**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

*На правах рукописи*
УДК 621.231

**Баротов Адизжон Садиевич**

# КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ИХ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ

**01.01.07 - Вычислительная математика**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент - 2011

Работа выполнена в Самаркандском отделении Академии Наук Республики Узбекистан и на кафедре «Алгебра и геометрия» Самаркандского государственного университета

**Научный руководитель:**
Доктор физ.-мат. наук, проф. А.С. Солеев

**Официальные оппоненты:**
Доктор физ.-мат. наук, профессор А.С. Расулов

Кандидат физ.-мат. наук, доцент И.И. Жалолов

**Ведущая организация** - Национальный университет Узбекистана

Защита диссертации состоится «___» ___________ 2011 г. в «_____» часов на заседании Специализированного Совета Д.015.17.01 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат разослан «___» _____________ 2011 г.

Учёный секретарь
Специализированного Совета,
кандидат физико-математических наук А.А. Заитов

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

**Актуальность работы.** В диссертации рассматривается система уравнений

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=0 \quad i=1,\ldots,m, \tag{1}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ - вещественные или комплексные переменные и $f_i(x_i,\ldots,x_n)$ соответственно вещественные или комплексные функции, аналитические в окрестности некоторой точки $X^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, являющейся корнем системы (1), т.е., все $f_i(X^0)=0$.

Пусть $m<n-1$ и $X^0$ - простой корень системы (1), т.е. в этой точке ранг матрицы $A=(\partial f_i/\partial x_j)$ равен $m$. Тогда по теореме о неявной функции систему (1) в малой окрестности точки $X^0$ можно разрешить относительно $m$ координат, и ее решения образуют одно многообразие, проходящее через $X^0$. Например, если левый минор порядка $m$ матрицы $A$ отличен от нуля, то решения системы (1) можно найти в виде $x_i=\varphi_i(x_{m+1},\ldots,x_n),\quad i=1,\ldots,m.$
Если же $X^0$ - особая точка (т.е. в ней ранг матрицы $A$ меньше чем $m$), то через эту точку могут проходить несколько ветвей, образованных решениями системы (1). Для каждой из них имеется своя локальная униформизация

$$x_i-x_i^0=\varphi_i(\tau_1,\ldots,\tau_{n-m}),\quad i=1,\ldots,n, \tag{2}$$

где $\varphi_i$ разлагаются в степенные ряды по $\tau_1,\ldots,\tau_{n-m}$. Легко показать, что разным ветвям множества (1) соответствуют разные униформизации (2). Поэтому ветвь (2) считаем отделенной, если для нее вычислен начальный отрезок разложения и доказано, что нет других ветвей с таким же начальным отрезком разложения.

Для указанного случая в настоящей диссертации излагается процедура, позволяющая различать все ветви кривой (1) (т.е. $m=n-1$) вблизи особой точки $X^0$ и вычислять их униформизацию (2) с любой степенью точности. Эта же процедура пригодна для нахождения тех ветвей алгебраической кривой, у которой некоторые (или все) координаты стремятся к бесконечности.

Перед тем, как дать краткий обзор методов нахождения ветвей и разрешения особенности вблизи особой точки $X^0=0$, приведем цитату Н. И. Моисеева[1]: "Около трехсот лет тому назад Ньютон разработал метод, получивший в последствии название "диаграмма Ньютона", который позволяет найти все решения уравнения

$$f(x,y)=0$$

[1] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики // М.: Наука. 1969. стр. 295.

при условии, что $f(0,0)=0$, а сама функция - аналитическая функция своих переменных. Метод диаграммы Ньютона и в настоящее время является единственным способом, позволяющим построить эффективные численные методы определения всех решений этой задачи. Численные реализации метода Ньютона хорошо отработаны лишь для скалярного случая, когда переменные $x$ и $y$ - скаляры. Случай, когда размерность переменной $x$ велика, приводит уже к огромным вычислительным трудностям. Если же и размерность переменной $y$ больше 1, то способы численной реализации идей Ньютона неизвестны. Таким образом, разработка численных методов постбифуркационного анализа - это сейчас одна из важнейших задач вычислительной математики, от решения которой будет зависеть судьба многочисленных прикладных исследований."

В настоящей диссертации предложен метод решения поставленной в этом высказывании задачи.

**Степень изученности проблемы.** Для случая $n=2$ Ньютон в 1711 году предложил геометрический прием. Этот прием позволяет все малые решения уравнения

$$f(x,y) \overset{def}{=} \sum_{p,q} a_{p,q} x^p y^q = 0 \tag{3}$$

получить в виде нескольких "рядов Пюизо"

$$y = \sum_{j=1} b_j x^{p_j}, \quad 0 < p_1 < p_2 < \ldots \tag{4}$$

с рациональными $p_j$. Для этого ряду $f(x,y)$ из (3) на плоскости $p,q$ ставится в соответствие множество $D$ точек $(p,q)$ с $a_{pq} \neq 0$, а затем выделяется граница выпуклой оболочки множества $D$ (*ломаная Ньютона*). Сумма членов

$$\Sigma' a_{pq} x^p y^q \overset{def}{=} \widehat{f}(x,y),$$

точки которых лежат на одном ребре ломаной Ньютона, дает "укороченное уравнение" $\hat{f}(x,y)=0,$ из которого находится первый член ряда (4). После замены $y = b_1 x^{p_1} + z$ аналогично находится второй член разложения (4) и т.д. Но разложения (4) не дают локальной униформизации ветвей: одной ветви (2) соответствует несколько разных разложений (4).

Вейерштрасс предложил процедуру разрешения особенности, которая сохраняет целочисленность показателей и приводит к локальной униформизации ветвей. Эта процедура аналогична сигма-процессу и может быть выполнена с помощью степенных преобразований.

Для систем (1) с $n \geq 3$ было предложено несколько обобщений этих методов.

*Метод последовательного исключения* координат из системы (1) и сведение ее к одному уравнению (3) был предложен Лефшецем и детально разработан Айзенгендлером, Вайнбергом и Треногиным. Этот метод дает системы уравнений вида

$$g_i(x_1,\dots,x_n)=0,\quad i=1,\dots,m$$

с $m<n-1$, для $(n-l)$-мерных компонент решений системы (1) и разложения по дробным степеням одной из координат для одномерных компонент. Метод исключения удобен для теоретического обоснования вопросов многомерного нелинейного ветвления. Так, этим методом можно доказать существование униформизаций (2) для всех одномерных компонент решений системы (1). Но этот метод, несмотря на свою теоретическую изящность и математическую строгость, не всегда удобен для практического использования, ибо требует громоздких вычислений со степенными рядами.

Еще был предложен *метод базиса Гробнера,* как альтернатива метода исключения. Суть этого метода состоит в том, что по исходной системе алгебраических уравнений определенным образом вычисляется другая (ступенчатая) система уравнений называемая "базис Гробнера". При этом обе системы многочленов порождают одинаковый идеал. Впервые такой базис предложил Хиронака и назвал его стандартным базисом. Алгоритм его вычисления предложил Бухбергер. Он же назвал его "базисом Гробнера" в честь своего научного руководителя. В настоящее время разрабатываются различные варианты и алгоритмы этого метода. Но пока что они требуют довольно громоздких вычислений.

*Метод ломаных Ньютона*, предложенный Мак-Милланом, состоит в следующем: Каждый ряд $f_i$ записывается в виде

$$f_i=\sum_{p,q} f_{iq}^{(p)} x_n^q,\quad i=1,\dots,m, \tag{5}$$

где $f_{iq}^{(p)}$ - однородный многочлен от $x_1,\dots,x_{n-1}$ степени $p$. Каждому ряду $f_i$ на плоскости $p,q$ ставится в соответствие свое множество $\tilde{D}_i$ точек $(p,q)$ с $f_{iq}^{(p)}\not\equiv 0$ и своя ломаная Ньютона. Затем выделяются ребра и вершины этих ломаных, лежащие на опорных прямых с одинаковым наклоном. По точкам множеств, лежащих на выделенных ребрах и вершинах, строится укороченная система

$$\hat{f}_1=\dots=\hat{f}_m=0, \tag{6}$$

решение которой дает первые члены однородных разложений

$$x_i=\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} x_n^{p_j}, \tag{7}$$

где $p_j$ - рациональные числа, $0<p_j<p_{j+1}$. Мак-Миллан указывает, что не все решения системы (1) имеют однородный вид (7) и могут быть найдены с помощью ломаных Ньютона. Поэтому он предлагает дополнительные приемы для отыскания решений, у которых $x_1,\dots,x_{n-1}$ имеют разные порядки малости по $x_n$. Видимо не зная работы Мак-Миллана, Грейвс предложил рассматривать систему (1) в виде одного векторного уравнения

$$F\overset{def}{=}\sum_{p,q} F_q^{(p)} x^q=0$$

с одной ломаной Ньютона на плоскости $p,q$. Недостаток этого подхода в том, что у Грейвса в укороченном векторном уравнении $\hat{F} = 0$ некоторые компоненты вектора $\hat{F}$ могут быть тождественными нулями. В то время как у Мак-Миллана в укороченной системе (6) каждое $f_i$ содержит какие-то члены $f_{iq}^{(p)} x^q$ и не является тождественнным нулем. Поэтому у Грейвса множества решений укороченного векторного уравнения могут иметь большую размерность, что затрудняет нахождение даже ветвей с однородными разложениями (7).

Конструкцию Грейвса с одной ломаной Ньютона развивал Боташев. Он формально переходит от системы уранений (1) к векторному уравнению

$$F(Y, x_n) \stackrel{def}{=} (f_1(Y, x_n), \ldots, f_m(Y, x_n)) = 0, \quad Y = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \tag{8}$$

Такой переход к векторной форме записи позволяет формально не различать двумерный и многомерный случаи, поэтому Боташев применяет метод диаграммы Ньютона к векторному уравнению (8).

Брюно предложил аппарат геометрии показателей степеней для исследования решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окресности особой точки. В частности, там был предложен многогранник Ньютона. На основе этого подхода был предложен локальный метод, применение которого демонстрируется на решении аналитического уравнения (3) в окрестности критической точки. Брюно посвятил решению линейных неравенств на плоскости $\mathbb{R}^2$. Развитый в нем аппарат является "основой геометрии показателей степеней". Им дан эскиз применения многогранников Ньютона в различных математических задачах. Одна их этих задач - разрешение особенностей - развивается в настоящей работе.

*Метод многогранников Ньютона* заключается в том, что каждому

$$f_i(X) \stackrel{def}{=} \sum_{Q \in D_i} f_{iQ} X^Q, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

где $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $X^Q = x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$, $f_{iQ}$ - числовые коэффициенты, в $\mathbb{R}^n$ ставится в соответствие носитель

$$D_i \stackrel{def}{=} D(f_i) = \{Q : f_{iQ} \neq 0\}$$

и его выпуклая оболочка $M(f_i)$, называемая *многогранником Ньютона* ряда $f_i(X)$. По граням многогранников $M(f_1), \ldots, M(f_m)$ составляется "укороченная система"

$$\hat{f}_1(X) = \cdots = \hat{f}_m(X) = 0 \tag{10}$$

и соответствующее множество $U(\varepsilon)$ таким образом, что первое приближение решения (2) в множестве $U(\varepsilon)$ является решением системы (10). При этом укороченная система (10) квазиоднородна и в своем множестве $U(\varepsilon)$

степенным преобразованием $y_i = X^{S_j}$, $j = 1,\dots,n,$ сводится к системе от меньшего числа переменных.

Бернштейн применил метод многогранников Ньютона для подсчета числа ветвей алгебрической кривой специального вида, но вопрос о вычислении ассимптотических разложений не рассматривал.

Хованский с помощью многогранников Ньютона изучает глобальные свойства полиномов, инвариантные при степенных преобразованиях. Поэтому он вместо $\mathbb{C}^n$ рассматривает их в торических многообразиях $(\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Он также использует степенные преобразования для разрешения особенностей.

К методу многогранников Ньютона примыкают работы Бугаева и Синцова. Бугаев рассматривал случай конечных сумм (9) и для выделения укороченных систем (10) предложил перебор всех возможных вариантов. Синцов предложил геометрический прием, который соответствует построению конусов, двойственных граням многогранников Ньютона $M(f_i)$.

Кроме этих общих методов, было предложено много специальных приемов для решения отдельных задач ветвления.

Перечисленные выше методы (кроме метода Вейерштрасса $n = 2$ для и метода многогранников Ньютона для произвольного $n$) дают решения системы (1) в виде рядов по дробным степеням некоторых координат (для кривой - одной из координат), т.е. не дают локальной униформизации ветвей.

Многогранники Ньютона использовались во многих работах: для оценки числа решений системы $n$ уравнений от $n$ неизвестных, для нахождения асимптотик осциллирующих интегралов, для вычисления топологических характеристик алгебраических многообразий, для дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производнных, а также в других задачах. При этом обычно рассматривали задачи общего положения с заданными многогранниками Ньютона, а исследования носили скорее теоретический характер. Попытка решения конкретных задач потребовала создания алгоритма для вычисления многогранников Ньютона. Такой алгоритм построен и изложен в гл. 1. Он запрограммирован на ЭВМ и применяется в гл. 3. В работах А. Солеева разработаны: алгоритм вычисления многогранников Ньютона в трехмерном случае; определены все граничные подмножества $D_j^{(d)}$ конечного множества точек $D$ и их нормальные конусы $K_j^{(d)}$; указан алгоритм нахождения ветвей алгебраической крывой, связанной с системой уравнений связи конкретных механизмов. Кроме того, им совместно с А. Арансоном для многомерных случаев приведена вычислительная схема для определения граней опорного многогранника Ньютона и составлена программа на языке $C^{++}$ для вычисления многогранников и его граней.

Задача об особых положениях плоских механизмов давно интересует исследователей в области теории механизмов. Различными авторами получены критерии существования особых положений как для механизмов с одной степенью свободы, так и для механизмов со многими степенями свободы.

**Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР.** Тема диссертационной работы Баротова А.С. «Классификация особенностей алгебраических кривых и их алгоритм вычисления» утверждена на ученом Совете Самаркандского государственного университета протокол № 1 от 30 августа 2010 года и выполнена плановой тематикой кафедры «Алгебра и геометрия» Самаркандского госуниверситета. Исследования частично проводились по гранту ОТ-Ф1-006 «*Развитие методов степенной геометрии и компьютерной алгебры в исследовании нелинейных проблем алгебры и анализа*» программы фундаментальных исследований

**Цель исследования.** Основной целью настоящей диссертационной работы является классификация особенностей функции положения механизмов выражаемых алгебраическими кривыми и алгоритм вычисления особенностей этих кривых.

**Задачи исследования.** Основными задачами исследования являются:

- нахождение уравнения связей исследуемых механизмов описываемых системой нелинейных алгебраических уравнений;
- классификация особых точек функции положения механизмов;
- исследовать механизмы, имеющие особые положения;
- построить локальные представления функции положения в малой окрестности особых точек.
- построить алгоритм для вычисления особенностей для всех типов;
- реализация этих алгоритмов на ПЭВМ.

**Объект и предмет исследования.** Объектом исследования являются функции положения механизмов, уравнения связей этих механизмов, особые положения этих механизмов и многогранники Ньютона.

**Методы исследований.** В работе используются методы линейной алгебры и вычислительной математики, методы степенной геометрии и алгоритмы нахождения особенностей кривых.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

- Алгоритм нахождения особенностей системы уравнений;
- программа вычисления многогранников Ньютона;
- построены многогранники Ньютона для конкретных систем уравнений;

- локальные представления функции положения плоского пятизвенника;
- локальные представления функции положения механизма с двумя степенями свободы;
- локальные представления функции положения механизма с тремя степенями свободы;
- локальные представления функции положения плоского четырёхзвенника с гидроцилиндрами.

**Научная новизна:** Основные результаты диссертации являются новыми, важными и состоят в следующем:

- показано, что уравнения связей исследуемых механизмов описываются системой нелинейных алгебраических уравнений вида: $F_i(U,V) \overset{def}{=} F_i(x_1,\ldots,x_m,x_{m+1},\ldots,x_{m+n}) = 0,\ i=\overline{1,m},\quad n<m$ где $U=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $V=(x_{m+1},\ldots,x_{m+n})$ - соответсвенные координаты положения и управления, а $F_i$ - многочлены;
- найдены классификации особых точек функции положения механизмов;
- приведен алгоритм нахождения особенностей для всех особенностей первого и второго типа;
- доказано, что пятизвенный механизм имеет особенность второго типа, только если его параметры удовлетворяют хотя бы одному из $2^4$ уравнений $\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3 + \delta_4 l_4 = a,\quad где \quad \delta_i = \pm 1$;
- доказано, что плоский механизм с тремя степенями свободы при условии $l_i \neq 0\ (i=1,2,3)$ не имеет особого положения второго типа;
- для плоского четырехзвенника с гидроцилиндрами найдены все особые положения, и доказано, что этот механизм не имеет особых точек второго типа.

**Научная и практическая значимость результатов исследования:** Результаты настоящей диссертационной работы имеют теоретический и практический интерес и являются новыми. Методы и результаты диссертации вносят определенный вклад в теорию особенностей алгебраических кривых и теорию механизмов.

Результаты проводимых исследований могут найти применение в задачах вычислительной математики, теории особенностей алгебраических кривых, теории механизмов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались на международных конференциях: Third International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, Samarkand-Bukhara, 5-11 october, 2000; Республиканская научно-практическая конференция «Технические науки и глобальные проблемы XXI века», Ташкент, май, 2001; международная научная конференция «Инновация-2001», Ташкент, ноябр, 2001; международная научная конференция «Инновация-2002», Ташкент, ноябр, 2002; на семинаре *"Операторные алгебры и их приложения*" отдела "Алгебра и анализ" под руководством академика АНРУз Ш.А. Аюпова в Институте Математики и Информационных Технологий АНРУз (Ташкент, 2006); International School and Conference on Foliations, Dynamical Systems, Singularity Theory and Perverse Sheaves, 6 - 21 October, Samarkand, 2009; на семинарах «Теория кубатурных формул и теория чисел» в Институте математики и информационных технологий АН РУз 2010; «Современные проблемы вычислительной математики и информатики» Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта 2010; регулярно докладывались на семинаре *«Методы степенной геометрии и компьютерной алгебры в исследовании алгебраических и дифференциальных уравнений»* под руководством профессоров А.С. Солеева и И. Икрамова (СамГУ 2000-2010 г.).

**Опубликованность результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–10]. 6 из них выполнены совместно. В совместных работах постановки задач и идея доказательств принадлежит А.С. Солееву. Результаты работ [1-10] получены А.С. Баротовым.

**Структура и объем диссертации:** Диссертация состоит из данного введения, трёх глав, приложения и списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Объем работы 89 страниц компьютерного текста, включая список литературы, содержащий 64 наименований. Приложение состоит из 10 таблиц и 17 рисунков.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Самаркандского государственного университета А.С. Солееву за постановку задачи и постоянное внимание при работе над диссертацией.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Далее, кратко изложим результаты, полученные в настоящей диссертационной работы.

**Диссертационная** работа состоит из введения, трех глав, приложения и списка использованной литературы.

Во введении диссертации дан краткий обзор прежних результатов в данном направлении и приведено краткое содержание диссертации.

**Глава 1** посвящена выпуклым многогранникам и их алгоритмам вычисления.

**В параграфе 1.1** рассмотрена следующая задача.

Для заданного множества $D$ и для каждого $P \neq 0$ найти все граничные подмножества $D_P$.

Чтобы описать решение этой задачи приведены основные определения, принятые в теории линейных неравенств, и их геометрическая интерпретация.

**В параграфе 1.2** рассмотрены нормальные конусы и конус задачи, а также дана *выпуклая линейная оболочка* $\Delta$ множества $D$:

$$\Delta = \{Q:\ Q = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j Q_j;\ \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_s \geq 0, \sum_{j=1}^{s} \lambda_j = 1,\ Q_j \in D\}.$$

Всегда $M = \overline{\Delta}$, где $\overline{\Delta}$ обозначает замыкание множества $\Delta$. Выпуклая оболочка $\Delta$ называется *политопом* (многовершинником). Для конечного множества $D$ имеем $\Delta = \overline{\Delta}$, т.е. выпуклая оболочка $\Delta$ совпадает с многогранником $M$.

**Теорема 1.1**. *Непустое множество $M$ из $\mathrm{IR}^n$ является политопом тогда и только тогда, когда оно представляет собой ограниченное многогранное множество.*

**В параграфе 1.3** предложен алгоритм, дающий ответ на задачу выделения всех укорочений и их нормальных конусов, т.е. перечень всех пар

$$D_i^{(d)} = [j_1, \ldots, j_l], \quad K_i^{(d)} = [i_1, \ldots, i_k].$$

Этот алгоритм состоит из следующих этапов:

1) составление линейных неравенств, определяющих конусы $\overline{K}(Q_j)$;

2) решение этих неравенств;

3) составление таблицы соответствий;

4) построение структурной диаграммы граней и двойственной структурной диаграммы.

Также приведены свойства таблицы соответствий

**В параграфе 1.4** дана вычислительная схема, определяющая все граничные подмножества $D_j^{(d)}$ конечного множества точек $D$ и их нормальных конусов $K_j^{(d)}$. Вычислительная схема реализована в виде программы для компьютеров.

Результатом работы программы являются вычисленные:

1) размерность подпространства, в котором лежит исследуемое множество точек;

2) множество векторов нормалей к гиперграням (координаты векторов имеют наибольший общий делитель равный единице) и помечены значком "!";

3) вектора пересечения нормальных конусов с конусом задачи и помечены значком "*";

4) таблица соответствий;

5) столбцы матрицы соответствий, помеченные буквой $V$, отвечают вершинам, нормальные конуса которых пересекаются с конусом задачи, остальные столбцы помечены буквой "d";

6) диаграмма граней в виде списка граней с номерами входящих в них точек и номерами надграней, пересечением которых образована данная грань

**В главе 2** приведена классификация особенностей алгебраических кривых и их алгоритм нахождения. Цель этой главы - дать достаточно простой для использования критерий определения особых многообразий плоских механизмов с несколькими степенями свободы, позволяющий найти все особые многообразия для конкретного механизма, дать их полную классификацию и описать количественно само особое многообразие.

В параграфе 2.1 определяются укорочения полиномов и изучаются те свойства этих укорочений, которые используются для укорочения систем алгебраических уравнений.

В параграфе 2.2 приведена *геометрическая интерпретация* укорочений и конусов. Каждому одночлену $a_j X^{Q_j}$ из суммы $f(X) = \sum_{j=1}^{s} a_j x_1^{q_{j1}} \cdots x_n^{q_{jn}}$, где $X^{Q_j} = x_1^{q_{j_1}} \cdots x_n^{q_{j_n}}$ поставим в соответствие точку $Q_j$ в $n$-мерном вещественном пространстве $\mathrm{IR}^n$. Совокупность всех таких точек

$D(f) = \{Q : a_j \neq 0\} = \{Q_j\}$ называется *носителем многочлена* $f$.

Пусть $\mathrm{IR}_*^n$ - пространство, сопряженное к пространству $\mathrm{IR}^n$ и $P \in \mathrm{IR}_*^n$. Укорочение по порядку $P$ характеризуется тем, что $\langle P, Q_j \rangle = c,$ для тех слагаемых $a_j X^{Q_j}$, которые входят в укорочение; а для тех членов, которые не входят в укорочение, $\langle P, Q_j \rangle < c.$ Каждому граничному подмножеству $D_P = D_k^{(d)}$ множества $D$ соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}_k^{(d)}(X) = \sum a_j X^{Q_j}, \qquad Q_j \in D_k^{(d)}.$$

Он дает первое приближение многочлена $f(X)$ на кривых вида $x_i = b_i \tau^{p_i}(1 + o(1)), \ \sum p_i^2 \neq 0, \ i = 1, \ldots, n$ с $P \in K_k^{(d)}$. При этом многогранник $M = M(f)$, являющейся выпуклой оболочкой носителя $D$ многочлена $f$, называется *многогранником Ньютона*.

**В параграфе 2.3** приведено понятие особого положения и особого многообразия. В механизмах с одной степенью свободы говорят об особых положениях механизма, а сами особые положения соответствуют некоторым фиксированным углам ведущего звена или длинам.

В механизмах с несколькими степенями свободы потеря одной степени свободы или ее приобретение, с чем обычно связывают попадание в особую конфигурацию, не означает остановки механизма. Механизм, попав в особую конфигурацию, может оставаться в ней неограниченно долго, продолжая при этом движение. В сущности, это будет другой механизм, полученный из предыдущего при некоторых условиях, и имеющий на одну или несколько степеней свободы меньше. В качестве *особого положения* у такого механизма возможна функция, в общем случае, от нескольких переменных. Эти функции, описывающие положения механизма с несколькими степенями свободы, находящегося в особой конфигурации, мы будем называть *особыми многообразиями* механизма.

**Параграф 2.4** посвящен изучению функции положения плоских механизмов как с одной, так и с несколькими степенями свободы. Задача о функции положения плоских механизмов с несколькими степенеями свободы давно привлекает исследователей в области теории механизмов. Суть этой задачи заключается в определении положений всех ведомых звеньев механизма по заданному положению ведущих звеньев. С математической точки зрения эта задача включает в себя два основных этапа:

**А.** *Составление по заданной схеме механизма полной системы уравнений связей. Обычно это система нелинейных алгебраических уравнений.*

**Б.** *Решение полученной системы уравнений связей.*

**В параграфе 2.5** приведена класификация особенностей, возникающих в механизмах. Особые точки функции положение разбита на два типа. Вблизи особой точки первого типа $n$-мерное решение системы

$$F_i(U,V) \overset{def}{=} F_i(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n}) = 0,\ i=\overline{1,m},\quad n<m$$

можно представить в виде сходящихся рядов. Вблизи особой точки второго типа (мертвое положение механизма), такое представление невозможно, т.е. в этом случае не выполняется условие, теоремы о неявных функций, но методом многогранников Ньютона можно получить решение в виде степенных рядов $x_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\tau^{p_{ij}},\ \ i=\overline{1,m},$ по дополнительным параметрам $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$.

В главе 3 предложено локальное представление функции положения в окрестности особой точки в виде сходящихся рядов некоторых механизмов используемых в робототехнике. Указанное представление получено с помощью нового для теории механизмов метода, известного под названием "Метод многогранников Ньютона". Этот метод универсален, так как позволяет получить представление функции положения к в регулярных, так и в нерегулярных точках, что невозможно сделать, используя, например, ряд Тейлора.

В параграфе 3.1 рассматривается плоский пятизвенный механизм.

**Теорема 3.1.** *Пятизвенный механизм имеет особенность второго типа, толька если его параметры удовлетворяют хотя бы одному из* $2^4$ *уравнений*

$$\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3 + \delta_4 l_4 = a, \quad \text{где} \quad \delta_i = \pm 1.$$

**Теорема 3.2.** *У системы*

$$\begin{cases} f_1 \overset{\mathrm{def}}{=} x_o^2 + y_o^2 - l_1^2 = 0, \\ f_2 \overset{\mathrm{def}}{=} (x_1 - x_o)^2 + (y_1 - y_o)^2 - l_2^2 = 0, \\ f_3 \overset{\mathrm{def}}{=} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_3^2 = 0, \\ f_4 \overset{\mathrm{def}}{=} (x_2 - a)^2 + y_2^2 - l_4^2 = 0 \end{cases}$$

*особые решения второго типа являются изолированными среди всех ее решений в случаях*

$$\begin{array}{ll} l_1 - l_2 - l_3 - l_4 = a, & -l_1 + l_2 - l_3 - l_4 = a, \\ -l_1 - l_2 + l_3 - l_4 = a, & -l_1 - l_2 - l_3 + l_4 = a, \\ l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = a & \end{array}$$

*и лежат на одномерном множестве решений в случаях*

$$\begin{array}{ll} l_1 + l_2 + l_3 - l_4 = a, & -l_1 - l_2 + l_3 + l_4 = a, \\ l_1 - l_2 - l_3 + l_4 = a, & l_1 + l_2 - l_3 + l_4 = a, \\ -l_1 + l_2 - l_3 + l_4 = a, & l_1 - l_2 + l_3 - l_4 = a, \\ l_1 - l_2 + l_3 + l_4 = a, & -l_1 + l_2 + l_3 - l_4 = a, \\ l_1 + l_2 - l_3 - l_4 = a, & -l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = a. \end{array}$$

В параграфе 3.2 рассматривается механизм с тремя степенями свободы.

**Теорема 3.3.** *Плоский механизм с тремя степенями свободы при условии* $l_i \neq 0 \ (i = 1,2,3)$ *не имеет особого положения второго типа.*

В параграфе 3.3 рассматривается плоский четырехзвенник с гидроцилиндрами. Найдены все особые положении, и доказана теорема, что этот механизм не имеет особые точки второго типа.

В параграфе 3.4 рассматривается плоский трехзвенник в окрестности особой точки $\mathrm{P}^* = \{\ell_1^0, 0, \ell_1^0, \ell_2^0\}$. Получены локальные представления функции положения вида (см. рис. 3.12): $x = \ell_1^0 - \dfrac{\ell_1^0 + \ell_2^0}{4\ell_1^0 \ell_2^0} y^2 + o(y^2)$, и при значениях $\ell_1^0 = 8, \ell_2^0 = 2, a = 6$ получена вещественная ветвь $\mathrm{F}$: $x = 8 - \dfrac{5}{32} y^2 + o(y^2)$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе рассмотрена классификация особенностей функции положения механизмов выражаемых алгебраическими кривыми и алгоритм вычисления особенностей этих кривых.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, излагается постановка задачи, приведена краткая аннотация известных результатов и перечислены полученные нами новые научные результаты.

В первой, второй и третьей главах получены основные результаты, которые являются новыми, важными и состоят в следующем:

- показано, что уравнения связей исследуемых механизмов описываются системой нелинейных алгебраических уравнений вида: $F_i(U,V) \overset{def}{=} F_i(x_1,\dots,x_m,x_{m+1},\dots,x_{m+n}) = 0,\ i=\overline{1,m},\quad n<m$ где $U=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ и $V=(x_{m+1},\dots,x_{m+n})$ - соответсвенные координаты положения и управления, а $F_i$ - многочлены;
- найдены классификации особых точек функции положения механизмов;
- приведен алгоритм вычисления особенностей для всех особенностей первого и второго типа;
- доказано, что пятизвенный механизм имеет особенность второго типа, только если его параметры удовлетворяют хотя бы одному из $2^4$ уравнений $\delta_1 l_1+\delta_2 l_2+\delta_3 l_3+\delta_4 l_4 = a,\quad где\quad \delta_i=\pm 1$;
- доказано, что плоский механизм с тремя степенями свободы при условии $l_i \neq 0\ (i=1,2,3)$ не имеет особого положения второго типа;
- для плоского четырехзвенника с гидроцилиндрами найдены все особые положении, и доказано, что этот механизм не имеет особых точек второго типа;
- доказано, что плоский механизм с двумя степенями свободы при условии $l_i > 0\ (i=1,2)$ не имеет особой точки второго типа и получена локальное представление при конкретных значениях параметров.

– для плоского трехзвенника в окрестности особой точки $\mathrm{P}^* = \{\ \ell_1^0, 0, \ell_1^0, \ell_2^0\}$ при значениях $\ell_1^0 = 8, \ell_2^0 = 2, a = 6$ получена вещественная ветвь $\mathrm{F}$: $x = 8 - \frac{5}{32} y^2 + o(y^2)$.

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


1. Солеев А., Баротов А.С. Локальное представление в малой окрестности особой точки функции положения робототехнических механизмов // Узб. журн. Проблемы механики, -Ташкент, 2000, -№ 3, -С. 4-8.
2. Солеев А., Баротов А.С. Локальное представление функции положения плоского механизма окрестности особой точки // Узб. журн. Проблемы механики, 2000, -№ 6, -С. 13-18.
3. Солеев А., Баротов А.С. Алгебраические аспекты особенностей робототехнических механизмов // ДАН РУз. –Ташкент, 2000, -№ 12, -С. 17-20.
4. Солеев А., Баротов А.С. Особые положения робототехнических механизмов и многогранники Ньютона // Тезисы конф. «CASC-2000» -Самарканд, октябрь, 2000. -С. 90-92.
5. Soleev A., Barotov A.S. The method of Newton polyhedra for investigating singular positions of some mechanisms // CASC - 2001. Konstanz, Germany. 2001. -P. 491-498.
6. Баротов А.С. Анализ особенностей функции положения плоских механизмов // Тезисы Республиканской научно-практической конференции «Технические науки и глобальные проблемы XXI века», Ташкент, 17-18 мая, 2001. -С. 79-81.
7. Баротов А.С., Солеев А. Точное представление функции положения механизма с тремя степенями свободы // Труды международной конференции «Инновация-2001», Ташкент, ноябрь, 2001. 3с.
8. Баротов А.С. Многогранники Ньютона и особенности функции положения механизмов // Труды международной конференции «Инновация-2002», -Ташкент, ноябрь, 2002. 3с.
9. Баротов А.С. Разрешение особенностей алгебраических кривых возникающих в робототехнике // Abstracts of Plenary and Invited Lectures of International School and Conference on Foliations, Dynamical Systems, Singularity Theory and Perverse Sheaves, 6 - 21 October 2009. - Samarkand, printed by Samarkand State University, 2010, pp. 126-129.
10. Баротов А.С. Алгоритм вычисления особенностей алгебраических кривых возникающих в робототехнике // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2011.- № 1. –с.11-20.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Баротов Адизжон Садиевичнинг 01.01.07 –“ҳисоблаш математикаси” ихтисослиги бўйича «**Алгебраик чизиқларнинг махсусликларини таснифлаш ва уларни ҳисоблаш алгоритми»** мавзусидаги диссертациясининг

## РЕЗЮМЕСИ

**Калит сўзлар:** алгебраик чизиқ, махсуслик, ҳолат функцияси, ҳолат ва бошқариш координаталари, Ньютон кўпёқлиги, нормал конус, қисқартирилган система, асимптотик ечимлар, текис механизмлар.

**Тадқиқот объекти:** механизмнинг ҳолат функцияси, механизмларнинг боғланиш тенгламалари, механизимларнинг махсус ҳолатлари ва Ньютон кўпёқлиги.

**Ишнинг мақсади:** алгебраик чизиқлар билан ифодаланадиган механизмлар ҳолат функцияларининг махсус ҳолатларини таснифлаш ва уларни ҳисоблаш алгоритмини қуриш.

**Тадқиқот усули:** ишда ҳисоблаш математикаси, чизиқли алгебра, даражали геометрия методларидан, ҳамда махсусликларни ҳисоблаш алгоритмларидан фойдаланилди.

**Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги:** ишда алгебраик чизиқлар билан ифодаланадиган механизмлар ҳолат функцияларининг махсус ҳолатларини таснифланган. Механизмлар ҳолат функцияларини махсусликларини ҳисоблаш алгоритмлари қурилган. Иккита ва учта эркинлик даражасига эга бўлган текис механизмларнинг, уч ва тўрт бўғинли текис механизмларнинг махсус ҳолатлари атрофида локал тасвири топилган.

**Амалий аҳамияти:** диссертация илмий-амалий аҳамиятга эга.

**Қўлланиш соҳаси:** диссертация ишининг натижалари алгебраик чизиқларнинг махсусликлари назариясининг ривожланишида, механизмлар конструкциясида юзага келадиган махсус ҳолатларни бартараф этишда, автомат ва полуавтомат роботларни яратишда ва бошқа назарий ҳамда амалий масалаларда ишлатилиши мумкин.

# РЕЗЮМЕ

диссертации Баротова Адизжона Садиевича на тему «Классификация особенностей алгебраических кривых и их алгоритм вычисления» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 – “вычислительная математика”.

**Ключевые слова:** алгебраические кривые, функции положения, координаты положения и управления, Многогранник Ньютона, нормальный конус, укороченная система, асимптотическое решение, плоские механизмы.

**Объекты исследования:** объектом исследования являются функции положения механизмов, уравнения связей этих механизмов, особые положения этих механизмов и их алгоритмы вычисления, многогранники Ньютона.

**Цель работы:** описание уравнения связей исследуемых механизмов при помощи системы нелинейных алгебраических уравнений. Классификация особых точек функции положения механизмов. Построение алгоритма вычисления особенностей функции положения механизмов. Исследование особенностей пятизвенного механизма, плоского механизма с тремя степенями свободы и плоского четырехзвенника с гидроцилиндрами.

**Методы исследования:** в работе применяется методы вычислительной математики, линейной алгебры и степенной геометрии, а также алгоритмы нахождения особенностей кривых.

**Полученные результаты и их новизна:** В работе получена классификация особенностей функции положения механизмов выражаемых алгебраическими кривыми. Построены алгоритмы вычисления особых положений функции положения механизмов. Найдены локальные представления функции положения плоского механизма с двумя и стремя степенями свободы.

**Практическая значимость:** результаты диссертации носят научно-практический характер.

**Область применения:** полученные в диссертации результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории особенностей алгебраических кривых, в задачах, возникающих при исследовании и проектировании механизмов, при создании автоматических и полуавтоматических роботов и в других теоретических и прикладных задачах.

## RESUME

Thesis of Barotov Adizjon Sadievich on the scientific degree competition of the candidate of physics and mathematics science, specialty 01.01.07 – “computational mathematics” subject: **“Classification of singularity of algebraic curves and their algorithm of computation”.**

**Key words:** algebraic curves, function of position, coordinates of position and control, Newton’s polyhedron, normal cone, shortened system, asymptotic solution, planar mechanisms.

**Subject for inquiry:** functions of positions of mechanisms, connections equations of these mechanisms, singular positions of mechanisms and their algorithm of computation, Newton’s polyhedron.

**Aim of the inquiry:** description of connections equations of mechanisms with the help of a system of nonlinear algebraic equations. Classification singular points of the position function of mechanisms. Construction of algorthm for computation of singularities of the position function of mechanisms. Investigation of singularities fiflink mechnisms, plane mechanism with three degrees of freedom and plane fourlink with hydrosilindrs.

**Methods of inquiry:** in the work methods of computational mathematics, linear algebra and exponential geometry, and algorithms of finding of singularities of curves are applied.

**The results achieved and their novelty:** classification of singularities of position function of mechanisms which are expressed by algebraic curves is obtained. The algorithm for computation of singular positions of position functions of mechanisms is constructed. Local presentations of position function of plane mechanisms with two and three degrees of freedom are found.

**Practical value:** the results of the dissertation have scientific-applied character.

**Sphere of usage:** the results of the present dissertation work may be used in the further development of the theory of singularities of algebraic curves, in problems which appear in investigations and design of mechanisms, in creation automatic and semiautomatic robots and in other theoretical and practical problems.

СОИСКАТЕЛЬ: