АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.956

РАХМАТУЛЛАЕВА НИЛУФАР АЛИШЕРОВНА

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

01.01.02-дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ташкент – 2011

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Бердышев Абдумаувлен Сулейманович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Исломов Бозор** кандидат физико-математических наук, **Кадиркулов Бахтиёр Жалилович**
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___»________________2011 г. в _____ часов на заседании Специализированного совета Д.015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125. г.Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___»_______________2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д 015.17.01, кандидат физико-математических наук — А.А.Заитов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. В 70х годах XX столетия особенно интенсивное развитие получили исследования дифференциальных уравнений с частными производными, начало которых было положено Ф.Трикоми и С.Геллерстедтом в 20-30-х годах. В частности, возрос интерес к изучению краевых задач для параболо-гиперболических уравнений. Обусловлено это тем, что теория краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа имеет теоретическую и прикладную значимость при изучении математических моделей пластовых систем, движения малосжимаемой жидкости в канале, окруженном пористой средой, распространения электромагнитного поля в неоднородной среде, движения вязкоупругой и вязкой жидкостей и др. Исследованиями краевых задач для таких уравнений занимались многие ученые, в частности, следует отметить монографии Т.Д.Джураева, А.Сопуева и М.Мамажанова, Т.Д.Джураева, докторские диссертации Д.Базарова, В.А.Елеева, О.А.Репина, К.Б.Сабитова, работы И.М.Гельфанда, В.Н.Врагова, С.И.Гайдука, А.С. Бердышева, В.А.Елеева, Л.А.Золиной, Н.Ю.Капустина, А.М.Нагорного, А.М.Нахушева, Е.А. Островского, А.Сопуева, Г.М.Стручиной, Я.С.Уфлянда, С.Х.Геккиевой, В.М.Корзюка, А.М. Лайпановой, Б.Э. Эшматова.

В настоящее время значительно расширяется круг рассматриваемых задач для смешанных параболо-гиперболических уравнений. Многие практически важные задачи, например, связанные с динамикой почвенной влаги, процессом диффузии частиц в турбулентной плазме, охлаждением неоднородного изогнутого стержня, моделированием процесса излучения лазера, приводят к нелокальным краевым условиям. Как отмечено, например, в книге А.М. Нахушева "Уравнения математической биологии", исследования последних лет убедительно показывают, что в математической биологии весьма часто возникают как нелокальные краевые, так и смешанные начально-краевые задачи.

В имеющихся на сегодняшний день работах, главным образом, изучались нелокальные краевые задачи для эллиптико-гиперболических и параболо-гиперболических уравнений второго порядка с одним и двумя линиями изменения типа. Что касается локальных и нелокальных краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа, то они остаются мало исследованными.

Все это показывает как теоретическую, так и практическую актуальность постановки и исследования локальных и нелокальных краевых задач в теории дифференциальных уравнений с частными производными и подчеркивает актуальность темы исследования.

Степень изученности проблемы. Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с параметром изучены в работах К.Б.Сабитова, Е.И.Моисеева и Н.Ю.Капустина, В.А.Елеева и В.Н.Лесева, А.С.Бердышева и

Э.Т.Каримова, в которых кроме однозначной разрешимости, рассматривается также спектральные вопросы этих задач. В частности в работах А.С.Бердышева и Э.Т.Каримова рассматривается уравнение с комплексным параметром

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda u,\ y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}+\mu u, y<0, \end{cases}$$

которая является уравнением параболо-гиперболического типа. Для этого уравнения на ряду нелокальных задач с непрерывными условиями склеивания, также изучены задачи со специальными условиями склеивания вида

$$u_x(x,+0)=u_x(x,-0),\ u_y(x,+0)=\frac{\alpha}{1+2a(x)}\int_0^x u_y(t,-0)J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt\,.$$

Отметим работы У.Эгамбердиева, А.С.Абдуллаева, где изучаются аналоги задачи Трикоми и ряд нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений с двумя линиями изменения типа.

