Лейбницево дифференцирование.

3. Классифицированы филиформные алгебры Лейбница, не являющиеся характеристически нильпотентными, и комплексные n -мерные филиформные алгебры Лейбница длины $n-1$.

4. Получено полное описание, с точностью до изоморфизма, четырехмерных комплексных алгебр Лейбница и классифицированы пятимерные комплексные разрешимые алгебры Лейбница с трехмерным нильрадикалом.

5. Получено описание разрешимых алгебр Лейбница, нильрадикал которых является прямой суммой нуль-филиформных идеалов.

6. Приведены результаты, касающиеся вырождений разрешимых алгебр Лейбница. А именно, доказано, что если разрешимая алгебра вырождается в другую, то размерность нильрадикала предельной алгебры не меньше чем размерность нильрадикала заданной разрешимой алгебры.

7. Изучены алгебры, которые располагаются в нижних уровнях в многообразиях алгебр. Получено полное описание алгебр уровня один и классифицированы алгебры уровня два в многообразиях конечномерных комплексных ассоциативных, йордановых и лиевых алгебр.

8. Изучены инфинитезимальные деформации алгебр Лейбница. А именно, описана вторая группа когомологий нуль-филиформных алгебр Лейбница. Доказано, что замыкание орбит всех однопорожжденных алгебр

Лейбница является неприводимой компонентой многообразия комплексных конечномерных алгебр Лейбница.

9. Получено описание инфинитезимальных деформаций естественным образом градуированных филиформных алгебр Лейбница.

10. Классифицированы все супералгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$, и доказано, что кроме нуль-филиформных и филиформных супералгебр Лейбница и супералгебр Лейбница, имеющих характеристическую последовательность $(n \mid m-1, 1)$, все остальные супералгебры Лейбница имеют нильиндекс меньше, чем $n+m$.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях других многообразий алгебр и супералгебр, в теории категорий, в изучении алгебр с различными типами градуировок, вычислении групп когомологий и гомологий, а также при изучении различных процессов теоретической физики.

**SCIENTIFIC COUNCIL 16.07.2013.FM.01.01 ON AWARD OF
SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES AT NATIONAL
UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**INSTITUTE OF MATHEMATICS
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

KHUDOYBERDIEV ABROR KHAKIMOVICH

**STRUCTURAL THEORY OF FINITE-DIMENSIONAL COMPLEX
LEIBNIZ ALGEBRAS AND CLASSIFICATION OF NILPOTENT
LEIBNIZ SUPERALGEBRAS**

**01.01.06 – Algebra
(Physical and Mathematical Sciences)**

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № 30.09.2014/B2014.3-4.FM22.

Doctoral dissertation is carried out at Institute of mathematics, National University of Uzbekistan.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web page of Scientific Council (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific adviser:

Ayupov Shavkat Abdullaevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Academician

Official opponents:

Hadjiev Djavvat

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Academician

Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Allakov Ismail

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate
professor

Leading organization:

**Institute of Mathematics and Mathematical
Simulation Ministry of Education and Science
of the Republic of Kazakhstan**

Defense will take place *«24» March 2016 at 10⁰⁰* at the meeting of Scientific Council number 16.07.2013.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871)227-12-24, fax: (99871)246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № *M 14 912*) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on *«19» February* 2016 year
(Mailing report № *2* on *«19» February* 2016 year)

A.A.Azamov

Chairman of Scientific Council on award of scientific
degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S., Professor

A.A.Abdushukurov

Scientific Secretary of Scientific Council on award of
scientific degree of Doctor of Sciences,
D.F.M.S., Professor

U.A.Rozikov

Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council
on award of scientific degree of Doctor of Sciences,
D.F.M.S., Professor

Introduction (abstract of doctoral dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Algebraic instruments are very useful in the study of elementary particles in quantum mechanics, the properties of solids and crystals, in the analysis of model problems of the economics, in the problems of population biology, etc. Since associative algebras defined by specific identity, have been considered when identifying properties of closeness with respect to the usual multiplication of square matrices, further development of algebras leads to the theory of alternative, Lie and Jordan algebras, which are very closely related to each others and have many connection with different areas of mathematics. Since Leibniz algebras are generalizations of Lie algebras, many results of the theory of Lie algebras have been extended to Leibniz algebras. One of the priority directions of research related to this subject is to prove analogues of theorems of the Lie algebras theory in the Leibniz algebras case and to investigate of the inherent properties of Leibniz algebras which are not valid for Lie algebras.

From the classical theory of Lie algebras it is known that an arbitrary finite-dimensional Lie algebra over a field of characteristic zero is decomposed into the semi-direct sum of maximal solvable ideal and its semi-simple subalgebra. On the other hand finite dimensional Leibniz algebras are also decomposed into the semi-direct sum of the maximum solvable ideal and a semi-simple Lie algebra. The investigation of solvable algebras with some special types of nilradicals comes from different problems in physics. Therefore, similarly to Lie algebras, the investigation of solvable Leibniz algebras with given nilradical is one of the actual problems.

Recall that the class of nilpotent Lie algebras is the special subclass of solvable algebras. Since the description of all nilpotent Lie algebras seems too complicated, their study should be carried out with additional restrictions. In particular, in the investigation of nilpotent algebras one of the main restrictions is to restriction to the index of nilpotency. It should be noted that the maximal nilindex for Lie algebras coincides with the dimension of the algebra, and such type of algebras are called filiform algebras. Though, filiform Leibniz algebras have a relatively simple restriction in the class of nilpotent algebras, they have a sufficiently complicated structure, which is convenient to investigate with an additional condition of gradation. The effectiveness of the maximal gradation specify that it most accurately provides information about the structure constants of the algebra in the multiplication table.

The notions of degeneration, contraction and deformation of the algebra appeared from physics. Namely, the notion of contraction of Lie algebras in physical terms means: two physical models are related by a limiting process, under the action of the associated invariants groups. Deformations characterize the local behavior in a small neighborhood in the variety of given type objects. Thus, the study of the deformations of these algebras is a special case of the study of the local geometric properties of varieties. According to algebraic geometry an algebraic variety is a union of irreducible components. The closures of orbits of

rigid algebras give the irreducible components of the variety. That is why the finding of rigid algebras is a crucial problem from the geometrical point of view. The main reason for the demand of the theme of the dissertation is a close relationship of Leibniz algebras and their cohomological properties with the problems of Jordan, Lie algebras and their other generalizations.

Motivation of studying Lie superalgebras as a generalization of Lie algebras came from supersymmetry in mathematical physics. The theory of Lie superalgebras has established itself as a universal subject in modern algebra. Leibniz superalgebras are generalizations of Leibniz algebras and, on the other hand, they naturally generalize Lie superalgebras. Thus, the investigation of Leibniz superalgebras should take place to some parallel studies of these varieties. Similarly to Leibniz algebras, the study of finite-dimensional nilpotent Leibniz superalgebras with the maximal index of nilpotency and Leibniz superalgebras with nilindex equal to the dimension of the superalgebras, is an actual problem.

Connection of research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic. This dissertation was performed in accordance with the priority direction of development of Science and Technologies F4 “Mathematics, Mechanics and Informatics”.

Review of foreign scientific research on the theme of the dissertation. In the directions of the structural theory of non-associative algebras, in particular Lie algebras, Leibniz algebras and studying of their cohomological properties extensive research is conducted in the research centers and universities of the leading countries, including Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Haute Alsace, Institut de mathématiques de Jussieu (France); University of Seville, University of Santiago de Compostela, Complutense University of Madrid (Spain); University of Dusseldorf, Institut Computational Mathematics (Germany); University of Vienna (Austria), Eötvös Loránd University (Hungary), University of San-Diego, University of Iowa, University of Toledo (USA); University of Sao Paulo (Brazil); East China Normal University (China); Moscow State University, S.L.Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (Russia); University of Putra Malaysia (Malaysia); University of Sydney (Australia), Institute of Mathematics and Mathematical simulation, Almaty (Kazakhstan).

As a result of research carried out in the description of some classes of finite-dimensional Lie algebras, classification of nilpotent and solvable Leibniz algebras and finding their closures of orbits series actual problems were solved, on the world level including of the following scientific results: naturally graded filiform Lie algebras and low dimensional nilpotent Lie algebras were described (Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Haute Alsace); seven dimensional nilpotent Lie algebras were classified (University of Toledo); the geometrical description of three and four dimensional Lie algebras was obtained, and their closures of orbits were found (University of Dusseldorf, Institute Computational Mathematics); solvable Lie algebras with naturally graded filiform nilradical were classified (Complutense University of Madrid); it was proved that the second cohomology group of rigid algebras is equal to zero (Institut de

mathématiques de Jussieu); naturally graded 2-filiform and quasi-filiform Leibniz algebras were classified (University of Seville); a description of filiform Leibniz algebras up to dimension ten were obtained (University of Putra Malaysia); it was proved that any finite-dimensional complex Leibniz algebra is decomposed into semidirect sum of its solvable radical and semisimple Lie subalgebra (University of Sydney).

In present time foreground scientific research works are carried out on developing the description of solvable Leibniz algebras with given nilradicals, finding the closures of orbits of low dimensional Leibniz algebras, finding of rigid algebras in the variety of Leibniz algebras, description of the deformation and infinitesimal deformation of Lie and Leibniz algebras.

The degree of scrutiny of the problem. From the classical theory of Lie algebras it is known that every finite-dimensional Lie algebra is decomposed into semidirect sum of its solvable radical and semisimple subalgebra (Levi's Theorem). Moreover, semisimple part is the direct sum of simple ideals. In 2011 D.Barnes extended the Levi's Theorem to the case of Leibniz algebras.

N.Jacobson proved that every Lie algebra over a field of characteristic zero admitting a non-singular derivation is nilpotent. The problem whether the inverse of this statement is correct was open until an example of nilpotent Lie algebra whose all of derivations are nilpotent was constructed by J.Dixmier, W.G.Lister. Consequently, algebras whose derivations are nilpotent called characteristically nilpotent Lie algebras. Characteristically nilpotent Lie algebras are investigated by Y.Khakimdjanov, F.J.Castro-Jiménez, J.N.Valdés and others.

The description of low dimensional nilpotent Lie algebras and naturally graded n -dimensional Lie algebras were considered by J.M.Cabezas, E.Pastor, J.R.Gómez, J.M.Ancochea-Bermúdez, A.Jimenéz-Merchán, J.Reyes, M.Goze, Y.Khakimdjanov and others. Leibniz algebras are classified by Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Rakhimov I.S., Casas J.M., Ladra M., Gómez J.R., Camacho L.M., Rikhsiboev I.M. and González A.R. The gradation with maximum length was introduced by Y.Khakimdjanov and in the work of J.R.Gómez, A.Jimenéz-Merchán, J.Reyes the filiform Lie algebras with maximum length were classified. The description of filiform and quasi-filiform Leibniz algebras with maximum length was obtained by Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Gómez J.R., Camacho L.M.

In 1945 A.I.Malcev proved that a solvable Lie algebra is uniquely determined by its nilradical. Further, in 1963, G.M.Mubarakzjanov developed a method of constructing solvable Lie algebras by nilradical and its nil-independent derivations. Using the Mubarakzjanov's method J.M.Ancochea-Bermúdez, R.Campoamor-Stursberg, V.Boyko, J.C.Ndogmo, P.Winternitz, L.Snobl, Y.Wang described several classes of solvable Lie algebras. Classification of solvable Leibniz algebras with some nilradicals were obtained in the works of Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A., Bosko-Dunbar, Dunbar J.D.

Classical deformation theory of associative and Lie algebras began with the works of M.Gerstenhaber and A.Nijenhuis, R.W.Richardson in the 1960s. They studied one-parameter deformations and established the connection between the cohomology and infinitesimal deformations of Lie algebras. In the works of

A.Fialowski, M.Penkava, M.Gilg, D.V.Millionschikov different types of deformations of Lie algebras are investigated and their properties are studied. In particular, infinitesimal deformations of filiform Lie algebras and Lie superalgebras were described by Khakimdjanov Yu., Navarro R.M. The studies of cohomological properties and deformations of Leibniz algebras were carried out by J.-L.Loday, T.Pirashvili, D.Balavoine, J.M.Lodder, A.Fialowski and others.

The basic concepts and systematical exposition of basic of Lie superalgebras are given in the monograph of V.G.Kac. Works of F.A.Berezin, V.G.Kac, D.A.Leites and others devoted to description of simple and semi-simple Lie superalgebras. Nilpotent Lie superalgebras are investigated by J.R.Gómez, Yu.Khakimdjanov, M.Gilg, R.M.Navarro and others. The notion of Leibniz superalgebras was introduced in 2005 by S.Albeverio, Sh.A.Ayupov and B.A.Omirov. In their paper the classification of Leibniz superalgebras with maximal index of nilpotency is obtained, and it is shown that such type of Leibniz superalgebras has nilindex $n+m+1$. The first attempt of the description of Leibniz superalgebras with characteristic sequence equal to $(n \mid m-1, 1)$ has been done by L.M.Camacho, J.R.Gómez, R.M.Navarro and B.A.Omirov.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of the higher education institution, where the dissertation is carried out. The research was performed in accordance with the plan of scientific research "Semi-simple Leibniz superalgebras and their derivations", Institute of Mathematics (FYO4-FA-Φ016, 2012-2013.); "Linear integrable and infinitesimal deformations of solvable Leibniz algebras", Institute of Mathematics (YOF4-OT-0-20581, 2014-2015.); "Non-associative and operator algebras, dynamical systems and their application in statistical physics and population biology" Institute of Mathematics (F4-FA-Φ013-F013, 2012-2016.); "Structural theory of non-associative algebras, Banach modules and discrete dynamical systems", National University of Uzbekistan (F-4-09, 2012-2016.)

The aim of the research is the development of the structure theory of finite-dimensional complex Leibniz algebras and their derivations, further development of the theory of degeneration and deformation of non-associative algebras and the description of nilpotent Leibniz superalgebras.

Research problems of this work are following:

study of nilpotency properties of finite-dimensional Leibniz algebras;

description of semi-simple Leibniz algebras and construction an example of semi-simple Leibniz algebras which are not decomposed into a direct sum of simple ideals;

classification of n -dimensional complex non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebras, and description up to isomorphism of n -dimensional complex filiform Leibniz algebras of length $n-1$;

classification of low dimensional solvable Leibniz algebras, and description of solvable Leibniz algebras which nilradical is the direct sum of the null-filiform ideals;

investigation of algebras of lower levels in certian varieties of algebras;

description of cohomology group of null-filiform and filiform Leibniz algebras;

classification of Leibniz superalgebras with nilindex $n + m$, where m and n are dimensions of even and odd parts, respectively.

The object of research. Nilpotent Leibniz algebras, solvable algebras, semi-simple algebras, derivations, degenerations, deformations, cohomology groups, nilpotent Leibniz superalgebras.

The subject of research. $\mathbb{Z}$ – graded filiform Leibniz algebras, characteristically nilpotent algebras, four and five dimensional solvable Leibniz algebras, derivations and deformations, null-filiform and filiform Leibniz algebras, nilpotent Leibniz superalgebras with the maximal index of nilpotency.

Methods of research. In the dissertation the methods of structural constants, classification methods, gradation methods, methods of the theory of degenerations, deformation theory and the methods of invariant theory are applied.

Scientific novelty consists of the following:

a characterization of the nilpotency of finite-dimensional Leibniz algebras in terms of Leibniz derivations is obtained;

non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebras and n - dimensional filiform Leibniz algebras of length $n-1$ are classified;

it is shown that the classical result of the decomposition of a semi-simple Lie algebra into a direct sum of simple ideals is not true for Leibniz algebras;

description of four dimensional complex Leibniz algebras is obtained, and five-dimensional complex solvable algebra Leibniz with three-dimensional nilradical are classified;

classification of solvable algebra Leibniz, whose nilradical is the direct sum of the null-filiform ideals is obtained;

classification of algebras of level one and a description of algebras of level two in the varieties of finite-dimensional complex associative, Jordan and Lie algebras are obtained;

the second cohomology groups of null-filiform Leibniz algebras are described, and a description of infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras is obtained;

classification of null-filiform and filiform complex Leibniz superalgebras with nilindex $n+m$ is obtained;

Leibniz superalgebras with the nilindex $n+m$ are described and it is proved that, Leibniz superalgebras except null-filiform and filiform Leibniz superalgebras and Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$, have nilindex strictly less than $n+m$.

Practical results of the research. New methods have been devoted in investigation of Leibniz superalgebras, which use gradation method of the even part of the superalgebra. In particular, the well-known description of the Lie superalgebra with maximal nilindex were obtained in more elegant and simple way. The results of the dissertation concerning the classification of low dimensional solvable Leibniz algebras allow to verify number of hypotheses about solvable Leibniz algebras with arbitrary dimensional.

The reliability of the research results is substantiated by the strictness of mathematical reasoning and using the known methods of investigation of other classes of algebras and superalgebras, using fundamental results of the theory of algebras and superalgebras. The results of the classification statements in the case of small dimensions were confirmed by special mathematical programs which created in Mathematica 12.

The scientific and practical significance of the research results. The scientific value of the results of research is that the results obtained in the work can be used for further research of other varieties of algebras and superalgebras. In particular, the techniques and methods developed in this dissertation can be used to solve the well-known Grunewald's conjecture on non existence of rigid nilpotent Lie algebra in the variety of Lie algebras.

The practical significance of the dissertation is that the results of the thesis concerning the classification of low dimensional solvable Leibniz algebras allow to verify number of hypotheses about the solvable Leibniz algebras with arbitrary dimension. Classification of finite-dimensional algebra of level one and level two is an important result for complete information about the degenerations tree of other varieties of algebras.

Implementation of the research results. Description of n -dimensional complex filiform Leibniz algebras of length $n-1$ and classification of filiform noncharacteristically nilpotent Leibniz algebras have been used in the foreign project FQM143 – Computational Method of Applied Mathematics (University of Seville, Spain, Confirmation dated September 25th, 2015). In particular, these descriptions were used in the classification of naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras and the description of complex solvable Leibniz algebras with non Lie filiform nilradicals.

Description of infinitesimal deformation of nilpotent Leibniz algebras and the characterization properties of some semi-simple Leibniz algebras, which were obtained in this dissertation, were used in the research project MTM2009-14464-C02 (University of Santiago de Compostela, Spain, Confirmation dated November 4th, 2015) to describe the second cohomology group of simple Leibniz algebras.

The description of infinitesimal deformation of nilpotent Leibniz algebras have been used in the project 05-02-12-2188FR (University Putra Malaysia, Confirmation dated February 2nd, 2016) to describe the orbit closures of some classes of Leibniz algebras under the action of the linear group on the variety of Leibniz algebras

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at the following international and republican scientific conferences: «Operator algebras and quantum probability» (Tashkent, 2005), «Differential equations and their applications» (Nukus, 2009), «Operator algebras and quantum probability» (Tashkent, 2012), «Modern problems of complex and functional analysis» (Nukus, 2012), «Actual problems of mathematical analysis» (Urgench, 2012), «Modern problems of differential equations and their applications» (Tashkent, 2013), «The problem of modern topology and its applications » (Tashkent, 2013), «Non-classical equations of mathematical physics and their

applications» (Tashkent, 2014), «Algebra, analysis and quantum probability» (Tashkent, 2015).

This work was discussed at the republican seminars “Operator algebras and their applications” of the Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan, at the seminar “Modern algebra and its applications” of the National University of Uzbekistan, at the city seminar of Department of Algebra and Functional Analysis of the National University of Uzbekistan, at the seminar of Institute of Mathematics, University Santiago de Compostela (Spain, 2012), at the seminar “On recent achievements on harmonic analysis, algebras and their applications” University Putra Malaysia (Malaysia, 2013), at the seminar “Non-associative algebras” University of Seville (Spain, 2014). The obtained result were presented in the following international congresses: «International Congress of Mathematicians-Seoul 2014» (Korea, 2014), «TWAS 25th General Meeting. 2014» (Oman, 2014).

Publications of the research results. 40 scientific papers are published on the theme of the dissertation, from which there are 5 articles in national journals, 18 articles in foreign journals, 17 abstracts in scientific conferences.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of the introduction and four chapters with conclusions, general conclusion and bibliography. The total volume of the work is 200 pages, there are 184 items in the list of references.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In introduction the actuality and demand for the theme of dissertation is verificated, connection of the research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic is stated, review of foreign scientific research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem are provided, the aim and problems are formulated, the object and the subject of research are described, scientific novelty and practical results of research are stated, the theoretical and practical significance of obtained results is revealed, the implementation of research results in practice, the list of published works and the dissertation structure are given.

In the first chapter of dissertation which named «**The description of semi-simple and filiform Leibniz algebras**» a preliminary is given, some properties of semi-simple Leibniz algebras are obtained, the classification of n -dimensional filiform Leibniz algebras of length $n-1$ and the description of non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebras are obtained.

Definition 1. An algebra L over a field F is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the so-called Leibniz identity:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

holds true.

For a given Leibniz algebra L we define derived sequences as:

$$\text{a) } L^{[1]} = L, \quad L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[n]}]; \quad \text{b) } L^1 = L, \quad L^{n+1} = [L^n, L^1].$$

Definition 2. A Leibniz algebra is called solvable, if there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $L^{[m]} = 0$. The number m , such that $L^{[m-1]} \neq 0$ and $L^{[m]} = 0$ is called index of solvability of the algebra L .

A Leibniz algebra L is called nilpotent, if there exists $s \in \mathbb{N}$ such that $L^s = 0$. The minimal number s with this property is called index of nilpotency (nilindex) of the algebra L .

The maximal nilpotent (solvable) ideal of a Leibniz algebra is said to be the nilradical (radical) of the algebra.

It is known that any non-Lie Leibniz algebra L has an ideal $I = \text{span}\{[x, x], x \in L\}$, which coincides with the space spanned by squares of elements of L , and the quotient algebra L/I is a Lie algebra. Therefore, in Dzumadil'daev's work the following definition of simple Leibniz algebra has been suggested.

Definition 3. An algebra L is called simple, if $L^2 \neq I$ and it contains only ideals $\{0\}, I, L$.

Definition 4. An algebra L is called semi-simple, if its maximal solvable ideal is equal to I .

Obviously, the quotient algebra of a simple Leibniz algebra by its ideal I is a simple Lie algebra, but the converse is not true, i.e. there exist a Leibniz algebra which is not simple, however the Lie algebra L/I is simple.

Definition 5. An algebra L is called Lie-simple if the quotient algebra L/I is a simple Lie algebra.

As it was mentioned above analogue of Levi's Theorem for Leibniz algebras was proved by D.Barnes. The question: whether an arbitrary finite dimensional semisimple Leibniz algebra is a direct sum of simple Leibniz algebras is considered in this dissertation.

Let L be a semi-simple Leibniz algebra and I be the ideal spanned by squares of elements. Then $L = S + I$, where S – semi-simple Lie algebra and $[I, S] = I$. Moreover, we have $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$, i.e., $L = (S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k) + I$. Let us introduce the notation $I_j = [I, S_j]$, $1 \leq j \leq k$.

In the following theorem we prove that if simple algebras $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$ are isomorphic to the three dimensional algebra sl_2 and each module I_j irreducible is over S_j , then the semi-simple Leibniz algebra L is decomposed into the direct sum of simple Leibniz algebras.

Theorem 1. Let L be a semisimple Leibniz algebra such that $L = (sl_2^1 \oplus sl_2^2 \oplus \dots \oplus sl_2^{k-1} \oplus S^k) + I$. Let I_j be irreducible module over sl_2^j ($1 \leq j \leq k-1$) and I_k is irreducible over S^k . Then L is decomposed into the direct sum of simple Leibniz algebras, namely,

$$L = (sl_2^1 + I_1) \oplus (sl_2^2 + I_2) \oplus \dots \oplus (sl_2^{k-1} + I_{k-1}) \oplus (S^k + I_k).$$

Note that if I_j is reducible over S_j , then the semisimple Leibniz algebra is not decomposable into the direct sum of simple ideals. However this algebra is

decomposed into the direct sum of Lie-simple algebras. Then a natural question arises: whether any semisimple Leibniz algebra can be represented as a direct sum of Lie-simple Leibniz algebras?

The following example gives the negative answer to this question.

Example 1. Let L be a 10 – dimensional semisimple Leibniz algebra. Let $\{x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, f_1, h_1, e_2, f_2, h_2\}$ be a basis of the algebra L such that $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $sl_2^1 = \{e_1, f_1, h_1\}$, $sl_2^2 = \{e_2, f_2, h_2\}$ and multiplication table of L has the following form:

$$\begin{aligned} [sl_2^1, sl_2^1]: & \quad [e_1, h_1] = 2e_1, & [f_1, h_1] = -2f_1, & [e_1, f_1] = h_1, \\ & [h_1, e_1] = -2e_1, & [h_1, f_1] = 2f_1, & [f_1, e_1] = -h_1, \\ [sl_2^2, sl_2^2]: & \quad [e_2, h_2] = 2e_2, & [f_2, h_2] = -2f_2, & [e_2, f_2] = h_2, \\ & [h_2, e_2] = -2e_2, & [h_2, f_2] = 2f_2, & [f_2, e_2] = -h_2, \\ [I, sl_2^1]: & [x_1, f_1] = x_2, & [x_1, h_1] = x_1, & [x_2, e_1] = -x_1, & [x_2, h_1] = -x_2, \\ & [x_3, f_1] = x_4, & [x_3, h_1] = x_3, & [x_4, e_1] = -x_3, & [x_4, h_1] = -x_4, \\ [I, sl_2^2]: & [x_1, f_2] = x_3, & [x_1, h_2] = x_1, & [x_3, e_2] = -x_1, & [x_3, h_2] = -x_3, \\ & [x_2, f_2] = x_4, & [x_2, h_2] = x_2, & [x_4, e_2] = -x_2, & [x_4, h_2] = -x_4. \end{aligned}$$

From this table of multiplications we have $[I, sl_2^1] = I$, $[I, sl_2^2] = I$. Moreover I splits over sl_2^1 as $\{x_1, x_2\} \oplus \{x_3, x_4\}$, and over sl_2^2 as $\{x_1, x_3\} \oplus \{x_2, x_4\}$. It is not difficult to check that if L decomposes into a direct sum of Lie-simple algebras, then it has a form $(sl_2^1 + I_1) \oplus (sl_2^2 + I_2)$. Since $[I_1, sl_2^2] \neq 0$ and $[I_2, sl_2^1] \neq 0$, we get a contradiction with the assumption that L is decomposed into a direct sum of Lie-simple algebras.

Let us give the definition of Leibniz-derivation for Leibniz algebras.

Definition 6. A Leibniz-derivation of order n for a Lie algebra L is an linear endomorphism d of L satisfying the identity :

$$d([\dots[[x_1, x_2], x_3] \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^n [\dots[\dots[[x_1, x_2], \dots, x_{i-1}], d(x_i)], \dots, x_n].$$

for every $x_1, x_2, \dots, x_n \in L$.

In the following theorem we present a characterization of nilpotency for Leibniz algebras in terms of Leibniz-derivations.

Theorem 2. A Leibniz algebra over a field of characteristic zero is nilpotent if and only if it has an invertible Leibniz-derivation.

Definition 7. A Leibniz algebra L is said to be filiform if $\dim L^i = n-i$, where $2 \leq i \leq n$.

It is known that any n -dimensional filiform Leibniz algebra admits a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that the table of multiplication of the algebra has one of the following forms:

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta): & \quad [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ & [e_1, e_2] = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \theta e_n, \\ & [e_j, e_2] = \alpha_4 e_{j+2} + \alpha_5 e_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} e_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\ F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma): & [e_1, e_1] = e_3, & [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ & [e_1, e_2] = \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \dots + \beta_n e_n, & [e_2, e_2] = \gamma e_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3): \quad & [e_j, e_2] = \beta_4 e_{j+2} + \beta_5 e_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} e_n, & 3 \leq j \leq n-2, \\
& [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\
& [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, \quad [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, & [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\
& [e_2, e_j] = -[e_j, e_2] \in \{e_{j+2}, e_{j+3}, \dots, e_n\}, & 3 \leq j \leq n-2, \\
& [e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \in \{e_{i+j}, e_{i+j+1}, \dots, e_n\}, & 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i \leq j \leq n-i,
\end{aligned}$$

were $\alpha_i, \theta, \beta_i, \gamma \in \mathbb{C}$ and omitted products are equal to zero.

Definition 8. A nilpotent Leibniz algebra is called characteristically nilpotent if all its derivations are nilpotent.

In the following theorems we present the classification of non-characteristically nilpotent Leibniz algebras of the families $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ and $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$.

Theorem 3. Let L be a non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebra of the family $F_1(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$. Then it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$F_1^s(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \alpha_n), \quad 4 \leq s \leq n,$$

where

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & \text{if } k \not\equiv s \pmod{s-3}; \\ (-1)^t Q_{t+1}^{s-1}, & \text{if } k \equiv s \pmod{s-3} \text{ for } t = \frac{k-s}{s-3}, \end{cases}$$

$4 \leq k \leq n$ and $Q_n^p = \frac{1}{(p-1)n+1} \cdot \frac{(pn)!}{n!((p-1)n!)}$ is the p -th Catalan number.

Theorem 4. Let L be a non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebra of the family $F_2(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$. Then it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

for even n : $F_2^j(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0)$, $1 \leq j \leq n-2$;

for odd n : $F_2(0, \dots, 0, \beta_{\frac{n+1}{2}}, 0, \dots, 0, 1)$ and $F_2^j(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $1 \leq j \leq n-3$.

Now we consider a filiform Leibniz algebra L of the family $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. It is not difficult to see that if L be non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebra of the family $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, then the table of multiplication of L has the form:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_1] = \theta_1 e_n, \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \theta_2 e_n, \\ [e_2, e_2] = \theta_3 e_n, \\ [e_i, e_{n+1-i}] = -[e_{n+1-i}, e_i] = \alpha(-1)^i e_n, & 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Theorem 5. Let L be a non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebra of the family $F_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Then it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$L(1,0,0), \quad L(0,1,0), \quad L(0,0,1).$$

Let L be a $\mathbb{Z}$ -graded Leibniz algebra with a finite number of non-zero subspaces, i.e. $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, where $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ for any $i, j \in \mathbb{Z}$.

We say that a nilpotent Leibniz algebra L admits a connected gradation if $L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$, where each $V_i \neq 0$ is non-zero for i ($k_1 \leq i \leq k_t$). The number of subspaces $l(L) = \max\{\text{len}(\oplus L) = k_t - k_1 + 1 \mid L = V_{k_1} \oplus V_{k_2} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ is a connected gradation}\}$ is called the length of the algebra L .

Below we give the main result of the paragraph 5 of the Chapter 1. Namely, in the following theorem we give the classification n -dimensional complex filiform Leibniz algebras of length $n-1$.

Theorem 6. Any n -dimensional complex filiform Leibniz algebra of length $n-1$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned} F_n^2 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_3, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \end{cases} & 3 \leq i \leq n-1, \\ F_n^3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = -[y_1, y_i] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_{n+1-i}] = -[y_{n+1-i}, y_i] = (-1)^{i+1} y_n, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \\ M_1(k) : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{k+i-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq n-k, 3 \leq k \leq n-1, \end{matrix} \\ M_2 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_i, y_n] = y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, \\ [y_n, y_n] = \alpha y_{n-1}, \end{cases} & \begin{matrix} 1 \leq i \leq n-2, \\ 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ \alpha \neq 0, \end{matrix} \\ M_3 : & \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_n, y_n] = y_{n-1}, \end{cases} & 1 \leq i \leq n-2, \\ M_4 : & \begin{cases} [y_1, y_1] = y_n, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \end{cases} & \begin{matrix} 2 \leq i \leq n-1, \\ 2 \leq i \leq n-1, \end{matrix} \end{aligned}$$

where $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ is a basis of algebra and omitted products are equal to zero.

In the second chapter of dissertation named «**The description of low dimensional solvable Leibniz algebras**» the classification of four dimensional complex Leibniz algebras and the description of five dimensional solvable Leibniz algebras with three dimensional nilradical are obtained.

Note that the dimension of the nilradical of 4-dimensional solvable Leibniz algebras are equal to two or three. The classification of two and three dimensional

nilpotent Leibniz algebras was obtained in the works of J.L.Loday and B.A.Omirov, respectively.

Up to isomorphism there exist two 2-dimensional nilpotent Leibniz algebras:

$$\mu_1: [e_1, e_1] = e_1, \quad \mu_2: \text{abelian.}$$

In the three dimensional case there exist six pairwise non-isomorphic 3-dimensional nilpotent Leibniz algebras, one of them is a parametric class:

$$\begin{aligned} \lambda_1: & [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3; \\ \lambda_2(\alpha): & [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha \neq -1 \text{ и } \lambda_2(\alpha) \cong \lambda_2(\alpha'), \text{ if } \alpha\alpha' = 1; \\ \lambda_3: & [e_1, e_1] = e_3; \\ \lambda_4: & [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3; \\ \lambda_5: & [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = -e_3; \\ \lambda_6: & \text{abelian.} \end{aligned}$$

In the following theorem we give the classification of four dimensional Leibniz algebras whose nilradical has dimension two.

Theorem 7. Let L be a 4-dimensional solvable Leibniz algebra with 2-dimensional nilradical. Then L is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned} R_1: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, \\ R_2: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [x, e_1] = -e_1, [y, e_2] = -e_2, \\ R_3: & [e_1, x] = e_1, [e_2, y] = e_2, [y, e_2] = -e_2, \end{aligned}$$

where $\{x, y, e_1, e_2\}$ is a basis of the algebra.

In the following theorem the classification of four dimensional solvable Leibniz algebras whose nilradical is isomorphic to λ_1 is obtained.

Theorem 8. Let L be a 4-dimensional solvable Leibniz algebra, whose nilradical is isomorphic to λ_1 . Then, L is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$L_1(\gamma): \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = \gamma e_2, \\ [e_3, x] = (1 + \gamma)e_3, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = -\gamma e_2, \\ [x, e_3] = -(1 + \gamma)e_3. \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_2, x] = -e_2, \\ [x, e_1] = -e_1, \\ [x, e_2] = e_2, \\ [x, x] = e_3. \end{cases} \quad L_3: \begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, \\ [e_1, x] = e_1 + e_2, \\ [e_2, x] = e_2, \\ [e_3, x] = 2e_3, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, \\ [x, e_2] = -e_2, \\ [x, e_3] = -2e_3. \end{cases}$$

Similarly, we obtain the list of non isomorphic 4-dimensional solvable Leibniz algebras with the following three dimensional nilradicals:

- There exist five algebras with nilradical $\lambda_2(\alpha)$;
- There exist 11 algebras with nilradical λ_3 ;
- There exist one algebra with nilradical λ_4 ;
- There is no algebra with nilradical λ_5 ;
- There exist 23 algebras with nilradical λ_6 .

Now we consider five dimensional solvable Leibniz algebras with three dimensional nilradicals $\lambda_1, \lambda_2(\alpha), \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ and λ_6 .

Theorem 9. Let L be a five dimensional solvable Leibniz algebra, whose nilradical is isomorphic to λ_1 . Then L is a Lie algebra and it is isomorphic to following algebra:

$$M_1: [e_2, e_1] = e_3, [e_1, x_1] = e_1, [e_2, x_2] = e_2, [e_3, x_1] = e_3, [e_3, x_2] = e_3, \\ [e_1, e_2] = -e_3, [x_1, e_1] = -e_1, [x_2, e_2] = -e_2, [x_1, e_3] = -e_3, [x_2, e_3] = -e_3.$$

Similarly, we obtain the description of 5-dimensional solvable Leibniz algebras with the remaining three dimensional nilradicals. Namely, we obtain that:

- There exist one five-dimensional algebra with nilradical $\lambda_2(0)$;
- There exist two algebras with nilradical λ_3 ;
- There is no five-dimensional algebra with nilradicals $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_2(\alpha), \alpha \neq 0$;
- There exist 18 algebras with nilradical λ_6 .

The third chapter of dissertation named «**On the degenerations of some variety of algebras and infinitesimal deformation of Leibniz algebras**» devoted to the geometric method to investigation of finite-dimensional complex algebras.

Define the action of linear reductive group $GL_n(F)$ on the variety of n -dimensional algebras $Alg_n(F)$ as follows:

$$[x, y]_g := g [g^{-1}x, g^{-1}y],$$

where $g \in GL_n(F)$ and $x, y \in L$.

The orbit $Orb(L)$ under this action consist of algebras isomorphic to the algebra L .

Definition 9. An algebra L is said to degenerate to an algebra M , if M lies in the Zariski closure of $Orb(L)$. We denote this by $L \rightarrow M$.

Denote by $LSolv(N)$ the set of all n -dimensional solvable Leibniz algebras whose nilradical is N .

Theorem 10. Let $R_1 \in LSolv(N_1)$, $R_2 \in LSolv(N_2)$ and let $R_2 \in \overline{Orb(R_1)}$. Then $\dim(N_2) \geq \dim(N_1)$.

The degeneration $L \rightarrow M$ is said to be trivial, if L is isomorphic to M . The degeneration $L \rightarrow M$ is called a direct degeneration if there is no chain of non-trivial degenerations of the form $L \rightarrow N \rightarrow M$.

Definition 10. A level of an algebra L is the maximal length of chain of direct degenerations $L \rightarrow L_1 \rightarrow L_2 \dots \rightarrow a_n$, where a_n is a n -dimensional abelian algebra.

In the second paragraph of Chapter 2 the description of all complex finite dimensional algebras of level one is obtained.

Theorem 11. A n -dimensional ($n \geq 3$) algebra is algebra of level one if and only if it is isomorphic to one of the following algebras:

$$p_n^-: \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = -e_i, \quad i \geq 2, \\ n_3^- \oplus a_{n-3}: \quad e_1 \cdot e_2 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = -e_3, \\ \lambda_2 \oplus a_{n-2}: \quad e_1 \cdot e_1 = e_2, \\ v_n(\alpha): \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_i \cdot e_i = \alpha e_i, \quad e_i \cdot e_1 = (1 - \alpha)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

In the following theorem we give the classification of algebras of level two in the variety of complex n -dimensional Jordan algebras.

Theorem 12. A n -dimensional Jordan algebra is algebra of level two if and only if it is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned} J_1 &= \{e\} \oplus a_{n-1} : & e \cdot e &= e; \\ J_2 &= \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} : & e_1 \cdot e_1 &= e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ J_3 &= \{e_1, e_2, e_3\} \oplus a_{n-3} : & e_1 \cdot e_2 &= e_3. \end{aligned}$$

Now we give the description of algebras of level two in the varieties of complex n -dimensional Lie algebras. From D.Burde's work we have the lists of algebras of level two in the varieties three and four dimensional Lie algebras. Therefore, we consider the case of $n \geq 5$.

Theorem 13. An arbitrary n ($n \geq 5$)-dimensional Lie algebra of level two is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\begin{aligned} n_{5,1} \oplus a_{n-5} : & \quad [e_1, e_3] = e_5, \quad [e_2, e_4] = e_5, \\ n_{5,2} \oplus a_{n-5} : & \quad [e_1, e_2] = e_4, \quad [e_1, e_3] = e_5, \\ r_2 \oplus a_{n-2} : & \quad [e_1, e_2] = e_2, \\ g_{n,1}(\alpha) : & \quad [e_1, e_2] = \alpha e_2, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n, \alpha \neq 1, \alpha \in \mathbb{C}^* \\ g_{n,2} : & \quad [e_1, e_2] = e_2 + e_3, \quad [e_1, e_i] = e_i, \quad 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

For the associative algebras we have the following theorem.

Theorem 14. Any n -dimensional associative algebra of level two is isomorphic to one of the following algebras:

$$\begin{aligned} A_1 : & \quad e \cdot e = e; \\ A_2 : & \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_3 : & \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_1 \cdot e_i = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_4 : & \quad e_1 \cdot e_1 = e_1, \quad e_i \cdot e_1 = e_i, \quad 2 \leq i \leq n; \\ A_5(\alpha) : & \quad e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = \alpha e_3; \\ A_6 : & \quad e_1 \cdot e_1 = e_3, \quad e_2 \cdot e_1 = e_3, \quad e_1 \cdot e_2 = -e_3. \end{aligned}$$

where $\alpha \in \{|z| < 1\} \cup \{|z| = 1, \text{Im } z \geq 0\}$.

In the fourth paragraph of Chapter 3 we obtain the description of infinitesimal deformation of null-filiform Leibniz algebra NF_n .

Theorem 15. The following 2-cocycles

$$\varphi_{j,k}(x_j, x_1) = x_k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 2 \leq k \leq n.$$

$$\psi_j(1 \leq j \leq n-1) = \begin{cases} \psi_j(x_j, x_1) = x_1, \\ \psi_j(x_i, x_{j+1}) = -x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

form a basis of $ZL^2(NF_n, NF_n)$.

Corollary 1. $\dim HL^2(NF_n, NF_n) = n - 1$ and $\{\overline{\varphi_{n,2}}, \overline{\varphi_{n,3}}, \dots, \overline{\varphi_{n,n}}\}$ form a basis of $HL^2(NF_n, NF_n)$.

Consider the linear integrable deformations $\mu_t = NF_n + t \sum_{j,k} a_{j,k} \varphi_{j,k}$. Since every non-trivial equivalence class of deformations uniquely defines an element of $HL^2(L, L)$ due to Corollary 1, it is sufficient to consider $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n) = NF_n + t \sum_{k=2}^n a_k \varphi_{n,k}$, where $(a_2, a_3, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

Thus, the multiplication table of $\mu_t(a_2, a_3, \dots, a_n)$ has the form:

$$\begin{cases} [x_i, x_1] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [x_n, x_1] = t \sum_{k=2}^n a_k x_k. \end{cases}$$

Theorem 16. $\overline{\bigcup_{a_2, \dots, a_n} \text{Orb}(\mu_1(a_2, a_3, \dots, a_n))}$ is an irreducible component.

From the descriptions of the derivations of the filiform Leibniz algebras F_n^1 , F_n^2 , we conclude that

$$\begin{aligned} \dim \text{Der}(F_n^1) &= n+1, & \dim \text{BL}^2(F_n^1, F_n^1) &= n^2 - n - 1, \\ \dim \text{Der}(F_n^2) &= n+2, & \dim \text{BL}^2(F_n^2, F_n^2) &= n^2 - n - 2. \end{aligned}$$

The following theorems present the general form of the Leibniz infinitesimal deformations of the algebras F_n^1 и F_n^2 .

Theorem 17. An arbitrary infinitesimal deformation φ of F_n^1 has the following form:

$$\begin{cases} \varphi(x_1, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{1,k} x_k, & \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, & 2 \leq j \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n,k} x_k, & \varphi(x_1, x_2) = \gamma_1 x_1 + \gamma_n x_n, \\ \varphi(x_i, x_2) = ((i-2)\gamma_1 + \beta_2)x_i + \sum_{k=3}^{n+2-i} \beta_k x_{k+i-2}, & 2 \leq i \leq n, \\ \varphi(x_i, x_3) = -(\alpha_{2,1} + \gamma_1)x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1}x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, 3 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Theorem 18. An arbitrary infinitesimal deformation φ of F_n^2 has the following form:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x_j, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} x_k, & 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_{n-1}, x_1) = \sum_{k=2}^n \alpha_{n-1,k} x_k, \quad \varphi(x_n, x_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} x_k, & \\ \varphi(x_i, x_{j+1}) = -\alpha_{j,1} x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n-2, \\ \varphi(x_1, x_n) = -\alpha_{n,1} x_1 + \sum_{k=2}^n \beta_k x_k, & \\ \varphi(x_i, x_n) = -i\alpha_{n,1} x_i + \sum_{k=2}^{n-i} \beta_k x_{k+i-1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ \varphi(x_n, x_n) = \gamma_1 x_{n-1} + \gamma_n x_n. & \end{array} \right.$$

In the forth Chapter of dissertation named «**The classification of complex Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$** » the description of Leibniz superalgebras with dimensions of even and odd parts equal to n and m , respectively, and with nilindex $n+m$ is obtained.

Let $L=L_0 \oplus L_1$ be a nilpotent complex Leibniz superalgebra. For an arbitrary element $x \in L_0$, the operator of right multiplication R_x is a nilpotent endomorphism of the space L_i , where $i \in \{0, 1\}$. Denote by $C_i(x)$ ($i \in \{0, 1\}$) the descending sequence of the dimensions of Jordan blocks of the operator R_x . Consider the lexicographical order on the set $C_i(L_0)$.

Definition 11. A sequence

$$C(L) = \left(\max_{x \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_0(x) \mid \max_{\tilde{x} \in L_0 \setminus [L_0, L_0]} C_1(\tilde{x}) \right)$$

is said to be the characteristic sequence of the Leibniz superalgebra L .

Definition 12. A Leibniz superalgebra L is said to be null-filiform (respectively, filiform), if $C(L) = (n|m)$ (respectively, $C(L) = (n-1, 1 | m)$).

Denote by $ZF_{n,m}$ and $F_{n,m}$ the set of null-filiform and filiform Leibniz superalgebras, respectively.

In the following theorem the classification of null-filiform Leibniz superalgebras with two dimensional even part and with nilindex $m+2$ (i.e., case of $n=2$) is presented.

Theorem 19. Let $L \in ZF_{2,m}$ ($m \geq 2$) with nilindex $m+2$. Then m is odd and there exists a basis $\{x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ of the superalgebra L , in which the multiplication has the following form:

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_2, \\ [y_i, x_1] &= y_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [x_1, y_i] &= -y_{i+1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] &= (-1)^{i+1} x_2, & 1 \leq i \leq m-1. \end{aligned}$$

In the case of $n \geq 3$ and $m \geq 2$ we have

Lemma 1. Any Leibniz superalgebra from $ZF_{n,m}$ ($n \geq 3$, $m \geq 2$) has nilindex less than $n+m$.

Exceptional case in the class of filiform Leibniz algebras with nilindex $n+m$ appears for $n=m=2$.

Theorem 20. Let L be an arbitrary Leibniz superalgebra from $F_{2,2}$ with nilindex equal 4. Then it is isomorphic to one of the following two non isomorphic superalgebras:

$$F_{2,2}^1 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2, \end{cases} \quad F_{2,2}^2 : \begin{cases} [y_1, x_1] = y_2, \\ [x_1, y_1] = \frac{1}{2}y_2, \\ [x_2, y_1] = y_2, \\ [y_1, x_2] = 2y_2, \\ [y_1, y_1] = x_2. \end{cases}$$

For non Lie filiform Leibniz superalgebras the existence of adapted basis is given in the following theorem, which follows from the results of Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov and M.Vergne.

Theorem 21. Let L be an arbitrary filiform Leibniz superalgebra. Then there exists a basis $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ of the superalgebra L , in which the multiplication satisfies one of the following three conditions:

- a) $[x_1, x_1] = x_3, [x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$
 $[x_1, x_2] = \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n,$
 $[x_j, x_2] = \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n, \quad 2 \leq j \leq n-2,$
 $[y_j, x] = y_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m-1 \text{ and for some } x \in L_0 \setminus L_0^2,$
- b) $[x_1, x_1] = x_3, [x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$
 $[x_1, x_2] = \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \dots + \beta_n x_n, [x_2, x_2] = \gamma x_n,$
 $[x_j, x_2] = \beta_4 x_{j+2} + \beta_5 x_{j+3} + \dots + \beta_{n+2-j} x_n, \quad 3 \leq j \leq n-2,$
 $[y_j, x] = y_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m-1 \text{ and for some } x \in L_0 \setminus L_0^2,$
- c) $[x_i, x_1] = x_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$
 $[x_1, x_i] = -x_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1,$
 $[x_1, x_1] = \theta_1 x_n, [x_1, x_2] = -x_3 + \theta_2 x_n, [x_2, x_2] = \theta_3 x_n,$
 $[x_2, x_j] = -[x_j, x_2] \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \dots, x_n\}, \quad 3 \leq j \leq n-2,$
 $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \in \{x_{i+j}, x_{i+j+1}, \dots, x_n\}, \quad 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, i \leq j \leq n-i,$
 $[y_j, x] = y_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq m-1 \text{ and for some } x \in L_0 \setminus L_0^2.$

where the omitted products in L_0 are equal to zero. Moreover, the structure constants of an algebra from the class c) should satisfy the Leibniz superidentity.

Lemma 2. Let L be a Leibniz superalgebra which belongs to $F_{n,m}$ with nilindex equal to $n+m$. Then either $m=n$ or $m=n-1$ and in the latter case in the class a) there exists a basis $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ of the superalgebra L such that its multiplication has the following form

$$\begin{aligned} [x_1, x_1] &= x_3, & [x_i, x_1] &= x_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_j, x_1] &= y_{j+1}, & & & 1 \leq j \leq n-2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x_1, y_1] &= \frac{1}{2} y_2, & [x_i, y_1] &= \frac{1}{2} y_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\
[y_1, y_1] &= x_1, & [y_j, y_1] &= x_{j+1}, & 2 \leq j \leq n-1, \\
[x_1, x_2] &= \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \theta x_n, \\
[x_j, x_2] &= \alpha_4 x_{j+2} + \alpha_5 x_{j+3} + \dots + \alpha_{n+2-j} x_n, & 2 \leq j \leq n-2, \\
[y_1, x_2] &= \alpha_4 y_3 + \alpha_5 y_4 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-2} + \theta y_{n-1}, \\
[y_j, x_2] &= \alpha_4 y_{j+2} + \alpha_5 y_{j+3} + \dots + \alpha_{n+1-j} y_{n-1}, & 2 \leq j \leq n-3,
\end{aligned}$$

(where omitted products are equal to zero).

Similarly, from the family a) for $m=n$, and from the family b) for $m=n-1$ and for $m=n$ we also obtain three classes of filiform Leibniz superalgebras with nilindex $n+m$. Denote all these four classes of filiform Leibniz superalgebras by $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$, $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ and $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$, respectively.

We have the following criterion of isomorphism for the family $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$.

Proposition 1. Two superalgebras $L(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta)$ and $L'(\alpha'_4, \alpha'_5, \dots, \alpha'_n, \theta')$ are isomorphic if and only if there exists $a \in \mathbb{C}$ which satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} \alpha_j = a^{2(j-3)} \alpha'_j, & 4 \leq j \leq n, \\ \theta = a^{2n-6} \theta'. \end{cases}$$

Similarly, we get the criterion of isomorphism for the families $M(\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n, \theta, \tau)$, $G(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \gamma)$ and $H(\beta_4, \beta_5, \dots, \beta_n, \delta, \gamma)$. Using these criteria of isomorphism we obtain the classification of filiform Leibniz superalgebras with nilindex $n+m$ from the class of a) and b).

For Leibniz superalgebras which belong to the class c) we have the following lemma.

Lemma 2. Let L be a Leibniz superalgebra, which belongs to the class b) of Theorem 20. Then its nilindex is less than $n+m$.

In the paragraph 4.3. the description of Leibniz superalgebras with nilindex $n+m$, even part of which is a null-filiform Leibniz algebra. The main theorem of the paragraph 4.3. is the following Theorem.

Theorem 22. Let L be a Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, where $m_1 \leq m-2$. Then L has nilindex less than $n+m$.

In the paragraph 4.4. Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, where $m_1 \leq m-1$ are investigated and it is proved that such superalgebras have nilindex less than $n+m$.

Theorem 23. Let L be a Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n-1, 1 \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$. Then L has nilindex less than $n+m$.

One of the main result of the paragraph 4.5. is follows.

Theorem 24. Let L be a Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$, where $n_1 \leq n-2$, $m_1 \leq m-1$, and all generators are lying in L_1 . Then L has nilindex less than $n+m$.

In the paragraph 4.5 the remaining cases are investigated and it is proved that any Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n_1, n_2, \dots, n_k \mid m_1, m_2, \dots, m_s)$ with $n_1 \leq n-2$ has nilindex less than $n+m$.

CONCLUSION

1. Properties of certain semi-simple Leibniz algebras are obtained and it is shown that the classical result on decomposition of a semi-simple Lie algebra into a direct sum of simple ideals is not true for Leibniz algebras.

2. A characterization of the nilpotency of finite-dimensional Leibniz algebras is obtained and it is proved that Leibniz algebra is nilpotent if and only if it admits invertible Leibniz-derivation.

3. Classifications of non-characteristically nilpotent filiform Leibniz algebras and n - dimensional filiform Leibniz algebras of length $n-1$ are obtained.

4. A description of four complex Leibniz algebras up to isomorphism is obtained and five-dimensional complex solvable Leibniz algebras with three-dimensional nilradical are classified.

5. A classification of solvable Leibniz algebras, whose nilradical is the direct sum of the null-filiform ideals is obtained.

6. Certain results on degeneration of solvable Leibniz algebras are obtained, and it is proved that if the algebra degenerates to another one, then the dimension of nilradical of the second algebra is less than the dimension of the nilradical of the first one.

7. Algebras of lowest level are investigated, and classified the algebras of the level one. A description of algebras of the level two in the varieties of finite-dimensional complex associative, Jordan and Lie algebras is obtained.

8. Infinitesimal deformations of Leibniz algebras are investigated and the description of second cohomology groups of null-filiform Leibniz algebras is obtained. It is proved that closure of the union of orbits of single-generated Leibniz algebras forms an irreducible component of the variety of Leibniz algebras.

9. A description of infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras is obtained;

10. A classification of complex Leibniz superalgebras with nilindex $n+m$ is obtained and it is proved that Leibniz superalgebras except null-filiform and filiform Leibniz superalgebras and Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$, have nilindex less than $n+m$

The results of the dissertation have theoretical character. The main results and methods presented in the work can be used in investigations of other algebras and superalgebras, in the theory of categories, in the study of algebras with various types of gradation, in calculation of cohomology and homology groups and in investigation of various processes in theoretical physics.

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works
I бўлим (Часть I; Part I)

1. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n -dimensional filiform Leibniz algebras of length $(n-1)$ and their derivations. // Journal of Algebra. USA. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.63).
2. Albeverio S., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. On the Classification of complex Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n-1, 1 | m_1, \dots, m_k)$ and nilindex $n+m$. // Journal of Algebra and its Applications. Singapore. – 2009. - Vol. 8. - № 4. – P. 461-475. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.443).
3. Ayupov Sh.A., Camacho L.M., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Leibniz algebras associated with representations of filiform Lie algebras. // Journal of Geometry and Physics. Netherlands. – 2015. - Vol. 98. – P. 181–195. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.870).
4. Ayupov Sh.A., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A. Kh. The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$. // Acta Mathematica Sinica (English Series). Germany. – 2009. - Vol. 25. - № 2. – P. 171-190. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.579).
5. Camacho L., Gómez J.R., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. On the description of Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$. // Forum Mathematicum. Germany. – 2012. - Vol. 24. - № 4. – P. 809-826. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.527).
6. Camacho L.M., Gómez J.R., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Complex nilpotent Leibniz superalgebras with nilindex equal to dimension. // Communications in Algebra. Great Britain. – 2013. - Vol. 41. - № 7. – P. 2720-2735. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.388).
7. Canete E.M., Khudoyberdiyev A.Kh. The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. // Linear algebra and its Applications. USA. – 2013. - Vol. 439. – P. 273-288. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.983).
8. Casas J.M., Khudoyberdiyev A.Kh., M. Ladra, Omirov B.A. On the degenerations of solvable Leibniz algebras. // Linear algebra and its Applications. USA. – 2013. - Vol. 439. - № 2. – P. 472-487. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.983).
9. Fialowski A., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. A characterization of nilpotent Leibniz algebras. // Algebras and Representation Theory. Netherlands. – 2013. - Vol. 16. - № 5. – P. 1489-1505. (№ 11. Springer IF=0.719).
10. Gómez J.R., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A., The classification of Leibniz superalgebras of nilindex $n+m$ ($m \neq 0$). // Journal of Algebra. USA– 2010. –Vol. 324, № 10. – P. 2786-2803. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.615)
11. Gómez-Vidal S., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Some remarks on semisimple Leibniz algebras. // Journal of Algebra. USA– 2014. – Vol. 410. – P. 526-540. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.599)

12. Khudoyberdiyev A.Kh. Some remarks on nilpotent Leibniz superalgebras. // Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2009. - № 4. – P. 143-150. (01.00.00; №6).
13. Khudoyberdiyev A.Kh. On one irreducible component in the variety of Leibniz algebras. Uzbek Mathematical Journal. – Tashkent, 2013. - № 3. – P. 128-136. (01.00.00; №6).
14. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. The classification of algebras of level one. // Linear algebra and its Applications. USA. – 2013. - Vol. 439. - № 11. – P. 3460-3463. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.983).
15. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Infinitesimal deformations of null-filiform Leibniz superalgebras. // Journal of Geometry and Physics. Netherlands. – 2013. - Vol. 74. – P. 370-380. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.797).
16. Khudoyberdiyev A.Kh., M. Ladra, Omirov B.A. The classification of non-characteristically nilpotent Leibniz algebras. // Algebras and Representation Theory. Netherlands. – 2014. - Vol. 17. - № 3. – P. 945-969. (№ 39. Springer. IF=0.535).
17. Khudoyberdiyev A.Kh., Rakhimov I.S., Said Husain Sh.K. On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras. // Linear algebra and its Applications. USA. – 2014. - Vol. 457. – P. 428-454. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.939).
18. Khudoyberdiyev A.Kh., Ladra M., Omirov B.A. On solvable Leibniz algebras whose nilradical is a direct sum of null-filiform algebras. // Linear and Multilinear Algebra. Great Britain. – 2014. - Vol. 62. - № 9. – P. 1220-1239. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.738)
19. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras. // Journal of Geometry and Physics. Netherlands. – 2014. - Vol. 86. – P. 149-163. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.870).
20. Khudoyberdiyev A.Kh., The classification of Algebras of level two. // Journal of Geometry and Physics. Netherlands. – 2015. - Vol. 98. – P. 13-20. (№ 39. Impact Factor Search. IF=0.870).
21. Худойбердиев А.Х. Об описании супералгебр Лейбница с нильиндексом $n+m$. // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2009. - № 6. – С. 3-7. (01.00.00; №7).
22. Худойбердиев А.Х. Инфинитезимальные деформации филиформных алгебр Лейбница F_n^1 . // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2013. - № 6. С. 6-8. (01.00.00; №7).
23. Худойбердиев А.Х., Шерматова З.Х. Об описании пятимерных разрешимых алгебр Лейбница с четырехмерных не Лиевым нильрадикалом. // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2014. - № 2. – С. 149-157. (01.00.00; №6).

II бўлим (Часть II; Part II)

24. Camacho L.M, Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Description of complex Leibniz algebras whose quotient Lie algebras are isomorphic to $\mathfrak{sl}_2 + \mathbb{R}$. // VI international Conference on «Non associative algebras and its applications» Universidad Zaragoza (Spain). – 2011. – P. 18.
25. Khudoyberdiyev A.Kh., Shermatova Z.Kh. On classification of 5-dimensional solvable Leibniz algebras. // USA-Uzbekistan Conference, California State University, Fullerton (USA), 2014 – P. 8-9.
26. Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Infinitesimal deformations of naturally graded filiform Leibniz algebras. // «International Congress of Mathematicians-Seoul 2014». Abstract of Short Communications, Korea, 2014. – P. 200.
27. Khudoyberdiyev A.Kh., Classification of low dimensional solvable Leibniz algebras. // «TWAS 25th General Meeting. 2014». Abstract of Young Affiliates, Oman, 2014 – P. 29.
28. Омиров Б.А., Худойбердиев А.Х. О классификации нильпотентных супералгебр Лейбница. // «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей»: Тез. докл. междунар. науч. конф. – Ташкент, 2005. – С. 142-145.
29. Омиров Б.А., Худойбердиев А.Х. Центральные расширения естественным образом градуированных филиформных алгебр Лейбница. // VII Ферганская конференция «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения». – Наманган, 2015. – С. 211-213.
30. Худойбердиев А.Х. Классификация нуль-филиформных супералгебр Лейбница малых размерностей. // «Дифференциальные уравнения и их приложения» Тез. докл. Рес. науч. конф. – Нукус, 2009. – С. 115-117.
31. Худойбердиев А.Х., Шерматова З.Х. Об описании пятимерных нильпотентных алгебр Лейбница. // «Современные проблемы комплексного и функционального анализа»: Тез. докл. междунар. науч. конф. – Нукус, 2012. – С. 222-224.
32. Худойбердиев А.Х. Об описании характеристически нильпотентных филиформных алгебр Лейбница. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». – Ташкент, 2012. – С. 249-251.
33. Худойбердиев А.Х., Шерматова З.Х. Об описании четырехмерных разрешимых алгебр Лейбница. // «Операторные алгебры и смежные проблемы». – Ташкент, 2012. – С. 251-253.
34. Худойбердиев А.Х., On the pre-derivations of Leibniz algebras. «Актуальные проблемы математического анализа». – Ургенч, 2012. Часть 1. – С. 128-129.
35. Худойбердиев А.Х. Инфинитезимальные деформации нуль-филиформных алгебр Лейбница. Материалы республиканской научной конференции. // Ёш математикларнинг янги теоремалари. – Наманган, 2013. – С. 186-188.
36. Худойбердиев А.Х. Описание второй группы когомологий естественным образом градуированной не расщепляемой филиформной алгебры

- Лейбница. // «Проблемы современной топологии и её приложения». – Ташкент, 2013. – С. 243-245.
37. Худойбердиев А.Х., Абдурасулов К.К., Лейбницева 2-коциклы филиформные алгебры Ли. // «Проблемы современной топологии и её приложения». – Ташкент, 2013. – С. 99-100.
38. Худойбердиев А.Х., Омиров Б.А. Ассоциативные обертывающие алгебры некоторых эволюционных алгебр. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент, 2013. – С. 324-325.
39. Худойбердиев А.Х., Саидвалиев М.К. Об одном классе нильпотентных восьмимерных алгебр Лейбница. // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». – Ташкент, 2014.
40. Худойбердиев А.Х., Описание алгебр уровня два в многообразии конечномерных алгебр Ли. // «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». – Ташкент, 2015. – С. 128-129.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.
«10» февраль 2016 йил.

Босишга рухсат этилди: «10» феврал 2016 йил.
Бичими 60x84 1/8. «Times Uz» гарнитураси. Офсет усулида босилди.
Шартли босма табағи 5.4 наshr босма табағи 5.5. Тиражи 100.
Буюртма № 7
«Top Image Media» босмахонасида chop этилди.
Тошкент шаҳри, Я.Ғуломов кўчаси, 74 уй.
