МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

На правах рукописи
УДК 517.984.5

Пирматов Шамшод Тургунбоевич

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУММИРУЕМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

01.01.03 – Математическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Т а ш к е н т - 2010

Работа выполнена на кафедре "Математическая физика " механико-математического факультета Национального университета Узбекистана

Научный руководитель:	академик АН РУз, доктор физико-математических наук, профессор Алимов Шавкат Арифджанович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Турметов Батирхан Худайбергенович
	кандидат физико-математических наук, Аманов Джумаклыч
Ведущая организация:	Самаркандский государственный университет имени Алишера Навои

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2010 г. в ____ часов на заседании объединенного Специализированного совета Д.067.02.03 в Национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека по адресу: 100174, г. Ташкент, Вузгородок, НУУз имени М. Улугбека, механико-математический факультет, ауд. Г-303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального университета Узбекистана имени М. Улугбека.

Автореферат разослан «____»_____________2010 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
кандидат физико-математических наук **Ю.Х. Эшкабилов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Изучение многих физических задач приводит к решению дифференциальных уравнений с частными производными, одним из методов решения которых является метод разделения переменных или метод Фурье. При его обосновании возникает задача отыскания условий, накладываемых на произвольную функцию, при выполнении которых её разложение в ряд Фурье по собственным функциям изучаемой задачи сходится к значению самой функций или является суммируемым некоторым регулярным методом. Одними из первых результатов, полученных в этом направлении, являются теперь уже ставшие классическими теоремы Дини-Липщица и Фейера о сходимости и чезаровской суммируемости одномерных тригонометрических рядов.

Дальнейшие многочисленные исследования связаны с изучением сходимости и риссовской суммируемости кратных тригонометрических рядов Фурье и спектральных разложений, отвечающих эллиптическим операторам. Одним из принципиальных вопросов в этих исследованиях является вопрос о локализации разложений и равномерной сходимости.

Вопрос о достаточных условиях, при выполнении которых можно аппроксимировать функцию ее спектральными разложениями, связанными с самосопряженными расширениями эллиптических операторов, к настоящему времени хорошо изучен и подробно освещен в математической литературе, как в нашей стране, так и в работах зарубежных математиков, таких, как Э. Ч. Титчмарш (Великобритания), С. Минакшисундарам, К. Чандрасекхаран (Индия), Б. М. Левитан, В. А. Ильин, Е. И. Моисеев (Россия), Л. Хёрмандер (Швеция), М. Тейлор, М. Пински (США), Л. Брандолини, Л. Кольцани (Италия) и многих других. В этих работах для различных эллиптических операторов и многих классов дифференцируемых функций найдены условия гладкости функции, описывающей некоторый физический процесс, при выполнении которых ее спектральное разложение хорошо аппроксимирует ее в этой точке.

В последнее время интерес к проблеме аппроксимации средними спектральных разложений заметно возрос, причем исследованию подверглись более тонкие вопросы, связанные со спектральными разложениями негладких функций.

В то же время вопрос об условиях гладкости разлагаемых функций, необходимых для сходимости или суммируемости их спектральных разложений, выяснен в меньшей мере, что объясняется сложностью самого объекта исследования. Из математической литературы хорошо известны примеры, показывающие, что спектральное разложение может сходиться даже в тех точках, где разлагаемая функция имеет разрыв, так что обычное требование гладкости не является необходимым. Однако во всех этих примерах функция в некотором обобщенном смысле все же является в рассматриваемой точке непрерывной. Этот факт для спектральных разложений, отвечающей самосопряженному расширению оператора Лапласа в произвольной многомерной области впервые был установлен в работах Э. Ч. Титчмарша и С. Минакшисундарама.

Именно, в этих работах доказано, что если для функции $f\,(x)$ имеет место сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \lambda_n^{\frac{N}{2}},$$

где N - размерность области, f_n- коэффициенты Фурье по собственным функциям оператора Лапласа, а λ_n- собственные значения, то для сходимости спектрального разложения $E_\lambda f(x)$ к $f(x)$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы $f_r(x) \to f(x)$ при $r \to 0$, где $f_r(x)$ – среднее значение функции f по шару радиуса r с центром в точке x. Соответствующие результаты были получены ими для средних Рисса спектральных разложений в случае, когда порядок средних является целым числом, а также в предположении, что размерность рассматриваемой области не очень велика.

Особый интерес в последние годы вызвали спектральный разложения кусочно-гладких функций, т. е. функций, достаточно гладких вне некоторых гладких многообразий, на которых они могут иметь разрывы первого рода. В этом случае одним из важнейших является вопрос о справедливости принципа локализации спектральных разложений, т. е. об условиях, при которых разрывы не оказывают влияния на сходимость разложения Фурье в точках, удаленных от разрыва.

В одномерном случае известен классический результат Дирихле, из которого следует, что тригонометрический ряд Фурье кусочно-гладкой функции сходятся в каждой точке. Однако в многомерном ($N > 2$) случае для сходимости спектральных разложений требуется большая гладкость.

В 1956 году В. А. Ильин доказал, что в случае оператора Лапласа в двумерной области спектральное разложение любой кусочно-гладкой функции сходится равномерном на любом компактном подмножестве области гладкости данной функции, т. е. классический принцип локализации Дирихле справедлив и при $N = 2$.

Настоящая работа посвящается нахождению необходимых условий сходимости спектральных разложений произвольных функций, а также условий их риссовской суммируемости. Данные условия во многих практически важных случаях позволяют прийти к заключению о невозможности аппроксимации функции частичными суммами ее ряда Фурье и для конструктивного решения данного вопроса применить подходящие методы суммирования.

Степень изученности проблемы. В настоящее время рассматриваемая проблема достаточно подробно изучена для приближения спектральными разложениями, отвечающими оператору Лапласа в двух- и трехмерных областях, а также их средними Рисса целого порядка. Данная проблема не исследована для оператора Шрёдингера, для оператора Лапласа на многообразиях (оператора Лапласа-Бельтрами), а также для случая средних Рисса дробного порядка.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Национального университета имени Мирзо Улугбека (протокол № 7 от 23.02.2010 г.) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры «Математическая физика» НУУз.

Цель исследования. Отыскание необходимых условий суммируемости спектральных разложений, связанных с различными эллиптическими операторами.

Задачи исследования. Основными задачами данного исследования являются:

- установление необходимых условие сходимости спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа в терминах обобщенной непрерывности;
- изучение обобщенной непрерывности в точках риссовской суммируемости спектральных разложений, отвечающих бигармоническому оператору;
- установление необходимых условий разложимости по собственным функциям полигармонического оператора;
- изучение необходимых условий сходимости разложений функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются спектральные разложения и их средние Рисса функций, описывающих различные физические процессы.

Методы исследований. В диссертации применялись в основном методы уравнений математической физики, функционального анализа, спектральной теории линейных дифференциальных операторов.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

1) установлены необходимые условия сходимости средних Рисса спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа;

2) найдены необходимые условия сходимости спектральных разложений по собственным функциям полигармонического и бигармонического операторов;

3) получены условия обобщенной непрерывности, необходимые для суммируемости спектральных разложений по собственным функциям оператора Шредингера в произвольной трехмерной области;

4) выяснены необходимые условия сходимости разложений функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, на которые опираются основные положения диссертации, выносимые на защиту и перечисленные выше, являются новыми.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Работа имеет теоретический характер. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы в научных исследованиях в области математической физики, математического анализа, функционального анализа, а также при чтении спецкурсов.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для магистрантов.

Апробация работы. Основные результаты работы неоднократно докладывались и обсуждались на научно – исследовательском семинаре «Современные проблемы математической физики» (Национальный университет Узбекистана, руководитель – академик Ш. А. Алимов), на научно – исследовательском семинаре «Дифференциальные уравнения и спектральный анализ» (Национальный университет Узбекистана, руководители – академик М.С. Салахитдинов и профессор Р. Р. Ашуров), на международной конференции «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005 г.), на международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (Памяти академика А.А. Самарского к 90-летию со дня рождения, Москва, 16-18 июня 2009 г), на научном семинаре специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (председатель семинара: академик АН РУз Салахитдинов М.С.).

Опубликованность результатов. Все результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [5] в виде статей и тезисов конференций. Список работ приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ по теме диссертации».

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации 93 страниц. В списке литературы 117 наименований. Нумерация теорем в диссертации тройная, первая цифра означает номер главы, вторая цифра номер параграфа и третья порядковый номер теоремы. В данном параграфе нумерация формул и утверждений тройная: первая цифра указывает номер главы, вторая цифра указывает номер параграфа и третья цифра - порядковый номер формулы или утверждения в данном параграфе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность темы, приводится краткий обзор известних результатов и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе приводятся основные понятия и определения, относящиеся к эллиптическим операторам, и доказывается теорема о необходимых условиях сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа.

Пусть Ω - произвольная ограниченная область в R^N с гладкой границей. Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор Лапласа

$$Au = -\Delta u(x)$$

с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$. Как известно, данный оператор является симметрическим и имеет самосопряженное расширение.

Рассмотрим произвольное самосопряженное расширение оператора Лапласа с дискретным спектром.

Пусть $\{u_n(x)\}$ - полная ортонормированная система собственных функций рассматриваемого самосопряженного расширения оператора Лапласа, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$:

$$\Delta u_n(x) = \lambda u_n(x), \quad x \in \Omega \subset R^N. \tag{1}$$

При обосновании метода Фурье для волнового уравнения естественно возникает задача о разложении произвольной заданной в области Ω функции $f \in L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по системе собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$. Такой ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^\infty f_n u_n(x) \tag{2}$$

где

$$f_n = \int_\Omega f(x) u_n(x) dx$$

-коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Иногда вместо частных сумм ряда (2)

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n u_n(x) \tag{3}$$

рассматриваются их средние значения. Наиболее употребительны в спектральной теории так называемые нормальные средние Рисса.

Напомним, что средние Рисса $E_\lambda^s f$ спектрального разложения $E_\lambda f$ порядка s определяются следующим образом

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n<\lambda}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) = \int_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f\ . \qquad (4)$$

Определение. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n u_n(x)$ называется суммируемым методом Рисса (R,λ_n,s) к сумме A, если

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\lambda_n<\lambda}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x) = A\ , \qquad (5)$$

где $s \ge 0$, $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots.. \le \lambda_n \to \infty$, λ -непрерывный параметр.

Отметим, что при $s = 0$ среднее Рисса совпадают с частичными суммами рассматриваемого ряда. Нетрудно показать, что при любом $s > 0$ метод нормальных средних Рисса является регулярным методом, причем, если $s_1 < s_2$, то метод (R,λ_n,s_2) сильнее метода (R,λ_n,s_1). Это означает, что если соотношение (5) выполняется при некотором $s = s_1 \ge 0$, то оно будет выполняться и при любом $s > s_1$.

Предположим, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x \in R^N$ и интегрируема в этой окрестности.

Среднее значение порядка $\alpha \ge 0$ функции $f(x)$ в данной точке x определяется следующим образом:

$$S_R^\alpha f(x) = \frac{R^{-N}}{\omega(\alpha,N)}\int_{|y|\le R}\left(1-\frac{|y|^2}{R^2}\right)^{\alpha-1} f(x+y)dy \qquad (6)$$

где

$$\omega(\alpha,N) = \int_{|y|\le 1}\left(1-|y|^2\right)^{\alpha-1} dy\ .$$

Отметим, что для любой функции $f(x)$, непрерывной в точке x, выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{R\to 0} S_R^\alpha f(x) = f(x)\,. \qquad (7)$$

Обратное, вообще говоря, неверно, что проверяется на простых примерах. Например, если $x = 0$, то взяв в качестве функции $f(x)$ любую функцию, нечетную по одному из аргументов и такую, что $f(0) = 0$, мы получим, что среднее значение любого порядка $\alpha \ge 0$ этой функции равно нулю, и поэтому условие (7) выполняется очевидным образом, однако функция $f(x)$ не обязана быть непрерывной.

Тем не менее, условие (7) можно трактовать как условие непрерывности в обобщенном смысле, и именно подобное условие оказывается необходимым для суммируемости спектральных разложений (4) средними Рисса некоторого положительного порядка.

Основным результатом главы 1 является следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$. *Предположим, что при некотором* $s > 0$ *в точке* $x \in \Omega$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_\lambda^s f(x) = A.$$

Тогда для любого $\alpha \geq 0$ *такого, что* $\alpha > s + \frac{1}{2}$, *справедливо следующее утверждение:*

$$S_R^\alpha f(x) \to A, \quad R \to 0.$$

Отметим, что в условии теоремы 1.2.1 не накладывается никаких ограничений на размерность области N и не предполагается, что показатель средних Рисса s является целым числом.

Во второй главе рассмотрен вопрос о необходимых условиях обобщенной непрерывности, которым должна удовлетворять разлагаемая функция для того, чтобы ее спектральное разложение, отвечающее самосопряженному расширению бигармонического оператора, суммировалось средними Рисса в заданной точке.

Отметим, что бигармонический оператор является одним из важнейших представителей класса эллиптических операторов высокого порядка и играет важную роль в таких разделах механики, как теория упругости.

Для того чтобы изложить основные результаты данной главы, введем некоторые необходимые понятия и обозначения.

В первом параграфе главы 2 изучается вопрос о необходимых условиях обобщенной непрерывности, которым должна удовлетворяет разлагаемая функция в точках риссовской суммируемости разложений по собственным функциям бигармонического оператора:

$$\Delta^2 u_n(x) - \lambda_n u_n(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset R^N.$$

Мы предполагаем, что регулярные краевые условия является самосопряженными и такими, что все собственные значения положительны: $\lambda_n > 0$. Обозначим $\mu_n = \sqrt[4]{\lambda_n}$.

Основным результатом параграфа 1 главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$. *Предположим, что при некотором целом* $s > \frac{N-3}{2}$ *в точки* $x_0 \in \Omega$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\mu \to \infty} E_\mu^s f(x_0) = A.$$

Тогда для любого $\alpha > s - \dfrac{N-3}{2}$ *справедливо следующее равенство*

$$\lim_{R\to 0} S_R^{\alpha} f(x_0) = A.$$

В параграфе 2 главы 2 изучается задача отыскания необходимых условий разложимости по собственным функциям полигармонического оператора в произвольной трехмерной области.

Пусть $\{u_n(x)\}$ ортонормированная система собственных функций полигармонического оператора, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$:

$$\Delta^m u_n(x) - (-1)^m \lambda_n u_n(x) = 0,\ x \in \Omega \subset R^3.$$

Обозначим $\mu_n = \lambda^{\frac{1}{2m}}$.

Основным результатом параграфа 2 главы 2 является следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\alpha > \dfrac{1}{2}$ *и* $f \in L_2(\Omega)$ *и для некоторой точки* $x \in \Omega$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty} E_\mu f(x) = A.$$

Тогда

$$S_R^{\alpha} f(x) \to A, \quad R \to 0.$$

В третьей главе изучается вопрос о гладкости в обобщенном смысле функций, разлагаемых в ряд по собственным функциям оператора Шредингера в произвольной трехмерной области, в тех точках, где этот ряд сходится, и исследуется вопрос о сходимости спектральных разложений функции из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами.

В первом параграфе третьей главы диссертации приведены основные определения и обозначения, связанные с оператором Лапласа-Бельтрами.

Сформулируем результаты второго параграфа третьей главы.

Пусть Ω - произвольная ограниченная область в R^3 с гладкой границей и $q \in L_2(\Omega)$ - неотрицательная функция. Рассмотрим, оператор Шредингера $H_0 = -\Delta + q$ с областью определения $C_0^{\infty}(\Omega)$ и обозначим символом H его положительное самосопряженное расширение. Пусть $\mu_1^2 \le \mu_2^2 \le \mu_3^2 \le \ldots\ldots$ собственные числа оператора H и пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - соответствующая полная ортонормированная система собственных функций. Так как μ_k^2 положительны, мы можем считать, что μ_k вещественны и положительны.

Во втором параграфе третьей главы доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $x \in \Omega$ *и* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Если* $E_\mu f(x) \to A$ *при* $\mu \to \infty$, *то* $S_R^\alpha f(x) \to A$ *при* $R \to 0$.

Доказательство аналогичной теоремы для спектральных разложений, отвечающих оператору Лапласа, приведено в классической монографии Э.Ч. Титчмарша «Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка».

В третьем параграфе третьей главы изучается вопрос о сходимости спектральных разложений функций из классов Соболева по системе собственных функции оператора Лапласа-Бельтрами с некоторым весом $\sqrt{g(x)}$.

Пусть Ω - риманово N - мерное глобально симметрическое пространства ранга 1 с метрикой

$$ds^2 = \sum_{j,k-1}^{n} g_{jk} dx_j dx_k ,$$

Определим матрицу $\left\| g^{jk} \right\|$ и неотрицательную величину g соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ji} g^{ik} = \delta_{jk}, \quad g = \det \left| g_{jk} \right|,$$

и рассмотрим оператор Лапласа – Бельтрами

$$B(D) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} g^{jk} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Этим же символом B обозначим его произвольное неотрицательное самосопряженное расширение с соответствующим разложением единицы $\{E_\lambda\}$, т.е. ортогональным семейством проекторов таких, что

$$B = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda .$$

Спектральное разложение произвольного элемента $f \in L_2(\Omega)$, согласно теореме Л.Гординга, имеет вид интегрального оператора

$$E_\lambda f(x) = \int_\Omega \theta(x, y, \lambda) f(y) \sqrt{g(y)} dy ,$$

ядро, $\theta(x,y,\lambda)$ которого называют спектральной функцией оператора B, причем существуют функции $\eta(x,y,\lambda)$ и $\rho(\lambda)$ такие, что

$$\theta(x,y,\lambda)=\int_0^\lambda \eta(x,y,t)\,d\rho(t)$$

и

$$B(D_x)\eta(x,y,\lambda)=\lambda\,\eta(x,y,\lambda).$$

Обозначим через $A(r)$ полную меру многообразия $S_r(x)$, соответствующую римановой мере на $S_r(x)$. Мы будем называть $A(r)$ площадью сферы $S_r(x)$. Отметим, что, так как пространства Ω однородно, т.е. обладает транзитивной группой изометрии, то $A(r)$ не зависит от x.

Как известно, функция $A(r)$ является гладкой и при достаточно малым $r>0$ выполняется оценка

$$A(r)=\omega_N r^{N-1}\left[1+O(r)\right],\ \text{где}\qquad \omega_N=\frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$$

причем оценку можно дифференцировать достаточно число раз.

Элемент объема имеет вид

$$dV=\sqrt{g(x)}\,dx=A(r)\Phi(\theta)\,dr\,d\theta.$$

Символом $x\dot{+}r\theta$ мы обозначаем точку, полученную движением на расстояние r вдоль геодезической линии, выпущенной из точки x в направлении θ. Тогда интеграл по геодезическому шару $B(x,R)$ радиуса R с центром в точке x записывается в виде

$$\int_{B(x,R)} f(y)\sqrt{g(y)}\,dy=\int_0^R A(r)\,dr\int_\theta f(x\dot{+}r\theta)\Phi(\theta)\,d\theta.$$

В геодезических полярных координатах в точке x оператор Лапласа-Бельтрами имеет вид

$$B = \frac{1}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[A(r)\frac{\partial}{\partial r}\right] + \Delta_\theta$$

где Δ_θ - оператор Лапласа-Бельтрами на $S_r(x)$.

Основной является следующая формула среднего значения В.А. Ильина (О рядах Фурье по фундаментальным системам функций оператора Бельтрами. // Дифференциальные уравнения, 5, №11, (1969), С. 1940-1978): для любого решения уравнения

$$Bu_\lambda(x) = -\lambda u_\lambda(x)$$

справедлива следующая формула

$$\int_\theta u_\lambda(x + r\theta)d\theta = u_\lambda(x)\phi_\lambda(r),$$

где $\phi_\lambda(r)$ - решение следующей краевой задачи:

$$\frac{1}{A(r)}\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{d\phi(r)}{dr}\right] + \lambda\phi(r) = 0, \quad \phi(0) = 1.$$

Введем обозначение

$$\mu = \sqrt{\lambda},\ \mu_n = \sqrt{\lambda_n}.$$

Мы предполагаем, что все собственные значения положительны и удовлетворяет следующее соотношение:

$$0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \ldots\ldots\ldots, \quad \mu_n \to \infty.$$

В третьем параграфе главы III доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть функция* $\psi(r,\mu)$ *определена для любого* $r \in [0,R]$ *и* $\mu > 0$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

i) выполняется равенство

$$\lim_{r\to 0}\psi(r,\mu) = B;$$

ii) следующий интеграл ограничен:

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \left| \frac{\partial \psi(r,\mu)}{\partial \mu} \right| d\mu \le C < \infty .$$

Тогда, если сходится ряд

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \to S, \text{ при } \quad m \to \infty,$$

то

$$\sigma(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi(r,\mu_k) \to BS \quad \text{при } \ r \to 0+0.$$

В следующей теореме доказывается обобщенная непрерывность функций из пространства Соболева в точках сходимости спектральных разложений.

Теорема 3.3.2. *Пусть* $l > \frac{N-2}{2}$. *Если спектральное разложение функции* $f \in W_2^l(\Omega)$ *сходится в точке* $x \in \Omega$ *к числу* S, *то*

$$\lim_{R \to 0} \frac{1}{V(R)} \int_{B(x,R)} f(y)dy = S.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Ш.А. Алимову за постоянное внимание, поддержку и оказанную им большую помощь при выполнении данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию вопросов отыскания необходимых условий суммируемости спектральных разложений, связанных с различными эллиптическими операторами.

Найдены необходимые условия сходимости средних Рисса спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа.

Найдены необходимые условия сходимости спектральных разложений по собственным функциям полигармонического и бигармонического операторов.

Установлены условия обобщенной непрерывности, необходимые для суммируемости спектральных разложений по собственным функциям оператора Шредингера в произвольной трехмерной области.

Выяснены необходимые условия сходимости спектральных разложений функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами.

Работа имеет теоретический характер. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы в научных исследованиях специалистами по математической физике, математическому анализу, функциональному анализу, а также при решении задач математической физики и при чтении спецкурсов.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Пирматов Ш.Т. Условия обобщенной гладкости, необходимые для суммируемости спектральных разложений.// Труды Меж. конф. Современные проблемы математической физики и информационных технологий. -Ташкент, 18-24 апреля 2005. – Т.1. – С. 135 –137.
2. Пирматов Ш.Т. О необходимых условиях сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами.// ДАН РУз. – Ташкент, – 2009, - №1. -С. 7 – 10.
3. Пирматов Ш.Т. О необходимых условиях разложимости по собственным функциям полигармонического оператора. // Вестник НУУз.-Ташкент,- 2009,- № 1. – С. 60-62.
4 Пирматов Ш.Т. Об обобщенной непрерывности функций в точках Риссовской суммируемости их спектральных разложений.// УзМЖ. – Ташкент, -2009, – № 2. – С.135-143.
5. Пирматов Ш.Т. ОБ обобщенной непрерывности функций в точках сходимости их спектральных разложений.// Меж. конф. Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезис док. - Москва, 16-18 июня -2009.- С. 238-239.

Физика–математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Пирматов Шамшод Тургунбоевич**нинг 01.01.03–математик физика ихтисослиги бўйича **«Эллиптик операторлар билан боғлик спектрал ёйилмаларнинг жамланувчанлигининг зарурий шартлари»** мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: эллиптик операторлар, Лаплас оператори, Шредингер оператори, полигармоник оператор, бигармоник оператор, Лаплас-Бельтрами оператори, оператор спектри, спектрал ёйилма, хос функциялар, Собелев фазоси.

Тадқиқот объектлари: тадқиқотнинг асосий объекти ҳар қандай физик процессларни тасвирловчи функциялар спектрал ёйилмалари ва Рисс ўртачалари.

Ишнинг мақсади: эллиптик операторлар билан боғлиқ спектрал ёйилмаларнинг жамланувчанлигининг зарурий шартларини ўрганиш.

Тадқиқот методлари: диссертация ишида функциялар назарияси, функционал анализ, операторларнинг спектрал назарияси усуллари қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

1) Лаплас оператори хос функциялари бўйича спектрал ёйилмаларнинг Рисс ўртачалари бўйича яқинлашишининг зарурий шартлари ўрнатилган.

2) полигпрмоник ва бигармоник операторлар хос функциялари бўйича спектрал ёйилмалар яқинлашувчанлигининг зарурий шартлари топилган.

3) ихтиёрий уч ўлчовли сохада Шредингер оператори хос функциялари бўйича спектрал ёйилмалар жамланувчанлигининг зарурий умумлашган узлуксизлик шарти олинган.

4) Лаплас-Бельтрам оператори хос функциялари бўйича Соболев синфи функцияларнинг спектрал ёйилмалари яқинлашишининг зарурий шарти аниқланган.

Амалий аҳамияти: олинган натижалар илмий – назарий аҳамиятга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантларга махсус курс ўқилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертация ишида олинган натижалар ва усуллар математик физик, математик анализ ва функционал анализ сохаларидаги илмий изланишларида қўлланилиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации Пирматова Шамшода Тургунбоевича на тему: **«Необходимые условия суммируемости спектральных разложений, связанных с эллиптическими операторами»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Ключевые слова: эллиптический оператор, оператор Лапласа, оператор Шредингера, полигармонический оператор, бигармонический оператор, оператор Лапласа-Бельтрами, спектр оператора, спектральные разложения, собственные функции, пространство Соболева.

Объекты исследования: объектом исследования являются спектральные разложения и их средние Рисса функций, описывающих различные физические процессы.

Цель работы: исследование вопросов необходимые условия суммируемости спектральных разложений, связанных с различными эллиптическими операторами.

Методы исследования: в диссертационной работе используются методы теории функций, функционального анализа, спектральной теории операторов.

Полученные результаты и их новизна: все полученные результаты являются новыми. Они состоят в следующем:

1) установлены необходимые условия сходимости средних Рисса спектральных разложений по собственным функциям оператора Лапласа;

2) найдены необходимые условия сходимости спектральных разложений по собственным функциям полигармонического и бигармонического операторов;

3) получены условия обобщенной непрерывности, необходимые для суммируемости спектральных разложений по собственным функциям оператора Шредингера в произвольной трехмерной области;

4) выяснены необходимые условия сходимости спектральных разложений функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа-Бельтрами.

Практическая значимость: результаты диссертации носят теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: на основе полученных результатов можно читать спецкурсы для магистрантов.

Область применения: результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы в научных исследованиях в области математической физике, математического анализа и функционального анализа.

R E S U M E

Thesis of **Pirmatov SHamshod Turgunboyevich** on the scientific degree competition of the candidate of sciences in physics and mathematics sciences specialty 01.01.03 – mathematical physics, subject: « **Necessary conditions of summability of the spectral decompositions connected with elliptic operators»**

Key words: elliptic operator, Laplace operator, Schrödinger operator, polyharmonic operator, biharmonic operator, Laplace-Beltrami operator, spectrum of an operator, spectral expansions, eigenfunctions, Sobolev space.

Subjects of inquiry: objects of research are spectral decomposition and their Riesz means of the functions describing various physical processes.

Aim of the inquiry: necessary conditions of summability of the spectral decomposition connected with various elliptic operators.

Methods of inquiry: modern methods of the theory of functions, the functional analysis, the spectral theory of operators are applied.

The results achieved and their novelty: all results are new:

1) necessary conditions of convergence of Riesz means of spectral decomposition on eigenfunctions of operator Laplace are established.

2) necessary conditions of convergence of spectral decomposition on eigenfunctions of polyharmonic operators are found.

3) the conditions of the generalized continuity necessary for summability of spectral decomposition on eigenfunctions of Schrödinger operator in an arbitrary three-dimensional domain are received.

4) necessary conditions of convergence of spectral decomposition of functions from Sobolev space by eigenfunctions of Laplas-Beltrami operator are found.

Practical value: dissertation’s results are theoretical.

Degree of embed and economic efficiency: on the basis of received results a special course will be read for the students of the magistracy.

Sphere of usage: results and the methods presented in work can be used in scientific researches in mathematical physics, mathematical analysis and functional analysis.