Также отметим работы А.К.Уринова и И.Хайдарова, где изучаются нелокальные задачи с условиями типа Франкля для уравнения

$$0=L_\lambda u\equiv\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda_1^2 u, \\ u_{xx} sign\, y+u_{yy} sign\, x-\lambda_2^2\, u\, sign(x+y), \end{cases}$$

которое является уравнением параболо-гиперболического типа.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тематика диссертационной работы связана с тематикой исследований, проводимых в Институте математики и информационных технологий АН РУз. Исследования проводились также частично при поддержке гранта «18-08» по соответствующему контракту Фонда поддержки фундаментальных исследований АНРУз. «Краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных».

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертационной работы является исследование локальных и нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа.

Для достижения поставленной цели: Поставлены и исследованы локальные и нелокальные задачи для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа.

1. В смешанной области поставлены и исследованы аналоги задачи Трикоми с условиями в гиперболической подобласти для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.
2. Поставлены и исследованы задачи с условиями типа Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа.
3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости нелокальной задачи для параболо-гиперболических уравнения с тремя линиями изменения типа в областях с отходом от характеристик.

4. Доказано однозначная разрешимость краевых задач с разрывными и специальными условиями склеивания, для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа.
5. Изучена нелокальная задача для неоднородного смешанного уравнения с тремя линиями изменения типа в специальной области, ограниченной нехарактеристическими кривыми.

Задачи исследования. Основными задачами исследования являются:

- Изучение однозначной разрешимости аналогов задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа;
- Исследование однозначной разрешимости краевой задачи с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции на характеристиках со значениями этой же функции на линиях изменения типа;
- Доказательство существование единственного регулярного решения нелокальной задачи со специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа;
- Изучение однозначной разрешимости задачи типа Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа в области с отходом от характеристики;
- Исследование вопросов однозначной разрешимости краевой задачи, когда краевые условия задаются только в гиперболических частях смешанной области с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа.

Объект и предмет исследования. Локальные и нелокальные задачи с разрывными и специальными условиями склеивания для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа.

Методы исследования. Исследуемые задачи эквивалентно редуцируются к системе интегральных уравнений. Применяются метод интеграла энергии и метод интегральных уравнений, а также методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Постановка и доказательство однозначной разрешимости локальных и нелокальных краевых задач с разрывными и со специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа с параметром.
2. Теоремы о существовании единственного регулярного решения для нелокальных задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с тремя линиями изменения типа в областях с отходом от характеристики.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- доказаны единственность и существование решения аналога задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа;

- исследована нелокальная краевая задача с разрывными условиями склеивания для уравнения параболо-гиперболического типа с параметром;
- найдены достаточные условия на заданные функции для однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи со специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа с параметром;
- сформулирована краевая задача с условиями типа Бицадзе-Самарского, которые связывают значений комбинаций производных от искомой функции, со значениями комбинаций, этой же функции на линиях изменения типа и на кривых лежащих внутри характеристического треугольника. Доказано существование единственного регулярного решения этой задачи;
- исследована задача с краевыми условиями, заданными на границе гиперболичности рассматриваемой смешанной области для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. Используя метод интегральных уравнений и энергетических неравенств, доказана единственность и существование регулярного решения сформулированной задачи;
- изучена нелокальная задача для неоднородного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа в специальной области, ограниченной нехарактеристическими кривыми. Доказана теорема о существовании единственного регулярного решения этой задачи.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов:

Результаты работы представляют, прежде всего, теоретический интерес и они могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкими линиями изменения типа, а также при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

Апробация научных результатов. Результаты диссертации по мере их получения регулярно обсуждались на республиканском семинаре "Современные проблемы теории уравнений в частных производных" (институт математики и информационных технологий АН РУз, руководитель – академик М.С. Салахитдинов). Основные результаты также обсуждались на республиканском семинаре «Дифференциальные уравнения и спектральный анализ» (НУУз, под руководством академика М.С. Салахитдинова и д.ф.-м.н. профессора Р.Р.Ашурова). А также результаты диссертации по мере их получения докладывались на следующих научных конференциях:

Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий» − «Аль-Хорезми 2009», Ташкент 18-21 сентября 2009 года;

Республиканская научная конференция «Новые теоремы молодых математиков 2009», Наманган 6-7 ноябрь 2009 год.

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8] в виде статей и тезисов конференций. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ по теме диссертации». В работах [2], [4], [8] постановка задач принадлежит А.С. Бердышеву. Доказательства всех основных результатов принадлежит автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Объем диссертации 93 страниц. Нумерация формул двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер формулы в ней. В списке литературы 56 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведен краткий обзор сделанных работ в этом направлении.

Первая глава состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен специальным функциям и операторам, которые неоднократно использовались в диссертационной работе. Второй параграф состоит из обзора основных результатов диссертации.

Во второй главе диссертационной работы поставлены и изучены следующие задачи.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y-\lambda u, & (x,y)\in\Omega_0 \\ u_{xx}-u_{yy}+\mu u, & (x,y)\in\Omega_1 \\ u_{xx}-u_{yy}-\mu u, & (x,y)\in\Omega_i\ (i=\overline{2,3}) \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega\quad\Omega_0\cup\Omega_i\ \ (i=\overline{1,3})$, где Ω_0 – область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$ и $x=0$, т.е. квадрат $\{0<x<1,\ 0<y<1\}$; Ω_1 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB и двумя характеристиками $AN: x+y=0$, $BN: x-y=1$ уравнения (1), выходящие из точек A,B и пересекающиеся в точке $N\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; Ω_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x+y=0$, $DK: y-x=1$ уравнения (1), выходящие из точек A, D и пересекающиеся в точке $K\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; Ω_3 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM: x+y=2$ и $BM: x-y=1$ уравнения (1), выходящие из точек B, C и пересекающиеся в точке $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. В уравнении (1) λ, μ – заданные действительные числа, причем $\mu \geq 0$.

Введем обозначения: $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_0$, $\Omega_2^* = \Omega_2 \cup AD \cup \Omega_0 \cup BC \cup \Omega_3$,

$$W_1 = \{u: u \in C\left(\overline{\Omega}\right), \quad u_y \in C\left(\Omega_2^* \cup AB\right) \cap C\left(\Omega_1 \cup AB\right),$$

$$u_x \in C\left(\Omega_1^* \cup AD \cup BC\right) \cap C(\Omega_2 \cup AD) \cap C(\Omega_3 \cup BC)\}$$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем понимать функцию $u(x,y)$, обладающую непрерывными производными, входящими в уравнение (1) в областях $\Omega_i, (i=\overline{0,3})$ и удовлетворяющую уравнению (1) в этих областях.

В §2.1 поставлены и исследованы:

Задача T_1. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, из класса W_1 удовлетворяющее локальным условиям:

$$u(x,y)\big|_{NB} = d_1(x), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$
$$u(x,y)\big|_{AK} = d_2(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2},$$
$$u(x,y)\big|_{MC} = d_3(y), \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания:

$$u_y(x,+0) = \alpha u_y(x,-0), \text{равномерно при } x \in (0,1), \tag{2}$$

$$u_x(+0,y) = \beta u_x(-0,y), \text{ равномерно при } y \in (0,1), \tag{3}$$

$$u_x(1-0,y) = \gamma u_x(1+0,y), \text{ равномерно при } y \in (0,1). \tag{4}$$

Задача T_2. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω, из класса W_1 удовлетворяющее локальным условиям:

$$u(x,y)\big|_{AN} = b_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2,$$
$$u(x,y)\big|_{KD} = b_2(y), \quad 1/2 \leq y \leq 1,$$
$$u(x,y)\big|_{BM} = b_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1/2$$

и условиям склеивания (2) – (4).

Здесь $d_i(t),\ b_i(t)\ (i=\overline{1,3})$ – заданные действительные функции, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – заданные действительные числа, отличные от нуля.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия:* $\lambda\ge 0,\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma<0,$ $d_2(y)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2),\quad d_1(t),d_3(t)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1),$ *то задача* T_1 *имеет единственное регулярное решение.*

Теорема 2.2. *Если выполнены условия:* $\lambda\ge 0,\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\quad \gamma<0,$ $b_2(y)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1),\quad b_1(t),b_3(t)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2),$ *то задача* T_2 *имеет единственное регулярное решение.*

В §2.2 исследована однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача S_1. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω из класса W_1 удовлетворяющее нелокальным условиям:

$$A_{0x}^{0,\sqrt{\mu}}\left[u(\theta_1)\right]+a_1(x)u(x,0)\quad c_1(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{5}$$

$$A_{0y}^{0,\sqrt{\mu}}\left[u(\theta_2)\right]+a_2(y)u(0,y)\quad c_2(y),\ \ 0\le y\le 1, \tag{6}$$

$$A_{0y}^{0,\sqrt{\mu}}\left[u(\theta_3)\right]+a_3(y)u(1,y)\quad c_3(y),\ \ 0\le y\le 1. \tag{7}$$

а на линиях изменения типа условия склеивания (2)-(4).

Здесь $a_1(t),\ \ c_i(t)\ \ \left(i=\overline{1,3}\right)$ – заданные действительные функции, причем $a_i(x)\ne -\dfrac{1}{2},\ \ a_i(0)\ne -1,\ \ a_1(0)=a_2(0),\ \ c_1(0)=c_2(0),\ \ c_1(1)=c_3(0)$, а $\theta_1=\left(\dfrac{t}{2};-\dfrac{t}{2}\right)$, $\theta_2=\left(-\dfrac{t}{2};\dfrac{t}{2}\right)$, $\theta_3=\left(\dfrac{t+2}{2};\dfrac{t}{2}\right)$ где $0<t<1$, и

$$A_{mx}^{n,\sqrt{\mu}}\left[f(x)\right]=f(x)-\int_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\sqrt{\mu\left(x-m\right)\left(x-t\right)}\right]dt$$

– интегральный оператор, введенный и изученный в монографии М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова.

Теорема 2.3. *Если* $\lambda\ge 0$ *и относительно заданных функций выполнены условия*

1) $\beta>0,\ \ a_2(1)>-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_2'(y)>0$ *или* $\beta<0,\ a_2(1)<-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_2'(y)>0$*,*

2) $\gamma>0,\ \ a_3(1)<-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_3'(y)<0$ *или* $\gamma<0,\ \ a_3(1)>-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_3'(y)<0$*,*

3) $\alpha>0,\ \ a_1(1)>-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_1'(x)>0$ *или* $\alpha<0,\ a_1(1)<-\dfrac{1}{2}$ *и* $a_1'(x)>0$*,*

$$a_i(t),c_i(t)\in C^2\left[0,1\right],\quad i=\overline{1,3},$$

то задача S_1 имеет единственное регулярное решение.

В §2.3 сформулирована и изучена задача со специальными условиями склеивания.

Задача S_2. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω из класса W_1 удовлетворяющее нелокальным условиям (5)-(7), а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \frac{\sigma_1}{1+2a_1(x)}\int_0^x \lim_{y\to-0} u_y(t,y) J_0\left[\sqrt{\mu}(x-t)\right]dt, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \frac{\sigma_2}{1+2a_2(y)}\int_0^y \lim_{x\to-0} u_x(x,t) J_0\left[\sqrt{\mu}(y-t)\right]dt, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to1-0} u_x(x,y) = \frac{\sigma_3}{1+2a_3(y)}\int_0^y \lim_{x\to1+0} u_x(x,t) J_0\left[\sqrt{\mu}(y-t)\right]dt, \tag{10}$$

Здесь $a_i(t), c_i(t)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – заданные действительные функции, причем

$a_i(t) \neq -\dfrac{1}{2}$, $c_1(0)=c_2(0)$, $a_1(0)=a_2(0)\neq -1$, $a_1(1)=a_3(0)$, $c_3(0)=c_1(1)$,

$\sigma_i \in R\setminus\{0\}$, $i=\overline{1,3}$ а $\theta_1\left(\dfrac{t}{2};-\dfrac{t}{2}\right)$; $\theta_2\left(-\dfrac{t}{2};\dfrac{t}{2}\right)$; $\theta_3\left(\dfrac{t+2}{2};\dfrac{t}{2}\right)$ где $0\le t\le 1$.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $\sigma_3<0$, $\lambda\ge 0$, $a_i(t), c_i(t)\in C^2[0,1]$, $i=\overline{1,3}$. Тогда задача S_2 имеет единственное регулярное решение.*

Следующая глава диссертации посвящена постановке и изучению ряда краевых задач в областях с отходом от характеристики для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа.

В третьей главе исследованы локальные и нелокальные задачи в разных областях с отходом от характеристик.

В §3.1 исследована задача с условиями типа Бицадзе-Самарского.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = 0 \tag{11}$$

в области $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup AB \cup AA_0 \cup BB_0$. Здесь

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y)\in\Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y)\in\Omega_i \quad (i=\overline{1,3}), \end{cases} \tag{12}$$

$\Omega_0 = \{(x,y): 0<x<1,\ 0<y<1\}$, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – характеристические треугольники с вершинами A,B,C; A,A_0,D; B,B_0,E, соответственно, где $A(0,0)$, $A_0(0,1)$, $B_0(1,1)$, $B(1,0)$, $C(1/2,-1/2)$, $D(-1/2,1/2)$, $E(3/2,1/2)$.

Задача H. Найти регулярное решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям

$$\left[u_x - u_y\right]\theta_1(t) + \mu_1(t)\left[u_x - u_y\right]\theta_1^*(t) = \varphi_1(t), \tag{13}$$

$$\left[u_x - u_y\right]\theta_2(t) + \mu_2(t)\left[u_x - u_y\right]\theta_2^*(t) = \varphi_2(t), \tag{14}$$

$$\left[u_x + u_y\right]\theta_3(t) + \mu_3(t)\left[u_x + u_y\right]\theta_3^*(t) = \varphi_3(t), \tag{15}$$

$$u(A) = 0, \quad u(B) = 0. \tag{16}$$

Здесь $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)\left[\theta_1^*(t), \theta_2^*(t), \theta_3^*(t)\right]$ – аффиксы точки пересечения характеристик, выходящих из точек $(x,0)\in AB$, $(0,y)\in AA_0$, $(1,y)\in BB_0$, соответственно с AC, AD, $BE\left[AN, AK, BM\right]$; $AN: y = -\gamma_1(x)$, $AK: x \quad -\gamma_2(y)$, $BM: x = -\gamma_3(y)$; $\mu_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ – заданные функции.

Относительно кривых $\gamma_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ предположим следующее:

- $\gamma_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ дважды непрерывно дифференцируемые;
- $t \pm \gamma_i(t)$ монотонно возрастающие;
- $\gamma_j(0) = 0$, $\gamma_3(0) = -1$, $l_j + \gamma_j(l_j) = 1$, $l_3 - \gamma_3(l_3) = 2$, $0 < \gamma_j'(0) < 1$, $\gamma_3'(0) < -1$, $(j = 1,2)$, l_i – действительные числа из $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Под регулярным решением задачи H в области Ω будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $W_2 = \left\{u : u(x,y) \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(\Omega_0\right) \cap C^2\left(\Omega_k\right), k = \overline{1,3}\right\}$ удовлетворяющую уравнению (11) в областях Ω_i ($i=\overline{0,3}$) и условиям (13)-(16).

Теорема 3.1. Пусть $\mu_i(t) \neq -1$ и $\mu_i(t), \varphi_i(t) \in C^1[0,1]$ $(i=\overline{1,3})$. Тогда существует единственное регулярное решение задачи H.

В §3.2 рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,y) \tag{17}$$

в области Ω. Здесь Lu определен в (12), а $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup AB \cup BC \cup AD$, Ω_0 - область, ограниченная отрезками *AB, BC, CD, DA* прямих $y=0, x=1, y=1$ и $x=0$ соответственно; Ω_1 – область ограниченная отрезком *AB*, характеристикой *NB* и гладкой кривой $AN: y = -\gamma_1(x)$, расположенной внутри характеристического треугольника $0 \le x+y \le x-y \le 1$; Ω_2 – область, ограниченная отрезком *AD*, характеристикой *KD* и гладкой кривой

$AK: x=-\gamma_2(y)$, расположенной внутри характеристического треугольника $0 \le y+x \le y-x \le 1$; Ω_3 – область, ограниченная отрезком *BC*, характеристикой *MC* и гладкой кривой $BM: x=-\gamma_3(y)$, расположенной внутри характеристического треугольника $1 \le x-y \le x+y \le 2$. Относительно кривых $\gamma_i(t), (i=\overline{1,3})$ будет налагаться те же условия, что в задаче Н.

Для уравнения (17) рассмотрим следующую задачу.

Задача $\mathbb{M}$**.** Найти регулярное решение уравнения (17), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{A\cup NB\cup KD\cup MC}=0, \tag{18}$$

$$\left[u_x+u_y\right]\big|_{AN\cup AK}=0, \tag{19}$$

$$\left[u_x-u_y\right]\big|_{BM}=0, \tag{20}$$

а на линиях изменения типа выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\alpha_1\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\ \text{равномерно при } x\in(0,1), \tag{21}$$

$$\lim_{x\to+0}u_x(x,y)=\alpha_2\lim_{x\to-0}u_x(x,y),\ \text{равномерно при } y\in(0,1), \tag{22}$$

$$\lim_{x\to1-0}u_x(x,y)=\alpha_3\lim_{x\to1+0}u_x(x,y),\ \text{равномерно при } y\in(0,1), \tag{23}$$

при условии, что эти пределы существуют и конечны.

Здесь $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - заданные действительные числа, отличные от нуля.

Регулярным решением задачи $\mathbb{M}$ в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ из класса W_3, где

$$W_3=\Big\{u:\ u(x,y)\in C(\overline{\Omega}),\ u_x\in C(\overline{\Omega_0\cup\Omega_1})\cap C(\overline{\Omega_2})\cap C(\overline{\Omega_3}),$$
$$u_y\in C(\overline{\Omega_1})\cap C(\overline{\Omega_0\cup\Omega_2\cup\Omega_3})\Big\},$$

обладающую непрерывными производными входящими в уравнение (17) в областях Ω_i $(i=\overline{0,3})$, удовлетворяющих уравнению (17) в этих областях и условиям (18)-(23).

Теорема 3.2. Если выполняются следующие условия $\alpha_2<0$, $\alpha_3<0$, $f(x,y)\in C^2(\Omega)$, то задача $\mathbb{M}$ имеет единственное регулярное решение.

В §3.3 исследована краевая задача для уравнения (17), в области $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\Omega_3$, где Ω_0 – область, ограниченная отрезками *AB, BC, CD, DA* прямих $y=0, x=1, y=1$ и $x=0$ соответственно; Ω_1 – область ограниченная отрезком *AB* и гладкой кривой $\gamma_1: y=-\gamma_1(x), \gamma_1(0)=\gamma_1(1)=0$, расположенной внутри характеристического треугольника $0 \le x+y \le x-y \le 1$; Ω_2 – область, ограниченная отрезком AD и гладкой кривой $\gamma_2 : x = -\gamma_2(y)$, $\gamma_2(0)=\gamma_2(1)=0$, расположенной внутри характеристического треугольника $0 \le y+x \le y-x \le 1$; Ω_3 – область, ограниченная отрезком BC и гладкой кривой $\gamma_3 : x = -\gamma_3(y)$, $\gamma_3(0)=\gamma_3(1)=-1$, расположенной внутри характеристического треугольника $1 \le x-y \le x+y \le 2$. Относительно кривых $\gamma_i(t)$ $(i=\overline{1,3})$ будем предполагать, что они дважды непрерывно дифференцируемы и $t \pm \gamma_i(t)$ $(0 \le t \le 1, i=\overline{1,3})$- монотонно возрастают.

$\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)$ $\left[\theta_1^*(t), \theta_2^*(t), \theta_3^*(t)\right]$– точки пересечения кривых $\gamma_i (i=\overline{1,3})$ с характеристиками $x-y=t$, $y-x=t$, $x+y=1+t$ $\left[x+y=t, x-y=t, y-x=1+t\right]$ уравнения (17) соответственно.

Задача S_3**.** Найти регулярное решение уравнения (17), удовлетворяющее нелокальным условиям

$$\left[u_x - u_y\right](\theta_1(t)) = \sigma_1\left[u_x + u_y\right]\left(\theta_1^*(t)\right), 0 \le t \le 1, \tag{24}$$

$$\left[u_x - u_y\right](\theta_2(t)) = \sigma_2\left[u_x + u_y\right]\left(\theta_2^*(t)\right), 0 \le t \le 1, \tag{25}$$

$$\left[u_x + u_y\right](\theta_3(t)) = \sigma_3\left[u_x - u_y\right]\left(\theta_3^*(t)\right), 0 \le t \le 1, \tag{26}$$

$$u(A) = u(B) = 0\,. \tag{27}$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – произвольные действительные числа.

Под регулярным решением задачи S_3 в области Ω будем понимать функцию из класса W_3, удовлетворяющую уравнению (17) в областях Ω_i $i=\overline{0,3}$ и удовлетворяющих условиям (24)-(27)

Теорема 3.3. Если выполняются следующие условия $\sigma_2, \sigma_3 \in [-1,1]$, $f(x,y) \in C^2(\Omega)$, то задача S_3 имеет единственное регулярное решение.

В конце глав даны выводы по главам. В конце диссертации приведены заключение и список литературы.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю А.С. Бердышеву за постановку задач и постоянное внимание к работе и кандидату физико-математических наук Э.Т. Каримову за ценные советы и помощь при работе над диссертацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению вопросов однозначной разрешимости краевых задач для параболо-гиперболических уравнений с негладкой линией изменения типа.

Во введении дана общая характеристика диссертации и приведено ее краткое содержание

В первой главе диссертационной работы приведены вспомогательные операторы и их свойства из теории интегральных и интегро-дифференциальных операторов. Приводятся интегральные представления относительно функции Бесселя, которые будут использованы в диссертационной работе. Даны основные результаты диссертации.

Во второй главе сформулированы и исследованы локальные и нелокальные краевые задачи с разрывными и специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа со спектральным параметром. Используя метод интегралов энергии и метод интегральных уравнений, найдены достаточные условия на заданные функции и параметры для однозначной разрешимости сформулированных задач.

В третьей главе сформулированы и исследованы краевые задачи в областях с отходом от характеристики для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа. В частности, доказывается однозначная разрешимость нелокальной задачи с условиями типа Бицадзе-Самарского, задачи с условиями исключительно в гиперболических частях рассматриваемой смешанной области и задача с нелокальными условиями в области, ограниченной гладкими нехарактеристическими кривыми.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Рахматуллаева Н.А. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий: Тез. меж. науч. конф. 20-22 сентября 2006 г. – Алматы, 2006. –С. 88-89.
2. Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A. Non-local problems with special gluing for a parabolic-hyperbolic equation // Proceedings of 6^{th} ISAAC 2007 Congress, World Scientific, 2008. –Pp. 727-733.
3. Рахматуллаева Н.А. Об аналоге задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Казахстан в новом мире и проблемы Национального образования: Труды меж. Научно-практической конф. –Шымкент, 2008. –С. 188-190.
4. Бердышев А.С., Рахматуллаева Н.А. Нелокальная задача с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2009: Труды Международной конференции, 18-21 сентября 2009 г.-С. 58-61.
5. Рахматуллаева Н.А. О краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Республиканская научная конференция «Новые теоремы молодых математиков 2009», – Наманган 6-7 ноябрь 2009г. –С.110-111.
6. Рахматуллаева Н.А. Об аналоге задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. -№1. –С.118-130.
7. Рахматуллаева Н.А. Нелокальная краевая задача со специальными условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. -№3. –С.75-85.
8. Бердышев А.С., Рахматуллаева Н.А. Задачи с условиями типа Бицадзе-Самарского для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // Доклады АН РУз. –Ташкент, 2010, -№4. –С. 8-12

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор
Рахматуллаева Нилуфар Алишеровна
01.01.02 - дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича
“Учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар”
мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар, характеристикадан чекинган соҳа, махсус уланиш шартлари, ечим ягоналиги, ечим мавжудлиги, чегаравий масала, нолокал масала, интеграл тенглама, энергия интеграли.

Тадқиқот объектлари: учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар.

Ишнинг мақсади: учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал масалаларни қўйиш ҳамда қўйилган масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлигини тадқиқ қилиш.

Тадқиқот методлари: энергия интеграли ва интеграл тенгламалар усули қўлланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган параболо-гиперболик тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар баён қилинган, бу масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Диссертацияда олинган барча илмий натижалар янги.

Амалий аҳамияти: диссертацияда олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантлар учун махсус курсларни ўқитишда ва ушбу соҳани назарий жиҳатдан ривожлантиришда фойдаланиш мумкин.

Фойдаланиш соҳаси: диссертация натижаларидан хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг кейинги ривожида, ҳамда уларга келтириладиган физик, механик ва биологик масалаларни математик моделини ўрганишда фойдаланиш мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Рахматуллаевой Нилуфар Алишеровны на тему «**Локальные и нелокальные задачи для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа**» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения».

Ключевые слова: параболо-гиперболические уравнения с тремя линиями изменения типа, область с отходом от характеристики, специальные условия склеивания, единственность решения, существование решения, краевая задача, нелокальная задача, интегральное уравнение, интеграл энергии.

Объекты исследования: локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа с тремя линиями изменения типа.

Цель работы: постановка локальных и нелокальных краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа с тремя линиями изменения типа и исследование существования и единственности решения поставленных задач.

Метод исследования: применены методы интегралов энергии и интегральных уравнений.

Полученные результаты и их новизна: сформулированы локальные и нелокальные краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений с тремя линиями изменения типа, доказаны существование и единственность решения этих задач.

Все научные результаты диссертации - новые.

Практическая значимость: результаты диссертации носят научно-теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты можно использовать при чтении спецкурсов для магистрантов и для дальнейшего теоретического развития данного направления.

Область применения: результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также при изучении математических вопросов задач физики, механики и биологии.

RESUME

Of thesis by Rakhmatullaeva Nilufar Alisherovna
on the scientific degree competition of the doctor of Philosophy in Physics and Mathematics, specialty 01.01.02 – Differential equations.
Subject:
«Local and non-local boundary-value problems for parabolic-hyperbolic equation with three lines of type changing»

Key words: parabolic-hyperbolic equation with three lines of type changing, domain with deviation from characteristics, special gluing condition, uniqueness of solution, existence of solution, boundary-value problem, non-local problem, integral equation, energy integral.

Subjects of research: local and non-local boundary-value problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing.

Purpose of work: formulation of local and non-local boundary-value problems for parabolic-hyperbolic equation with three lines of type changing and investigation for the existence and uniqueness of solution of formulated problems.

Methods of research: methods of integral equations and energy integrals are used.

The results obtained and their novelty: local and non-local boundary problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing are formulated and the existence, the uniqueness of solution for formulated problems is proved.

Practical value: the results of the dissertation work have a theoretical character.

Degree of embed and economic effectiveness: on the base of achieved results, the special course for the master- students can be taught and may be used in the subsequent theoretical development of this field.

Field of application: results of the dissertation work can de used at future development of the theory of partial differential equations and also at studying mathematical questions of problems of physics, mechanics and biology.

Соискатель: