

**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

*На правах рукописи
УДК 517.956*

ЮЛДАШЕВА АСАЛ ВИКТОРОВНА

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

01.01.02-дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент – 2010

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент **Аманов Джумаклыч**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Холмухамедов Олимжон Рахимович,
кандидат физико-математических наук
Кадиркулов Бахтияр Жалилович

Ведущая организация: **Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «___» _____ 2010 г. в _____ часов на заседании Специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___» _____ 2010 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д 015.17.01,
кандидат физико-математических наук

А.А.Зайтов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению нестандартных начально-краевых, прямых и обратных задач для уравнений в частных производных, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория краевых задач для уравнений смешанного типа в силу ее прикладной важности, а также при построении общей теории краевых задач для уравнений в частных производных в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта.

В настоящее время понятие уравнения смешанного типа значительно расширилось. Интенсивность исследования уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического и гиперболическо-параболического типов объясняется тем, что, с одной стороны, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики, техники и других прикладных дисциплин, а с другой стороны – потребностью математической науки. Например, в задаче о движении газа в канале, окруженном пористой средой, движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его – уравнением диффузии. В работах А.В.Бицадзе, Ф.И.Франкля, М.С.Салахитдинова, А.М.Нахушева, Т.Д.Джураева, М.М.Смирнова, Т.Ш.Кальменова, В.Н.Врагова, Е.И.Моисеева, М.М.Мередова, К.Б.Сабитова и многих других теория краевых задач для уравнений смешанного типа развивалась в различных направлениях.

В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы задач для уравнений смешанного типа четного порядка являются малоизученными. Отметим, что общеизвестные методы (в частности, абстрактная спектральная теория линейных операторов), являющиеся мощным инструментом при изучении эллиптических операторов, оказываются малоприспособленными в применении к краевым задачам для уравнений смешанного типа. По этой причине многие актуальные проблемы уравнений смешанного типа требуют специальных исследований. Одними из таких задач, в частности, являются вопросы спектра и сильной разрешимости краевых задач. Систематическое изучение спектральных вопросов уравнений смешанного типа начато сравнительно недавно с работ Т.Ш.Кальменова, Е.И.Моисеева, С.М.Понаморёва.

Следует так же отметить, что и теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Интенсивное исследование обратных задач в значительной степени обусловлено необходимостью разработки математических методов решения обширного класса важных прикладных проблем, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений. Обратные задачи для линейных уравнений в

частных производных второго, третьего и четвертого порядков, состоящие в определении либо начального, либо граничного условия, либо правой части уравнения по некоторой дополнительной информации о решении уравнения, исследовались целым рядом авторов: А.Л.Бухгейм, А.М.Денисовым, С. И. Кабанихиным, В.Л.Камылиным, А.И.Кожановым, М.М.Лаврентьевым, Б.М. Левитаном, А.И.Прилепко, В.Г.Романовым, Л.А.Сахновичем и др. Однако обратные задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка практически не изучены.

Настоящая работа посвящена исследованию прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа четного порядка, доказаны их однозначные регулярные разрешимости. Для прямых задач найдены также сильные решения и исследованы спектральные свойства задач.

Степень изученности проблемы. В отличие от теории разрешимости, спектральные вопросы краевых задач для уравнений смешанного типа являются малоизученными. Регулярная разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа второго и третьего порядков изучена достаточно хорошо. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа четвертого и высокого порядка остаются малоизученными.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы «Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа четного порядка» утверждена на Ученом совете Института математики и информационных технологий АН РУз. 20 января 2010 года (протокол №1) и входит в тематику НИР, проводимых в Институте математики и информационных технологий АН РУз.

Цель исследования:

1. Постановка и исследование однозначной регулярной, сильной разрешимости, разрешимости почти всюду и изучение спектральных свойств краевых задач для уравнений четного порядка.

2. Изучение существования и единственности решения обратных задач для уравнений четного порядка и уравнения смешанного типа четного порядка.

Задачи исследования. Основными задачами исследования являются:

– изучение однозначной регулярной и сильной разрешимости краевых задач для уравнений четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка;

– изучение спектральных свойств краевых задач для уравнений четного порядка;

– изучение однозначной разрешимости обратных задач для уравнений четного порядка, смешанного и несмешанного типов.

Объект и предмет исследования. Прямые и обратные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка и уравнений смешанного типа четного порядка.

Методы исследования. Применяются метод априорных оценок, метод Фурье, теория линейных операторов и методы функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулированы новые различные прямые и обратные задачи для уравнений четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка.
2. Доказаны единственность и существование регулярного решения прямых и обратных задач при определённых достаточных условиях на заданные функции.
3. Для рассматриваемых прямых задач доказывается однозначная сильная разрешимость.
4. Используются операторные уравнения, эквивалентные исследуемым прямым задачам, делается вывод о спектре задачи.
5. Для решения некоторых прямых задач получены априорные оценки, из которых следуют единственность, непрерывная зависимость решения от правой части и существование обратного оператора.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Сформулированы новые различные прямые и обратные задачи для уравнений четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка, которые изучаются впервые. Доказаны существование, однозначная регулярная разрешимость прямых и обратных задач. А также показана сильная разрешимость поставленных прямых задач, изучаются их спектральные свойства.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Результаты диссертации представляют, прежде всего, теоретический интерес. Они могут быть применены в исследованиях краевых задач для уравнений четного порядка, а также могут использоваться при чтении спецкурсов для студентов и магистрантов данной специальности.

Реализация результатов. Результаты диссертации представляют теоретический интерес.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на городских семинарах «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» Института математики и информационных технологий, (руководитель – академик М.С.Салахитдинов), «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» (НУУз, руководитель – академик Ш.А.Алимов), «Дифференциальные уравнения и спектральный анализ» (НУУз, руководители: академик М.С. Салахитдинов и д.ф.-м.н., профессор Р.Р.Ашуров), а также на научном семинаре специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз (председатель семинара– академик М.С.Салахитдинов). Результаты по обратным задачам были обсуждены на семинаре «Современные проблемы некорректных задач математики и информатики» (руководитель – проф. Фаязов К.С.) кафедры «Информатики

и прикладного программирования» НУУз. Кроме того, результаты частично докладывались на Республиканской научной конференции «Современные проблемы математики, механики и информационных технологий», посвящённой 90-летию юбилею Национального университета Узбекистана (Ташкент, 8 мая 2008 года), и на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – «Аль-Хорезми 2009» (Ташкент, 18-21 сентября 2009 года).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10] в виде статей и тезисов конференций. Список опубликованных работ приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ по теме диссертации». В работах [1-4], [6], [9] постановка задач принадлежит Д.Аманову. Доказательство всех основных результатов принадлежит автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы, содержащего 69 наименований. Общий объем диссертации составляет 107 страниц. Нумерация определений и теорем тройная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер параграфа, а третья - на номер утверждения в нем.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дан обзор работ, относящихся к теме диссертации, а также приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации состоит из двух параграфов. В параграфе 1.1 приводятся предварительные сведения. В параграфе 1.2 даны постановки изучаемых задач и приведены основные результаты диссертации.

В **второй главе** диссертации рассматриваются корректные краевые задачи для уравнений

$$Au \equiv \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad (1)$$

$$Lu \equiv \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (2)$$

Все краевые задачи второй главы рассматриваются в области

$$\Omega = \{(x, t): 0 < x < p, 0 < t < T\}, \quad k \in N.$$

В параграфе 2.1 исследована однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача А. Найти в области Ω решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(0,t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(p,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u(x,T), \quad 0 \leq x \leq p. \quad (4)$$

Определение 2.1.2. Функция $u(x,t) \in L_2(\Omega)$ называется *сильным решением* задачи А, при $f \in L_2(\Omega)$, если она есть предел в норме $L_2(\Omega)$ последовательности $\{u_n\}$, $n \in N$, такой, что $u_n \in V_1(\Omega)$, а Au_n сходится к f в норме $L_2(\Omega)$.

Обозначим

$$V_1(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C_{x,t}^{2k-1,0}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,1}(\Omega), \text{ выполняются условия (3), (4)} \right\},$$

$$W_1(\Omega) = \left\{ f(x,t) : f \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega}), \forall t \in [0, T], f(0,t) = f(p,t) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} \in Lip_\alpha[0, p], 0 < \alpha \leq 1, \right.$$

равномерно по $t \}$.

Лемма 2.1.1. Пусть $u(x,t)$ - регулярное решение задачи А, тогда справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{k,0}(\Omega)} \leq C \|Au\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V_1(\Omega), \quad (5)$$

где $C > 0$ - постоянное число, зависящее от размеров области Ω и k , но не зависящее от функции $u(x,t)$.

Следствие 2.1.1. Из леммы 2.1.1 следует единственность и непрерывная зависимость регулярного решения задачи А от правой части $f(x,t)$.

Доказана справедливость следующих теорем.

Теорема 2.1.1. Если $f(x,t) \in W_1(\Omega)$, то регулярное решение задачи А существует.

Теорема 2.1.2. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи А существует, единственно, непрерывно зависит от правой части, удовлетворяет оценке (5).

Теорема 2.1.3. Оператор $\overline{A^{-1}}$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ и самосопряженным.

Во втором параграфе второй главы диссертации для уравнения (2) в области Ω рассматривается следующая задача:

Задача В₁. Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям (3) и

$$u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p \quad (6)$$

Введем множество

$V_2(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C_{x,t}^{2k-2,0}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,1}(\Omega), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot (p-x) = 0, \forall t \in [0, T], \right.$
 выполняются условия (3), (6) $\left. \right\}$,

$W_2(\Omega) = \left\{ f(x,t) \in C_{x,t}^{\frac{k}{2}+1,0}(\overline{\Omega}), \frac{\partial^{2m} f(0,t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(p,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0; T], \right.$
 $m = 0, 1, \dots, \frac{k-2}{4}$, если $\frac{k}{2}+1$ - четное и $m = 0, 1, \dots, \frac{k}{4}$, если $\frac{k}{2}+1$ - нечетное, k - четное $\left. \right\}$,

$W_3(\Omega) = \left\{ f(x,t) \in C_{x,t}^{k+1,0}(\overline{\Omega}), \frac{\partial^{2m} f(0,t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(p,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0; T], m = 0, \frac{k-1}{2}, \right.$
 k - нечетное $\left. \right\}$.

Лемма 2.2.1. Пусть $u(x,t)$ - регулярное решение задачи B_1 и k - четное, тогда справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V_2(\Omega), \quad (7)$$

где $C > 0$ - постоянное число, зависящее от размеров области Ω и k , но не зависящее от функции $u(x,t)$.

Теорема 2.2.1. Если при нечетных k числа p, T таковы, что

$$\cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^k T \neq 0, \quad (8)$$

то регулярное решение задачи B_1 единственно, если оно существует.

Теорема 2.2.2. Пусть k четное и $f(x,t) \in W_2(\Omega)$, тогда регулярное решение задачи B_1 существует.

Теорема 2.2.3. Пусть k нечетное, функция $f(x,t) \in W_3(\Omega)$ и пусть числа p и T таковы, что

$$\left| \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^k T \right| \geq \delta > 0,$$

где $0 < \delta \leq 1$. Тогда регулярное решение задачи B_1 существует.

Лемма 2.2.4. При нечетном k регулярное решение задачи B_1 удовлетворяет следующей оценке

$$\|u\|_{W_2^{k,1}} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (9)$$

Теорема 2.2.4. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи B_1 существует, единственно, непрерывно зависит от правой части и удовлетворяет оценке (7) при четных k и оценке (9) при нечетных k .

Регулярная разрешимость задачи B_1 эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$Lu = f, \quad (10)$$

где L действует по правилу (2) из $V_2(\Omega)$ в $C(\Omega)$. Через $\bar{L}$ обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора L , а через $\bar{L}^{-1}$ – обратный оператор к $\bar{L}$.

Теорема 2.2.5. Оператор $\bar{L}_1^{-1}$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ и самосопряженным. Его спектр состоит только из действительных собственных значений конечной кратности.

Разрешимость задачи B_1 при нечетных k зависит от размеров области.

Теорема 2.2.6. Если числа p и T таковы, что $\frac{p^k}{T\pi^{k-1}}$ – алгебраическое число второго порядка, тогда при

$$f(x, t) \in C_{x,t}^{k+1,1}(\bar{\Omega}), \frac{\partial^{2m} f(0, t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(p, t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0; T], m = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2},$$

$$f(x, T) = 0, 0 \leq x \leq p,$$

задача B_1 при нечетных k однозначно разрешима.

В третьей главе для уравнений

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \operatorname{sgn} t \cdot (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \\ \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \\ \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t) \end{cases} \quad (14)$$

исследуются краевые задачи в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, -T < t < T, T > 0\}$,

где $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$.

В параграфе 3.1 изучена однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача C_1 . Найти такую функцию $u(x, t)$, которая:

- 1) непрерывна в области $\bar{\Omega}$, вместе с производными, приведёнными в краевых условиях;
- 2) является регулярным решением уравнения (11) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$;
- 3) удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(0,t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(p,t) = 0, \quad m=0,1,\dots,k-1, \quad -T \leq t \leq T, \quad (15)$$

4) удовлетворяет условию склеивания

$$u_t(x, +0) = u_t(x, -0), \quad 0 < x < p. \quad (16)$$

Теорема 3.1.1. Если регулярное решение задачи C_1 существует, то оно единственно.

Теорема 3.1.2. Если $f(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}(\bar{\Omega})$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in Lip_\alpha[0, p]$ равномерно по t с показателем $0 < \alpha < 1$ и $f(0,t) = f(p,t) = 0$, то регулярное решение задачи C_1 существует.

Задача D₁. Найти такую функцию $u(x,t)$, которая:

- 1) непрерывна в области $\bar{\Omega}$, вместе с производными, приведёнными в краевых условиях;
- 2) является регулярным решением уравнения (12) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$;
- 3) удовлетворяет условию склеивания (16), краевым условиям (15) и

$$u(x, T) = u(x, -T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (17)$$

Обозначим

$V_4(\Omega) = \left\{ u(x,t) : u \in C_{x,t}^{2k-2,0}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot (p-x) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \right.$
 $\left. \text{выполняются условия (15), (16), (17)} \right\},$

$W_5(\Omega) = \left\{ f(x,t) : f \in C_{x,t}^{k,0}(\bar{\Omega}), \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in Lip_\alpha(\Omega) \text{ равномерно по } t, 0 < \alpha \leq 1, \right.$

$$\left. \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \Big|_{x=p} = 0, i=0,1,\dots, \frac{k-2}{2}, -T \leq t \leq T, \text{ где } k - \text{ четное } \right\},$$

$W_6(\Omega) = \left\{ f(x,t) : f \in C_{x,t}^{k,0}(\bar{\Omega}), \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in Lip_\alpha(\Omega) \text{ равномерно по } t, 0 < \alpha \leq 1, \right.$

$$\left. \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \Big|_{x=p} = 0, i=0,1,\dots, \frac{k-1}{2}, -T \leq t \leq T, \text{ где } k - \text{ нечетное } \right\}.$$

Регулярная разрешимость задачи D_1 , эквивалентна разрешимости операторного уравнения (10), где $L : V_4(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ по правилу (12). Через, $\bar{L}$ обозначим замыкание в $L_2(\Omega)$ оператора L , а через $\bar{L}^{-1}$ – обратный оператор к $\bar{L}$.

Теорема 3.2.1. Пусть числа p и T такие, что при $n=1,2,\dots$

$$M_n(T) \equiv \left| \left(1 - e^{-2\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T} \right) \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T + \left(1 + e^{-2\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T \right| \neq 0, \quad (18)$$

тогда, если существует регулярное решение задачи D_1 , оно единственно.

Теорема 3.2.2. Пусть при четном k $f(x, t) \in W_5(\Omega)$, а при нечетном k $f(x, t) \in W_6(\Omega)$ и $M_n(T) \geq \delta_0 > 0$ при $n=1, 2, \dots$, тогда регулярное решение задачи D_1 существует.

Решение задачи D_1 удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_2^{k,1}(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad u \in V_5(\Omega), \quad (19)$$

$C_1 = \text{const} > 0$.

Теорема 3.2.3. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи D_1 существует, единственно, непрерывно зависит от правой части, удовлетворяет оценке (19).

Теорема 3.2.4. Спектр задачи состоит из вещественных собственных значений конечной кратности.

В параграфе 3.3 изучена однозначная разрешимость следующей задачи.

Задача Е₁. Найти такую функцию $u(x, t)$, которая:

1) непрерывна в области $\overline{\Omega}$, вместе с производными, приведёнными в краевых условиях;

2) является регулярным решением уравнения (13) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$;

3) удовлетворяет условию склеивания (16), краевым условиям (15) и

$$u(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \quad (20)$$

Обозначим

$$V_5(\Omega) = \left\{ u(x, t) : u \in C_{x,t}^{2k-2,0}(\overline{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \cdot (p - x) = 0, \forall t \in [0, T], \right.$$

$\left. \text{выполняются условия (15), (16), (20)} \right\},$

$$W_7(\Omega) = \left\{ f(x, t) : f \in C_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega}), \frac{\partial f}{\partial x} \in \text{Lip}_\alpha[0, p] \text{ равномерно по } t, 0 < \alpha \leq 1, \right.$$

$$\left. f(0, t) = f(p, t) = 0, -T \leq t \leq T, \text{ где } k - \text{четное} \right\},$$

$$W_8(\Omega) = \left\{ f(x, t) : f \in C_{x,t}^{2k+1,0}(\overline{\Omega^+}) \cap C_{x,t}^{k+1,0}(\overline{\Omega^-}), \left. \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \right|_{x=0} = \frac{\partial^{2i} f}{\partial x^{2i}} \right|_{x=p} = 0, i = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2},$$

$$\left. -T \leq t \leq T, \text{ где } k - \text{нечетное} \right\}.$$

Теорема 3.3.1. Пусть числа p и T такие, что при $n=1, 2, \dots$

$$M_n(p, T) \equiv \left| \cos\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T + \left(\frac{n\pi}{p}\right)^k \sin\left(\frac{n\pi}{p}\right)^k T \right| \neq 0,$$

Тогда, если существует регулярное решение задачи E_1 , то оно единственно.

Теорема 3.3.2. Пусть при четном k $f(x, t) \in W_7(\Omega)$, а при нечетном k $f(x, t) \in W_8(\Omega)$ и $M_n(p, T) \geq \delta_0 > 0$ при $n = 1, 2, \dots$, то регулярное решение задачи E_1 существует.

В четвёртой главе для уравнения

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x), \quad (21)$$

рассматриваются обратные краевые задачи в области $\Omega_1 = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$, $k \in N$, а для уравнений

$$f(x) = \begin{cases} u_t - u_{xx}, t > 0 \\ u_{tt} - u_{xx}, t < 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \operatorname{sgn} t \cdot (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = f(x), \quad (23)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \operatorname{sgn} t \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x). \quad (24)$$

исследуются обратные краевые задачи в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, -T < t < T\}$, $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$, $k \in N$.

В параграфе 4.1 исследована следующая задача.

Задача I. Найти такие функции $u(x, t)$ и $f(x)$, которые:

- 1) $u(x, t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$, вместе с производными, приведёнными в краевых условиях;
- 2) $f(x) \in W_2^1(0, p)$;
- 3) удовлетворяют уравнения (22) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$;
- 4) $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad -T \leq t \leq T \quad (25)$$

$$u(x, -T) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), \quad (26)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

- 5) удовлетворяет условию склеивания

$$u_t(x, +0) = u_t(x, -0), \quad 0 < x < p. \quad (27)$$

Теорема 4.1.1. Если числа p, T таковы, что

$$Q_n(p, T) \equiv \left| \cos \frac{\pi n}{p} T + \frac{\pi n}{p} \sin \frac{\pi n}{p} T - e^{-\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2 T} \right| \neq 0,$$

то регулярное решение задачи I единственно, если оно существует.

Теорема 4.1.2 . Пусть $\varphi(x) \in W_2^2(0, p)$ и $\psi(x) \in W_2^3(0, p)$, а также

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \varphi(p) = 0, \\ \psi(0) &= \psi(p) = \psi''(0) = \psi''(p) = 0\end{aligned}$$

и числа p и T таковы, что $Q_n(p, T) \geq \delta > 0$, где δ – достаточно малое положительное число. Тогда решение задачи I существует.

Во втором параграфе четвертой главы доказано существование и единственность следующей обратной задачи

Задача II. Найти функции $u(x, t)$ и $f(x)$, связанные в области Ω_1 , уравнением (21), и:

1) $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{\Omega_1}$ вместе со всеми производными, участвующими в краевых условиях;

2) $f(x) \in W_2^1(0, p)$;

3) $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (15) и

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad u_{tt}(x, T) = \chi(x). \quad (28)$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4.2.1. Если при нечетных k числа p и T таковы, что

$$\left| \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^k T \right| \neq 0, \text{ то решение задачи II единственно, если оно существует.}$$

Теорема 4.2.2. Если k – четное и функции

$$\varphi(x) \in W_2^{2k+1}(0, p), \quad \psi(x) \in W_2^{k+1}(0, p), \quad \chi(x) \in W_2^1(0, p),$$

а также выполнены условия

$$\begin{aligned}\varphi^{(2i)}(0) &= \varphi^{(2i)}(p) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \psi^{(2j)}(0) = \psi^{(2j)}(p) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{k}{2}, \\ \chi(0) &= \chi(p) = 0,\end{aligned}$$

тогда решение задачи II существует.

Теорема 4.2.3. Если k нечетное и функции

$$\varphi(x) \in W_2^{2k+1}(0, p), \quad \psi(x) \in W_2^{k+1}(0, p), \quad \chi(x) \in W_2^1(0, p),$$

а также выполнены условия

$$\begin{aligned}\varphi^{(2i)}(0) &= \varphi^{(2i)}(p) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad \psi^{(2j)}(0) = \psi^{(2j)}(p) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}, \\ \chi(0) &= \chi(p) = 0\end{aligned}$$

и пусть числа p и T таковы, что

$$\left| \cos\left(\frac{\pi n}{p}\right)^k T \right| \geq \delta > 0,$$

где $0 < \delta \leq 1$, то решение задачи II существует.

В параграфе 4.3 рассмотрена следующая задача.

Задача III. Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$ в области Ω , удовлетворяющие уравнению (23) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, условиям (15) и

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_t(x, +0) = u_t(x, -0), \quad u(x, T) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq p \quad (29)$$

здесь $\varphi(x)$ - заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 4.3.1. Решение задачи III единственно, если оно существует.

Теорема 4.3.2. Пусть функция $\varphi(x) \in C^{2k}[0, p]$ и $\varphi^{2k+1}(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$, а также

$$\varphi^{(2m)}(0) = \varphi^{(2m)}(p) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k.$$

Тогда решение задачи III существует и единственно.

В четвертом параграфе четвертой главы исследована следующая обратная задача.

Задача IV. Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$ в области Ω , удовлетворяющие уравнению (24) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, условиям (15), (29) и

$$u_t(x, T) = u_t(x, -T) = 0,$$

здесь $\varphi(x)$ - заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 4.4.1. Решение задачи IV единственно, если оно существует.

Теорема 4.4.2. Если функция $\varphi(x) \in W_2^{2k+1}(0, p)$, а также выполнены условия $\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(p) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k$, тогда решение задачи IV существует.

Существование решения всех рассматриваемых задач доказано методом Фурье, а единственность - методом априорных оценок и с использованием полноты ортонормированных тригонометрических систем в $L_2(0, p)$.

В конце каждой главы даны основные выводы. В конце диссертации приведены заключение и список литературы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению вопросов однозначной разрешимости прямых и обратных краевых задач для уравнений четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка.

В первой главе даются вспомогательные сведения из теории функций, теории тригонометрических рядов и теории операторов, а также даётся краткий обзор основных научных результатов.

Во второй главе рассматриваются краевые задачи для уравнения четного порядка и исследуются их спектральные свойства. Найдена априорная оценка решения. Исследуются разрешимость и спектральные свойства самосопряжённых краевых задач для уравнений четного порядка.

В третьей главе исследуются разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений смешанного типа четного порядка. Доказана однозначная регулярная и сильная разрешимости рассматриваемых задач, а также изучены спектральные свойства.

В четвёртой главе исследуются обратные краевые задачи для уравнения парабола-гиперболического типа, уравнения четного порядка и для уравнений смешанного типа четного порядка. Доказаны однозначные разрешимости поставленных задач.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Аманов Д., Юлдашева А.В. Обратная задача для уравнения четного порядка. // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Материалы Респ. науч. конф. посвященной 90-летию юбилею НУУз. 8 мая 2008. Ташкент, 2008. С. 30-31.
2. Аманов Д., Юлдашева А.В. Вольтерровость краевых задач для уравнения высокого порядка. // Материалы международного Российско-Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VI школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», 12-17 мая 2008г. Эльбрус, С. 27-28.
3. Аманов Д., Юлдашева А.В. Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнения четного порядка. // Материалы международного Российско - Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VI школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики», 12-17 мая 2008г. Эльбрус, С. 28-30.
4. Аманов Д., Юлдашева А.В. Краевые задачи для смешанно-параболического уравнения высокого порядка // Материалы международной юбилейной научной конференции «Актуальные проблемы теории управления, топология и операторных уравнений», посвященной 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета, 15-21 сентября 2008г. Бишкек, С. 184-187.
5. Юлдашева А.В. Обратная задача для парабола-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: Тез. докл. межд. конф., посвящ. 100-летию С.Л. Соболева. 5-12 октября 2008. Новосибирск, 2008. С. 239.
6. Аманов Д., Юлдашева А.В. Краевая задача для смешанно-параболического уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, 2008, №6, С. 10-13.
7. Юлдашева А.В. Обратная задача для парабола-гиперболического уравнения // Вопросы вычислительной и прикладной математики (сборник научных трудов), вып. 121. Ташкент, 2009. С. 82-88.
8. Yuldasheva A.V. Boundary value problem for mixed-type equation of high order // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. Almaty, June 30-July 4, 2009. Vol. 1. P. 305.
9. Amanov D., Yuldasheva A.V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // Malaysian Journal Mathematical Sciences. Vol. 3, №2, 2009. P. 227-248.
10. Юлдашева А.В. Краевые задачи для k -параболического уравнения // Узб. мат. журн. Ташкент, 2010. № 1. С. 189-194.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор
Юлдашева Асал Викторовнанинг
01.01.02 – дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича
**«Жуфт тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари
масалалар»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: чегаравий масала, тескари масала, априор баҳо, регуляр ва кучли ечимлар, ечимнинг ягоналиги, ечимнинг мавжудлиги.

Тадқиқот объектлари: Жуфт тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар.

Ишнинг мақсади: Жуфт тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўртбурчакли соҳада тўғри ва тескари масалалар қўйиш ва тадқиқ қилиш.

Тадқиқот методлари: априор баҳо методи, Фурье методи, чизиқли операторлар назарияси ва функционал анализ методлари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги:

- жуфт тартибли тенгламалар ва аралаш типдаги жуфт тартибли тенгламалар учун турли тўғри ва тескари масалалар қўйилган;

- берилган функцияларга қўйилган шартларда ва соҳа ўлчамларига боғлиқ ҳолда тўғри ва тескари масалаларнинг регуляр ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги кўрсатилди ҳамда бу масалаларнинг бир қийматли кучли ечими олинди;

- қаралган тўғри масалаларга эквивалент оператор тенгламалар қаралди ва масаланинг спектри ҳақида натижа чиқарилади;

- айрим тўғри масалалар ечимлари учун априор баҳо олинган ва ундан ечимнинг ягоналиги ва тенгламанинг ўнг томонига узлуксиз боғлиқлиги ҳамда тескари операторнинг мавжудлиги келиб чиқиши кўрсатилган.

Амалий аҳамияти: диссертация натижалари назарий аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантлар учун махсус курсларни ўқитишда ва ушбу соҳани назарий жиҳатдан ривожлантиришда фойдаланиш мумкин.

Фойдаланиш соҳаси: диссертацияда олинган натижалардан аралаш типдаги тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалаларни ўрганишда, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг кейинги ривожда ҳамда уларга келтириладиган математик физика масалаларини тадқиқ этишда фойдаланилиш мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Юлдашевой Асал Викторовны на тему:

«Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа четного порядка»

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, обратная задача, априорная оценка, регулярное и сильное решение, единственность решения, существование решения.

Объекты исследования: прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка.

Цель работы: постановка и исследование однозначной регулярной, сильной разрешимости и изучение спектральных свойств краевых задач для уравнений четного порядка. Изучение существования и единственности решения обратных задач для уравнений четного порядка, смешанного и несмешанного типов.

Методы исследования: применяются метод априорных оценок, метод Фурье, теория линейных операторов и методы функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна:

- сформулированы новые различные прямые и обратные задачи для уравнений четного порядка и уравнений смешанного типа четного порядка;
- доказаны единственность и существование регулярных решений прямых и обратных задач при определённых достаточных условиях на заданные функции;
- для рассматриваемых прямых задач доказывается однозначная сильная разрешимость;
- используются операторные уравнения, эквивалентные исследуемым прямым задачам, делается вывод о спектре задачи;
- для решения некоторых прямых задач получены априорные оценки, из которых следует единственность, непрерывная зависимость решения от правой части и существование обратного оператора.

Практическая значимость: результаты диссертации носят теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты можно использовать при чтении спецкурсов для магистрантов и для дальнейшего теоретического развития данного направления.

Область применения: результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа, при дальнейшем развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными и при решении задач математической физики, приводящих к подобным уравнениям.

RESUME

Thesis of **Yuldasheva Asal Victorovna**
on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in Physics and
Mathematics, speciality 01.01.02 – Differential equations, subject:
«**Direct and inverse problems for mixed-type equations of even order**»

Key words: boundary value problem, inverse problems, a priori estimate, regular and strong solutions, uniqueness of solution, existence of solution.

Subjects of research: direct and inverse problems for even-order equations and mixed-type equations of even order.

Purpose of work: formulation and investigation of direct and inverse problems for even-order equations and mixed-type equations of even order.

Methods of research: the method of a priori estimates, Fourier method, the theory of linear operators and the methods of functional analysis are used.

The results obtained and their novelty:

- various new direct and inverse problems for even-order equations and mixed-type equations of even order are formulated;

- under certain conditions to given functions and in some problems depending on size of domain, the uniqueness and the existence of regular solution for those problems are proved, the unique strong solvability of direct problems are proved;

- operator equations, which are equivalent to considered problems are studied and conclusion on a spectrum of the problems are obtained;

- a priori estimates for some problems, from which uniqueness and continuous dependence of regular solution from the right hand of the equation and existence of inverse operators are obtained.

Practical value: the results of the dissertation work have got theoretical character.

Degree of embed and economic effectiveness: on the base of achieved results, the special course for the master-students can be teached and these results may be used in the subsequent theoretical development of this trend.

Field of application: results of the dissertation can be used in the studying of boundary value problems for mixed type equations, in the further development of the theory of partial differential equations and at solving problems of mathematical physics which are reducing to such equations.

Соискатель: