

**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

На правах рукописи
УДК 512.554

АДАШЕВ ЖОБИР КОДИРОВИЧ

**ОПИСАНИЕ n -МЕРНЫХ АЛГЕБР ЗИНБИЕЛЯ
НИЛЬИНДЕКСА k ($n-2 \leq k \leq n+1$)**

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Ташкент – 2011

Работа выполнена в Институте математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, Омиров Бахром Абдазович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Касимов Надимулла Хабибуллович кандидат физико-математических наук Гуламов Акромжон Рустамович
Ведущая организация:	Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека

Защита диссертации состоится «___» _____ 2011 года в _____ часов на заседании Специализированного совета Д. 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «___» _____ 2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета Д. 015.17.01,
кандидат физико-математических наук

А.А. Заитов.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Теория алгебр Ли стремительно вошла в математику в конце XIX века. Благодаря работам многих выдающихся математиков данная теория обогатилась рядом фундаментальных результатов. На современном этапе развития алгебры Ли являются одним из основных и важных объектов исследования алгебры. Активные исследования в области алгебр Ли привели к возникновению ряда обобщений этих алгебр, таких как супералгебры Ли, бинарные Лиевы алгебры, алгебры Лейбница и другие.

Из классической теории алгебр Ли известно, что изучение конечномерных алгебр Ли сводится к изучению нильпотентных алгебр. Исследованию нильпотентных алгебр Ли посвящены работы Ю.Б. Хакимжданова, М.Гоза, Х.Р. Гомеза и других алгебраистов. При этом следует отметить, что описание всех конечномерных нильпотентных алгебр Ли представляется необозримой задачей. Поэтому исследования нильпотентных алгебр Ли проводится с наложением дополнительных условий, таких как ограничения на индекс нильпотентности алгебры, на характеристическую последовательность, на градуировку и др.

Напомним, что алгебры Лейбница были введены в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж.-Л. Лоде и определяются тождеством Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Нетрудно видеть, что если в алгебре Лейбница потребовать также выполнение тождества антикоммутативности, то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом, алгебры Лейбница являются «некоммутативным» аналогом алгебр Ли.

В связи с этим естественно возникает задача продолжить результаты, справедливые для алгебр Ли, на случай алгебр Лейбница. В частности, использовать подходы и методы, разработанные для нильпотентных алгебр Ли, в теории алгебр Лейбница. Отметим, что классы нуль-филиформных и филиформных алгебр Лейбница изучены в работах Ш.А. Аюпова, Б.А.Омирова и Х.Р.Гомеза.

Классификация комплексных филиформных алгебр Лейбница до размерности 9 посвящены работы Ш.А. Аюпова, Б.А.Омирова, И. С. Рахимова и И.М. Рихсибоева. Однако, данные классификации не позволяют обобщить использованные методы на алгебры Лейбница больших размерностей. При классификации одной из основных задач является получение результатов о поведении структурных констант при заменах базиса. Следует отметить, что Б.А.Омировым и Х.Р. Гомезом был построен алгоритм для вычисления структурных констант при замене базиса для некоторого семейства филиформных алгебр Лейбница в произвольной заданной размерности.

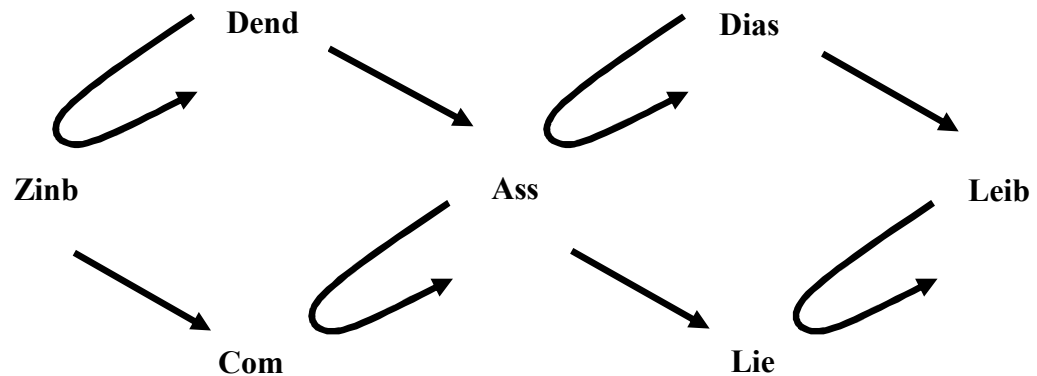
Настоящая диссертационная работа посвящена изучению алгебр, которые являются кошулево дуальными к алгебрам Лейбница. Напомним, что понятие кошулево дуальных операд было впервые введено в работах

В.Гинзбурга и М.Капранова. Далее, Ж.-Л. Лоде показал, что кошулева дуальность для алгебры Лейбница приводит к алгебре с тождеством

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y).$$

В дальнейшем алгебры, задающиеся этим тождеством, получили название алгебр Зинбиеля. Отметим, что слово «Zinbiel» - это слово «Leibniz», записанное в обратном порядке букв.

Известная диаграмма Ж.-Л.Лоде состоит из определенного расположения многообразий алгебр и диалгебр, которые являются кошулево дуальными по отношению к вертикальной оси, проходящей через ассоциативные алгебры.



Символом $A \hookrightarrow B$ обозначено вложение категории A в категорию B , а $A \rightarrow B$ означает, что произвольная алгебра из категории A , снабженная новым умножением принадлежит категории B . Кроме того, для категорий диассоциативных алгебр, алгебр Ли, алгебр Лейбница, алгебр Зинбиеля, дендриформных алгебр, диассоциативных алгебр, ассоциативных и коммутативно-ассоциативных алгебр указаны правила их связей. В частности,

ассоциативные алгебры переходят в алгебры Ли по правилу

$$[x, y] = xy - yx;$$

алгебры Зинбиеля переходят в коммутативные если рассмотреть умножение

$$xy = x \circ y + y \circ x;$$

дендриформные алгебры переходят в ассоциативные по правилу:

$$xy = x \prec y + y \succ x;$$

диассоциативные алгебры переходят в алгебры Лейбница заданием следующего умножения:

$$[x, y] = x \dashv y - y \vdash x.$$

Диаграмма Лоде показывает насколько тесно взаимосвязаны указанные алгебры и диалгебры.

В работах А.С. Джумадиляева, К.М. Туленбаева и других математиков были получены глубокие результаты по теории конечномерных алгебр Зинбиеля. В частности, доказаны нильпотентность, нильность и разрешимость произвольной конечномерной комплексной алгебры Зинбиеля, также

получены оценки для индексов нильпотентности, нильности и разрешимости конечномерных алгебр Зинбиеля над произвольным полем.

Несмотря на то, что в настоящее время интенсивность теоретических исследований в области алгебр Зинбиеля высока, работы, посвященные структурной теории данных алгебр малочисленны. Поэтому, для восполнения этого пробела, была поставлена задача изучить алгебры Зинбиеля с точки зрения структурной теории.

Одним из основных результатов настоящей диссертационной работы является описание n -мерных комплексных алгебр Зинбиеля нильиндекса k ($n-2 \leq k \leq n+1$).

Степень изученности проблемы. Описанию структурной теории конечномерных нильпотентных алгебр Лейбница были посвящены работы Ш.А. Аюпова, Б.А. Омирова, И.С. Рахимова, И.М. Рихсибоева и Л. Камачо. В частности, получены классификации комплексных филиформных алгебр Лейбница до размерности 9. Используя тот факт, что при классификации одной из основных задач является получение информации о поведении структурных констант при заменах базиса, Б.А. Омировым и Х.Р. Гомезом получены соотношения для структурных констант в различных базисах для семейств филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых изоморфна не лиевым алгебрам Лейбница.

Аналогичные задачи для алгебр Зинбиеля были рассмотрены в работах А.С. Джумадильдаева, К.М. Туленбаева и Б.А. Омирова. В частности, ими доказано, что всякая конечномерная комплексная алгебра Зинбиеля нильпотентна, а также получены классификации двумерных и трехмерных комплексных алгебр Зинбиеля.

Следует отметить, что до настоящего времени классификация алгебр Зинбиеля произвольной размерности не была затронута.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Исследования проводились по гранту Ф.1.1.3 программы фундаментальных исследований I Ф «Математика, механика, информатика».

Цель исследования. Целью диссертационной работы является описание некоторых классов комплексных конечномерных алгебр Зинбиеля и исследование структурной теории алгебр Зинбиеля.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

- описание поведения структурных констант из класса комплексных филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых изоморфна алгебре Ли;
- классификация комплексных алгебр Зинбиеля малых размерностей;
- описание с точностью до изоморфизма комплексных нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля;
- классификация комплексных естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля;
- описание дифференцирований нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля;

–характеризация некоторых свойств характеристической последовательности естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля;

–классификация n -мерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристической последовательностью равной $(n-3, 3)$;

–получение классификации n -мерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристической последовательностью равной $(n-3, 1, 1, 1)$.

Методы исследований. В работе используются метод градуирований, структурные методы, классификационные методы и методы теории инвариантов.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. получен критерий изоморфизма алгебр некоторого класса филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых является алгеброй Ли;

2. получена классификация четырехмерных комплексных алгебр Зинбиеля;

3. описаны комплексные нуль-филиформные, филиформные алгебры Зинбиеля и дифференцирования таких алгебр. Более того, вышеуказанное описание продолжено на класс комплексных естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля;

4. получены некоторые свойства характеристической последовательности для алгебр Зинбиеля и классифицированы комплексные n -мерные алгебры Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристическими последовательностями $(n-3, 3)$ и $(n-3, 1, 1, 1)$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В качестве основных результатов можно отметить следующие:

– описание некоторого класса филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых является алгеброй Ли и получение формул изменения структурных констант таких алгебр при адаптированных преобразованиях базиса;

– классификация четырехмерных комплексных алгебр Зинбиеля;

– классификация комплексных нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля;

– описание n -мерных комплексных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-1$;

– описание дифференцирований нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля;

– доказательство специфических свойств характеристической последовательности естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля;

– классификация n -мерных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристическими последовательностями $(n-3, 3)$ и $(n-3, 1, 1, 1)$.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях других многообразий алгебр, в теории категорий, в изучении алгебр с различными типами градуировок, вычислении групп когомологий и гомологий

Реализация результатов. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика Ш.А.Аюпова (ИМИТ АН РУз) (2008-2010г.); на научном семинаре кафедры «Алгебра и функциональный анализ» механико-математического факультета НУУз под руководством академика Ш.А.Аюпова; на республиканской научной конференции «Ёш математикларнинг янги теоремалари» (Наманган, ноябрь, 2006г.); на республиканской научной конференции «проблемы математики, механики и информационных технологий» (Ташкент, май, 2008 г.).

Опубликованность результатов. Список публикаций приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ». Постановки задач в работах [1]–[9] принадлежат Б.А. Омирову, некоторые идеи доказательств работ [1]–[4] и [6] принадлежат А.Х.Худойбердиеву, основные результаты получены диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и 62 наименований использованной литературы. Диссертация изложена на 94 страницах компьютерного текста.

2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе приведены предварительные сведения и дано описание филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых является алгеброй Ли. Кроме того, изучено правило изменения структурных констант таких алгебр при определенных преобразованиях базиса, и классифицированы четырехмерные комплексные алгебры Зинбиеля.

Определение 1.1.2. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

где $[-, -]$ – умножение в L .

Во втором параграфе первой главы исследуется класс (обозначаемый через F_3) филиформных алгебр, естественная градуировка которых изоморфна алгебре Ли. Отметим, что алгоритм вычисления структурных констант филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых приводит к не Лиевым алгебрам Лейбница, уже описан Б.А. Омировым и Х.Р. Гомезом.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующий класс F_3 :

$$\begin{aligned} [e_i, e_0] &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ [e_0, e_i] &= -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_0, e_0] &= b_{0,0}e_n, & [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_1] &= b_{1,1}e_n, \\
[e_i, e_j] &= a_{i,j}^1 e_{i+j+1} + a_{i,j}^2 e_{i+j+2} + \dots + a_{i,j}^{n-(i+j+1)} e_{n-1} + b_{i,j}e_n, \quad 1 \leq i < j \leq n-1, \\
[e_i, e_j] &= -[e_j, e_i], \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1, \\
[e_i, e_{n-i}] &= -[e_{n-i}, e_i] = (-1)^i b_{i,n-i}e_n, \quad 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

где $a_{i,j}^k, b_{i,j} \in \mathbb{C}$ и $b_{i,n-i} = b$ при $1 \leq i \leq n-1$, при этом $b \in \{0; 1\}$ для нечетных n и $b=0$ для четных n .

Пусть L – $(n+1)$ -мерная алгебра Лейбница из класса F_3 , фактор-алгебра $L/\langle e_n \rangle$ изоморфна n -мерной филиформной алгебре Ли $\mu_1^{n-1} - a_{1,4}\psi_{1,4}$, где μ_1^{n-1} – n -мерная филиформная естественным образом градуированная алгебра Ли; и отображение $\psi_{1,4}: \mu_1^{n-1} \wedge \mu_1^{n-1} \rightarrow \mu_1^{n-1}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\psi_{1,4}(e_1, e_i) &= -\psi_{1,4}(e_i, e_1) = e_{i+2}, \quad \text{при } 2 \leq i \leq n-3, \\
\psi_{1,4}(e_i, e_j) &= -\psi_{1,4}(e_j, e_i) = 0, \quad \text{в противном случае.}
\end{aligned}$$

Тогда алгебра L имеет следующую таблицу умножения:

$$\begin{aligned}
F_3(a_{1,4}): [e_i, e_0] &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\
[e_0, e_i] &= -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
[e_0, e_0] &= b_{0,0}e_n, & [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_n, \\
[e_1, e_1] &= b_{1,1}e_n, \\
[e_i, e_1] &= -[e_1, e_i] = a_{1,4}e_{i+2} + b_{i,1}e_n, & 2 \leq i \leq n-3, \\
[e_i, e_j] &= -[e_j, e_i] = b_{i,j}e_n, & 2 \leq i < j \leq n-1, \\
[e_i, e_{n-i}] &= -[e_{n-i}, e_i] = (-1)^i b_{i,n-i}e_n, & 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}$$

где $b_{i,n-i} = b$ при $1 \leq i \leq n-1$, при этом $b \in \{0, 1\}$ для нечетных n и $b = 0$ для четных n .

Используя тождество Лейбница, мы получим ограничения на структурные константы семейства $F_3(a_{1,4})$ при $n \geq 6$, таблица умножения которого имеет вид:

$$\begin{aligned}
[e_i, e_0] &= e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\
[e_0, e_i] &= -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\
[e_0, e_0] &= b_{0,0}e_n, [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_n, [e_1, e_1] = b_{1,1}e_n, \\
[e_2, e_1] &= -[e_1, e_2] = a_{1,4}e_4 + b_{2,1}e_n, \\
[e_3, e_1] &= -[e_1, e_3] = a_{1,4}e_5, \\
[e_4, e_1] &= -[e_1, e_4] = a_{1,4}e_6 - b_{3,2}e_n, \\
[e_i, e_1] &= -[e_1, e_i] = a_{1,4}e_{i+2}, & 5 \leq i \leq n-2, \\
[e_3, e_2] &= -[e_2, e_3] = b_{3,2}e_n,
\end{aligned}$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

Предварительно обозначив алгебру из семейства $F_3(a_{1,4})$ через $L(b_{0,0}, b_{0,1}, b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,3})$, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.2.1. Две алгебры Лейбница $L(b_{0,0}, b_{0,1}, b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,3})$ и $L'(b'_{0,0}, b'_{0,1}, b'_{1,1}, b'_{1,2}, b'_{2,3})$ изоморфны тогда и только тогда, когда существуют $a_0, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ такие, что выполняются следующие условия:

$$b'_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{a_0^{n-(i+j+1)}} \quad \text{при } 0 \leq i \leq j \leq 1,$$

$$b'_{1,2} = \frac{a_0^4 b_{1,2} + (c_2^2 - 2c_3 a_0^2) b_{2,3}}{a_0^n}, \quad b'_{2,3} = \frac{b_{2,3}}{a_0^{n-6}}.$$

Формулы изменения структурных констант при замене базиса (изоморфизмов) для случая филиформных алгебр Лейбница малых размерностей получены в теоремах 1.2.2 и 1.2.3.

Определение 1.1.3. Алгебра A над полем F называется *алгеброй Зинбиеля*, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется тождество:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$$

где $\circ$ – умножение в A .

Для произвольной алгебры Зинбиеля определим нижний центральный ряд:

$$A^1 = A, \quad A^{k+1} = A \circ A^k, \quad k \geq 1.$$

Определение 1.1.4. Алгебра Зинбиеля A называется *нильпотентной*, если существует $s \in \mathbb{N}$ такое, что $A^s = 0$. Минимальное число s , обладающее таким свойством называется *индексом нильпотентности (нильиндексом)* алгебры A , т.е. $A^{s-1} \neq 0$ и $A^s = 0$.

В третьем параграфе первой главы классифицированы четырехмерные комплексные алгебры Зинбиеля.

Теорема 1.3.1. Любая 4-мерная комплексная не разложимая алгебра Зинбиеля изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$A_1: e_1 \circ e_1 = e_2, e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = 2e_3, e_1 \circ e_3 = e_4, e_2 \circ e_2 = 3e_4, e_3 \circ e_1 = 3e_4;$$

$$A_2: e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_2 = e_4, e_1 \circ e_3 = e_4, e_3 \circ e_1 = 2e_4;$$

$$A_3: e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_3 = e_4, e_2 \circ e_2 = e_4, e_3 \circ e_1 = 2e_4;$$

$$A_4: e_1 \circ e_2 = e_3, e_1 \circ e_3 = e_4, e_2 \circ e_1 = -e_3;$$

$$A_5: e_1 \circ e_2 = e_3, e_1 \circ e_3 = e_4, e_2 \circ e_1 = -e_3, e_2 \circ e_2 = e_4;$$

$$A_6: e_1 \circ e_1 = e_4, e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = -e_3, e_2 \circ e_2 = -2e_3 + e_4;$$

$$A_7: e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = e_4, e_2 \circ e_2 = -e_3;$$

$$A_8(\alpha): e_1 \circ e_1 = e_3, e_1 \circ e_2 = e_4, e_2 \circ e_1 = -\alpha e_3, e_2 \circ e_2 = -e_4, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$A_9(\alpha): e_1 \circ e_1 = e_4, e_1 \circ e_2 = \alpha e_4, e_2 \circ e_1 = -\alpha e_4, e_2 \circ e_2 = e_4, e_3 \circ e_3 = e_4, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$A_{10}: e_1 \circ e_2 = e_4, e_1 \circ e_3 = e_4, e_2 \circ e_1 = -e_4, e_2 \circ e_2 = e_4, e_3 \circ e_1 = e_4;$$

$$A_{11}: e_1 \circ e_1 = e_4, e_1 \circ e_2 = e_4, e_2 \circ e_1 = -e_4, e_3 \circ e_3 = e_4;$$

$$A_{12}: e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = e_4;$$

$$A_{13}: e_1 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = -e_3, e_2 \circ e_2 = e_4;$$

$$A_{14}: e_2 \circ e_1 = e_4, e_2 \circ e_2 = e_3;$$

$$A_{15}(\alpha): e_1 \circ e_2 = e_4, e_2 \circ e_2 = e_3, e_2 \circ e_1 = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} e_4; \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

$$A_{16}: e_1 \circ e_2 = e_4, e_2 \circ e_1 = -e_4, e_3 \circ e_3 = e_4;$$

Одним из важных классов нильпотентных алгебр Ли и Лейбница является класс p -филиформных алгебр. По аналогии с алгебрами Лейбница для алгебр Зинбиеля мы введем понятия нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля ($p=0$ и $p=1$, соответственно).

Определение 2.1.1. Алгебру Зинбиеля A размерности n назовём нуль-филиформной, если $\dim A^i = (n+1) - i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Приведем один из основных результатов параграфа 2.1.

Теорема 2.1.1. Произвольная n -мерная нуль-филиформная алгебра Зинбиеля изоморфна алгебре NF_n с таблицей умножения:

$$e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad \text{при } 2 \leq i+j \leq n,$$

где отсутствующие произведения равны нулю и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис алгебры.

Пусть A алгебра Зинбиеля нильиндекса s . Положив $A_i = A^i / A^{i+1}$, $1 \leq i \leq s-1$, получим градуированную алгебру Зинбиеля $GrA = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_{s-1}$, где $A_i \circ A_j \subseteq A_{i+j}$.

Алгебру Зинбиеля A назовем *естественным образом градуированной*, если $A \cong GrA$.

Определение 2.1.2. Алгебра Зинбиеля A размерности n называется *филиформной*, если $\dim A^i = n-i$, $2 \leq i \leq n$.

В следующей теореме приводится классификация комплексных естественным образом градуированных филиформных алгебр Зинбиеля.

Теорема 2.1.2. Произвольная n -мерная ($n \geq 5$) естественным образом градуированная комплексная филиформная алгебра Зинбиеля изоморфна алгебре:

$$FZ_n: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю, и $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис алгебры.

В следующей теореме приводится классификация комплексных филиформных алгебр Зинбиеля.

Теорема 2.1.3. Любая n -мерная ($n \geq 5$) комплексная филиформная алгебра Зинбиеля изоморфна одной из трех попарно неизоморфных алгебр:

$$FZ_n^1: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1;$$

$$FZ_n^2: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1, \quad e_n \circ e_1 = e_{n-1};$$

$$FZ_n^3: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-1, \quad e_n \circ e_n = e_{n-1}.$$

Следующий этап классификации состоит в описании естественным образом градуированных комплексных квази-филиформных алгебр Зинбиеля.

Определение 2.2.1. n -мерная алгебра Зинбиеля A называется *квази-филиформной*, если $A^{n-2} \neq 0$ и $A^{n-1} = 0$.

Пусть A – n -мерная градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля, тогда существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такой, что $e_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n-2$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $e_{n-1} \in A_1$.

Алгебру Зинбиеля A , для которой выполняется условие $e_n \in A_r$, $1 \leq r \leq n-2$, будем называть *алгеброй типа $A_{(r)}$* .

Классификации естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля типа $A_{(1)}$ и типа $A_{(2)}$ приводится в следующих теоремах.

Теорема 2.2.1. Любая n -мерная ($n \geq 6$) естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(1)}$ изоморфна алгебре:

$$e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, \quad 2 \leq i+j \leq n-2.$$

Теорема 2.2.2. Любая n -мерная ($n \geq 8$) естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Зинбиеля типа $A_{(2)}$ изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$KF_n^1: e_1 \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-1} \circ e_1 = \alpha e_n, e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-2;$$

$$KF_n^2: e_1 \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-1} \circ e_1 = e_n, e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n, e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-2;$$

$$KF_n^3: e_1 \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-1} \circ e_{n-1} = e_n, e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-2;$$

$$KF_n^4: e_{n-1} \circ e_1 = e_n, e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-2.$$

Классификации малых размерностей для таких алгебр предложены в предложении 2.2.1, теоремах 2.2.3-2.2.5, леммах 2.2.1-2.2.3 и следствиях 2.2.1- 2.2.3.

Таким образом, результаты параграфов 2.1 и 2.2 завершают классификацию n -мерных естественным образом градуированных алгебр, удовлетворяющих условию $A^{n-2} \neq 0$.

В параграфе 2.3 на основе результатов параграфа 2.1 приведены описания дифференцирований нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля.

Определение 2.3.1. Линейное преобразование d алгебры Зинбиеля A называется *дифференцированием*, если $d(x \circ y) = d(x) \circ y + x \circ d(y)$ для любых $x, y \in A$.

Как и всякое линейное преобразование n -мерного пространства дифференцирование задается с помощью $n \times n$ матрицы.

Теорема 2.3.1. Матрица всякого дифференцирования алгебры NF_n имеет следующий вид:

$$d := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{3,n-1} & \alpha_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{i+1,k} = C_k^i \alpha_{1,k-i}$, $1 \leq i \leq n-1$ и $i+1 \leq k \leq n$.

Описание дифференцирований алгебр FZ_n^1 , FZ_n^2 и FZ_n^3 получено в теоремах 2.3.2, 2.3.3 и 2.3.4.

Пусть x – элемент множества $A \setminus A^2$. Для оператора левого умножения L_x определим убывающую последовательность $C(x) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора L_x . На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок.

Определение 3.1.1. Последовательность $C(A) = \max_{x \in A \setminus A^2} C(x)$ назовём *характеристической последовательностью* алгебры A .

Пусть A – алгебра Зинбиеля и $C(A) = (n_1, n_2, \dots, n_k)$. Тогда существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ такой, что матрица оператора левого умножения на элемент e_1 имеет следующий вид:

$$L_{e_1, \sigma} = \begin{pmatrix} J_{n_{\sigma(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_{\sigma(2)}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_{\sigma(s)}} \end{pmatrix},$$

где $\sigma(i)$ принимает значения из $\{1, 2, \dots, s\}$. Не ограничивая общности, можно полагать, что $n_{\sigma(2)} \geq n_{\sigma(i)}$ при $3 \leq i \leq s$.

Теорема 3.1.1. Пусть A – естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью, равной $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, где $n_{\sigma(1)} = 1$. Тогда $n_{\sigma(2)} < 4$.

Отметим, что условие $n_{\sigma(2)} < 4$ в теореме 3.1.1 является существенным.

Приведем один из основных результатов параграфа 3.1.

Теорема 3.1.2. Пусть A – естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля типа II с характеристической последовательностью $(n-p, p)$. Тогда $\left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor < p < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

При доказательстве следующей теоремы используются свойства характеристической последовательности.

Пусть A n -мерная разложимая алгебра Зинбиеля, т.е. $A = M \oplus N$.

Теорема 3.1.3. Алгебра A имеет характеристическую последовательность равную $(n-p, p)$ тогда и только тогда, когда M и N – нульфилиформные алгебры Зинбиеля, где $\dim M = n-p$, $\dim N = p$.

Следующий этап изучения нильпотентных алгебр Зинбиеля состоит в классификации алгебр Зинбиеля с нильиндексом $n-2$.

Рассмотрим естественным образом градуированную n -мерную алгебру Зинбиеля с характеристической последовательностью равной $(n-3, 3)$.

Алгебру Зинбиеля назовем *алгеброй первого типа* (типа I), если оператор L_{e_1} имеет вид $\begin{pmatrix} J_{n-3} & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix}$; алгебру Зинбиеля назовем *алгеброй второго*

типа (типа II), если оператор L_{e_1} имеет вид $\begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & J_{n-3} \end{pmatrix}$.

Теорема 3.2.1. Любая n -мерная ($n \geq 8$) естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля с характеристической последовательностью $(n-3, 3)$ типа I изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

$$A_1: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-3, e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, e_1 \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-2} \circ e_1 = \alpha e_{n-1},$$

$$e_{n-1} \circ e_1 = (\alpha+1)e_n, e_{n-2} \circ e_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} e_n, e_2 \circ e_{n-2} = (\alpha+1)e_n, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$A_2: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-3,$$

$$e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, e_1 \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-2} \circ e_1 = -e_{n-1}, e_{n-2} \circ e_{n-1} = e_n,$$

$$A_3: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j}, 2 \leq i+j \leq n-3, e_1 \circ e_{n-2} = e_{n-1}, e_1 \circ e_{n-1} = e_n,$$

$$e_{n-2} \circ e_1 = e_{n-1}, e_{n-1} \circ e_1 = 2e_n, e_{n-2} \circ e_2 = e_n, e_2 \circ e_{n-2} = 2e_n,$$

$$e_{n-2} \circ e_{n-2} = e_{n-1}, e_{n-2} \circ e_{n-1} = e_n, e_{n-1} \circ e_{n-2} = 2e_n,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

Перейдем теперь к рассмотрению естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля типа II.

Теорема 3.2.2. Пусть A естественным образом градуированная алгебра Зинбиеля типа II. Тогда ее размерность не больше чем 10.

В работах Б.А.Омирова, Х.Р. Гомеза, Л.М. Камачо и И.М. Рихсибоева были получены классификации естественным образом градуированных r -филиформных алгебр Ли и алгебр Лейбница. В параграфе 3.3 получен аналогичный результат для алгебр Зинбиеля.

Определение 3.3.1. Алгебра Зинбиеля A называется r -филиформной, если $C(A) = (n-r, 1, \dots, 1)$, где $r \geq 0$.

Таким образом, для r -филиформной алгебра Зинбиеля A , с точностью до сдвига базисных элементов, оператор L_{e_1} может иметь один из следующих двух видов:

$$\begin{pmatrix} J_{n-r} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n-r} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_1 \end{pmatrix}.$$

Алгебру Зинбиеля назовем *алгеброй типа I* (соответственно типа II), если оператор L_{e_1} имеет первый вид (соответственно второй вид).

Для естественным образом градуированных r -филиформных алгебр Зинбиеля типа I имеет место

Теорема 3.3.1. Пусть A – градуированная r -филиформная алгебра Зинбиеля типа I. Тогда $r_s \leq s$ для любого $s \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Для 3-филиформных алгебр Зинбиеля типа I верна следующая

Теорема 3.3.2. Пусть A – n -мерная не разложимая естественным образом градуированная 3-филиформная алгебра Зинбиеля типа I. Тогда она изоморфна одной из двух попарно не изоморфных алгебр:

$$A_1: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j} \quad \text{при} \quad 2 \leq i+j \leq n-3, \quad e_{n-2} \circ e_1 = e_n;$$

$$A_2: e_i \circ e_j = C_{i+j-1}^j e_{i+j} \quad \text{при} \quad 2 \leq i+j \leq n-3,$$

$$e_{n-2} \circ e_1 = e_{n-1}, \quad e_{n-2} \circ e_2 = e_n, \quad e_{n-1} \circ e_1 = 2e_n.$$

Для естественным образом градуированных 3-филиформных алгебр Зинбиеля типа II верна

Теорема 3.3.3. Любая естественным образом градуированная 3-филиформная алгебра Зинбиеля типа II имеет размерность не больше чем 6.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению комплексных конечно-мерных алгебр Зинбиеля нильиндекса k ($n-2 \leq k \leq n+1$) и одного подкласса комплексных филиформных алгебр Лейбница.

В работе получен критерий изоморфизма филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых является алгеброй Ли.

Получена классификация четырехмерных комплексных алгебр Зинбиеля.

С точностью до изоморфизма описаны комплексные нуль-филиформные и филиформные алгебры Зинбиеля. Кроме того, изучены дифференцирования таких алгебр.

Более того, описание нуль-филиформных и филиформных алгебр Зинбиеля продолжено на класс комплексных естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля.

Получены некоторые свойства характеристической последовательности для алгебр Зинбиеля. Далее, получена классификация комплексных n -мерных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристическими последовательностями $(n-3, 3)$ и $(n-3, 1, 1, 1)$.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях других многообразий алгебр и супералгебр, в теории категорий, в изучении алгебр с различными типами градуировок, вычислении групп когомологий и гомологий.

4. СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Adashev J.Q., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. Complex naturally graded quasi-filiform Zinbiel algebras. // Contemporary Mathematics. American Mathematical Society, – 2009. –P. 1-13.
2. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. Classifications of some classes of Zinbiel algebras. // Journal of Generalized Lie Theory and Applications. –Germany, 2010. –Vol. 3(4), –P. 1-10.
3. Adashev J.Q., Omirov B.A., Khudoyberdiyev A.Kh. On some nilpotent classes of Zinbiel algebras and their applications. // Third International Conference on Research and Education in Mathematics. –Malaysia, 2007. –P. 45-47.
4. Адашев Ж.К., Худойбердиев А.Х. Классификация 4-мерных комплексных алгебр Зинбиеля. // Новые теоремы молодых математиков-2006: Тез. докл. респ. науч. конф. 15-16 ноября 2006. –Наманган, 2006. –С. 69-71.
5. Адашев Ж. К. Классификация пяти и шести мерных комплексных филиформных алгебр Лейбница. // Современные проблемы математики, механики и информационных технологий: Тез. докл. респ. науч. конф. 8-мая 2008. –Ташкент, 2008. –С. 20-22.
6. Адашев Ж. К., Худойбердиев А.Х. Квази-филиформные алгебры Зинбиеля. // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2008. –№ 3. –С. 3-8.
7. Адашев Ж.К. Об описании комплексных филиформных алгебр Лейбница. // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. –№ 2. –С. 3-14.
8. Адашев Ж.К., Каримжонов И.А. Некоторые свойства характеристической последовательности естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля. // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. –№ 4. –С. 13-20.
9. Адашев Ж. К. Классификация подкласса комплексных естественным образом градуированных алгебр Зинбиеля. // Проблемы современной математики: Тез. докл. респ. науч. конф. 22-23 апреля 2011. –Карши, 2011. –С. 55-58.

РЕЗЮМЕ

диссертации Адашева Жобира Кодировича на тему: «Описание n -мерных алгебр Зинбиеля нильиндекса k ($n-2 \leq k \leq n+1$)» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, алгебра Зинбиеля, филиформность, градуирование, дифференцирование, нильпотентность, характеристическая последовательность.

Объекты исследования: Конечномерные комплексные алгебры Зинбиеля, филиформные алгебры Лейбница.

Цель работы: Исследование комплексных n -мерных алгебр Зинбиеля. Изучение структурной теории алгебр Зинбиеля.

Методы исследования: В работе используются метод градуирований, структурные методы, классификационные методы и методы теории инвариантов.

Полученные результаты и их новизна: Основными результатами диссертации являются следующие:

- получен критерий изоморфизма филиформных алгебр Лейбница, естественная градуировка которых является алгеброй Ли;
- получена классификация четырехмерных комплексных алгебр Зинбиеля;
- описаны комплексные нуль-филиформные и филиформные алгебры Зинбиеля и изучены дифференцирования таких алгебр. Более того, вышеуказанное описание продолжено на класс комплексных естественным образом градуированных квази-филиформных алгебр Зинбиеля;
- доказаны некоторые свойства характеристической последовательности для алгебр Зинбиеля, и получена классификация комплексных n -мерных алгебр Зинбиеля нильиндекса $n-2$ с характеристическими последовательностями $(n-3, 3)$ и $(n-3, 1, 1, 1)$.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Можно использовать при чтении специальных курсов магистров и аспирантов по специальности алгебра.

Область применения: Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях других многообразий алгебр и супералгебр, в теории категорий, в изучении алгебр с различными типами градуировок, вычислении групп когомологий и гомологий.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Адашев Жобир Кодирович**нинг 01.01.06-математик мантиқ, алгебра ва сонлар назарияси ихтисослиги бўйича «**Нильиндекси k ($n-2 \leq k \leq n+1$) га тенг бўлган n -ўлчовли Зинбиел алгебраларининг таснифи**» мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: Лейбниц алгебраси, филиформ Зинбиел алгебраси, градуировкалар, дифференциллашлар, характеристик кетма-кетлик,

Тадқиқот объектлари: Чекли ўлчовли комплекс Зинбиел алгебралари ва филиформ Лейбниц алгебралари.

Ишнинг мақсади: n ўлчовли комплекс Зинбиел алгебраларини ўрганиш. Зинбиел алгебраларини структуравий назариясини ўрганиш.

Тадқиқот методлари: Чекли ўлчовли алгебраларни таснифлашнинг умумий усулларида, градуировка усулларида, ҳамда инвариантлар назарияси усулларида фойдаланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: Диссертацияда қуйидаги асосий натижалар олинган.

- табиий градуировкаси Ли алгебраси бўлган, филиформ Лейбниц алгебралари учун изоморфизм критерияси олинган;

- тўртўлчовми комплекс Зинбиел алгебралари таснифланган;

- комплекс нол-филиформ ва филиформ Зинбиел алгебралари таснифланган. Бу таснифлар асосида бундай алгебраларнинг дифференциаллари ўрганилган. Бундан ташқари юқоридаги таснифларнинг давоми бўлган комплекс табиий градуировкаланган квази-филиформ Зинбиел алгебраларининг таснифи олинган;

- Зинбиел алгебралари учун характеристик кетма-кетлигининг баъзи хоссалари олиниб ва нильиндекси $n-2$ бўлиб, характеристик кетма-кетлиги $(n-3, 3)$ ва $(n-3, 1, 1, 1)$ бўлган n -ўлчовли комплекс Зинбиел алгебраларининг таснифи келтирилган.

Амалий аҳамияти: диссертацияда олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Университет магистрларига махсус курслар ўқишда фойдаланиш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертацияда олинган асосий натижалар ва усуллардан бошқа турдаги алгебра ва супералгебралар назарияларини ўрганишда, ҳамда турли хил усулларда градуирланган алгебраларни таснифлашда қўлланилиши мумкин.

RESUME

Thesis of **Adashev Jobir Qodirovich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 01.01.06 - Mathematical logic, algebra and number theory, subject: **“The description of n -dimensional Zinbiel algebras with nilindex k ($n-2 \leq k \leq n+1$)”**.

Key words: Leibniz algebra, Zinbiel algebra, filiform Zinbiel algebra, gradation, derivation, nilpotency, characteristic sequence.

Subjects of research: Finite dimensional complex Zinbiel algebras, filiform Leibniz algebras.

Purpose of work: To investigate n -dimensional complex filiform Zinbiel algebras, to examine the structural theory of Zinbiel algebras.

Methods of research: In this work methods of structural constants, classification methods, gradation methods and the methods of invariant theory are used.

The results obtained and their novelty: The main results of the work are the following:

- criteria of isomorphism of filiform Leibniz algebras class, natural gradation of which are Lie algebras, is obtained;

- the classification of four-dimensional complex Zinbiel algebras is obtained;

- zero-filiform and filiform complex Zinbiel algebras are described. Based on this description, the derivations of such algebras are investigated. Moreover, the description was extended to the class of complex naturally graded quasi-filiform Zinbiel algebras;

- some properties of characteristic sequence for the Zinbiel algebras are obtained. Furthermore, the classifications of n -dimensional complex Zinbiel algebras with nilindex $n-2$ with characteristic sequences $(n-3, 3)$ and $(n-3, 1, 1, 1)$ are obtained.

Practical value: The results of the dissertation are of theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: It can be used at reading of special courses.

Field of application: The main scientific results and methods presented in the work can be used in research of other algebras and superalgebras, in the theory of categories, in the study of algebras with various types of gradation, in calculation of cohomological and homological groups.

Соискатель: