

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
имени МИРЗО УЛУГБЕКА**

На правах рукописи
УДК 517.98

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович

**ИЗМЕРИМЫЕ РАССЛОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ К ОПЕРАТОРНЫМ АЛГЕБРАМ И
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯМ**

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2008

Работа выполнена в отделе «Алгебра и анализ» института Математики и информационных технологий Академии Наук Республики Узбекистан

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Узбекистан Аюпов Шавкат Абдуллаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент Абдуллаев Рустамбай Зайирович, доктор физико-математических наук, доцент Джалилов Ахтам Абдурахманович, доктор физико-математических наук, Рахимов Абдугафур Абдумажидович.

Ведущая организация – Южный математический институт
Владикавказского научного центра
РАН

Защита состоится «___» _____ 2008 г. в _____ часов на заседании объединенного специализированного совета Д 067.02.03 при Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека по адресу: 700174, г.Ташкент, ВУЗ городок, Национальный Университет Узбекистана, механико-математический факультет, ауд. Г – 303.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат разослан «___» _____ 2008 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических наук А.А. Абдушукуров 2

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Развитие теории решеточно-нормированных

пространств восходит к работам Л.В. Канторовича середины 30-х годов прошлого века. Важнейшим классом решеточно-нормированных пространств являются пространства Банаха – Канторовича. Впервые эти пространства были рассмотрены Л.В. Канторовичем. В середине прошлого века исследованию свойств этих пространств были посвящены работы Б.З.

Вулиха, А.Г.Пинскера, Г.П.Акилова и других. В последнее время исследованиям в этой области посвящены работы А.Г. Кусраева, С.С. Кутателадзе, А.Е. Гутмана, В.И. Чилина, И.Г. Ганиева и других. В начале 80-х годов XX века в работах А.Г. Кусраева была получена булевозначная реализация пространств и решеток Банаха – Канторовича. В частности, им было доказано одно из важных свойств таких пространств о том, что всякое K пространство Банаха – Канторовича над расширенным -пространством K является модулем над -пространством и модульные операции согласованы с векторной нормой пространства. В 60-х годах прошлого века в работах Т.А. Сарымсакова были заложены основы теории топологических полуполей – K специального класса -пространств, которая нашла многие приложения в топологии, функциональном анализе, теории вероятностей. Важным инструментом при изучении модулей Банаха – Канторовича, наряду с булевозначным анализом стала теория непрерывных и измеримых банаховых расслоений. В начале 90-х годов прошлого века в работах А.Е. Гутмана было дано представление пространств Банаха – Канторовича в виде измеримых банаховых расслоений с лифтингом и это дало возможность представления различных классов операторов, действующих в абстрактных векторных решетках.

Техника измеримых банаховых расслоений позволила В.И. Чилину и И.Г. Ганиеву представить решетки Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения банаховых решеток, а также булевы алгебры с векторнозначной мерой в виде измеримого расслоения булевых алгебр с числовыми мерами. С помощью таких представлений удалось получить варианты индивидуальных эргодических теорем для сжатий в L_p -пространствах, построенных по полной булевой алгебре с мерой со значениями в кольце измеримых функций.

В связи с развитием общей теории пространств Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций возникла необходимость исследования таких подмножеств в них, которые обладают тем или иным свойством компактности. К сожалению, компактность в общепринятом топологическом смысле не обеспечивает справедливость тех свойств в пространствах Банаха – Канторовича, которые были бы аналогичны соответствующим свойствам в банаховых пространствах. Это послужило причиной введения нового класса

множества и оператора было введено А.Г. Кусраевым. В работах А.Г. Кусраева был получен общий вид самосопряженного циклически компактного оператора в модулях Гильберта – Капланского. Оставался открытым вопрос о представлении циклически компактных операторов в виде измеримого расслоения компактных линейных ∇ операторов, а также -фредгольмовых операторов в виде измеримого расслоения Фредгольмовых операторов.

Структурная теория C^* -модулей начинается с работ И. Капланского, использовавшего эти объекты для алгебраического подхода к теории W^* -алгебр. Рассмотрение C -алгебр, AW^* -алгебр и W^* -алгебр как модулей над их центрами, позволили использовать методы булевозначного анализа для описания различных свойств указанных классов $*$ -алгебр.

C^* -модули являются полезными примерами модулей Банаха – Канторовича. В работах В.И. Чилина, И.Г. Ганиева было получено C^* представление -модулей над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения классических C^* -алгебр, что дает возможность получать свойства -модулей с помощью "склейки" соответствующих C^* свойств -алгебр над полем комплексных чисел.

Естественным образом возникает вопрос о реализации -алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского (теорема Гельфанда – Наймарка и Гельфанда – Наймарка – Сигала).

Изучение дифференцирований операторных алгебр начинается с работы И. Капланского, доказавшего, что всякое дифференцирование AW^* - алгебры типа I является внутренним. В этой же работе И. Капланский сформулировал проблему о том, что всякое дифференцирование алгебры фон Неймана должно быть внутренним. Эта проблема была решена в работах С.

Сакаи. Дифференцирования на C^* -алгебрах и алгебрах фон Неймана исследованы в монографиях Сакаи. Всестороннее рассмотрение дифференцирований в общих банаховых алгебрах дано в монографии Г. Дейлса, где детально изучены условия, гарантирующие автоматическую непрерывность дифференцирований на различных банаховых алгебрах.

Пусть A – некоторая алгебра. Линейный оператор $D : A \rightarrow A$ называется дифференцированием, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет дифференцирование

$$(x) D_x a x = -a, \quad D_x a = -a, \quad D_x a = -a$$

по правилу Дифференцирования вида a

называются *внутренними*. Если элемент a , порождающий $D_a B$,

дифференцирование, принадлежит более широкой алгебре содержащей A , то называется *пространственным* дифференцированием. D_a

4

Следующие результаты являются наиболее известными:

а) Если A – коммутативная C^* -алгебра, то всякое дифференцирование на A тождественно равно нулю.

б) Если D – дифференцирование на C^* -алгебре A , то D – непрерывно по норме.

в) Если A – алгебра фон Неймана, то любое дифференцирование на A является внутренним.

Развитие теории некоммутативного интегрирования восходит к работе $S M()$

И. Сигала, в которой было начато изучение алгебры – всех измеримых операторов, присоединенных к алгебре M . В 2000 году Ш.А. фон Неймана

Аюповым была сформулирована проблема о возможности распространения $M L (0 1)^\infty = ;$

результатов а), б), в), для случая алгебры $S M()$. Если M – алгебра $(0 1) ; , S M()$

всех комплексных ограниченных измеримых функций на то ${}^0 L (0 1) ;$

изоморфна – алгебре всех комплексных измеримых функций на

$(0 1) ; .$

Кусраева было доказано, что алгебра

В 2004 году в работе А.Ф. Бера, Ф.А.

допускает нетривиальные

Сукочева, В.И. Чилина и в 2005

дифференцирования.

году независимо в работе А.Г.

${}^0 L (0 1) ;$

Таким образом, структура дифференцирований алгебры $S M()$, существенно отличается от случая дифференцирований алгебр фон Неймана. Имеется ряд других важных классов алгебр неограниченных операторов, имеющих

приложения как в функциональном анализе так и EW^*

математической физике: O^* -алгебры, GB^* -алгебры, -алгебры и др.

Интересными примерами упомянутых алгебр являются некоммутативные алгебры Аренса.

В связи с этим актуальной является проблема описания дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана (и её некоторых подалгебр), а также некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Диссертационная работа посвящена решению вышеназванных проблем.

Степень изученности проблемы. В середине 90-годов прошлого века в работах А.Е. Гутмана было введено понятие векторнозначного лифтинга и доказано, что всякое пространство Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций представляется в виде измеримого банахово расслоения с векторнозначным лифтингом. В работах В.И. Чилина и И.Г. Ганиева было получено представление некоммутативных L_p -пространств, ассоциированных с конечной алгеброй фон Неймана и с центрозначным следом в виде измеримого расслоения некоммутативных L_p -пространств, ассоциированных с числовым следом.

5

В 2004 году в работе А.Ф. Бера, Ф.А. Сукочева, В.И. Чилина были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований в коммутативных регулярных алгебрах. В частности, было показано, что алгебра ${}^0 L(0, 1)$; допускает нетривиальные дифференцирования; более того, линейное пространство всех дифференцирований на ${}^0 L(0, 1)$; имеет несчетный базис. В работах А.Г. Кусраева методами булевозначного анализа были получены необходимые и достаточные условия существования нетривиальных дифференцирований и автоморфизмов в расширенных f -алгебрах. В частности, также было показано, что алгебра ${}^0 L(0, 1)$; допускает нетривиальные дифференцирования и автоморфизмы. В 2006 году в работе М. Уейта была доказана непрерывность в топологии сходимости по мере дифференцирований алгебры измеримых операторов, присоединенных к атомической алгебре фон Неймана.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР.

Исследования проводились по гранту Ф.1.1.3 программы фундаментальных исследований ИФ «Математика, механика, информатика». **Цель исследования.** Целью диссертационной работы является решение перечисленных выше проблем теории измеримых расслоений *C линейных операторов, $\mathcal{A}$ -модулей над кольцом измеримых функций и дифференцирований алгебр неограниченных операторов.

*C

Задачи исследования. Реализация $\mathcal{A}$ -алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского и описание дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана и её некоторых подалгебр. **Объекты и предмет исследования:** модули Банаха – Канторовича,

*C

$\mathcal{A}$ -алгебры, алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры

Аренса, дифференцирования.

Методы исследования. Применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории операторных алгебр.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. векторный вариант критерия Никольского ∇ -фредгольмовости для операторов на модулях Банаха – Канторовича;
2. принцип равномерной ограниченности для операторов на модулях Банаха – Канторовича;

*C

3. представление коммутативных унитарных ∇ -алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебры непрерывных сохраняющих

0L ;

перемешивания отображений на циклических компактах со значениями в

4. ГНС-представление ∇ -алгебр над ${}^*C({}^0L)$;

5. общий вид дифференцирований алгебры локально измеримых операторов,

6

присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр; 6. полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты: – доказано, что всякий циклически компактный оператор на модуле Банаха – Канторовича над 0L представляется в виде измеримого расслоения компактных линейных операторов;

∇

– доказано, что всякий ∇ -фредгольмов оператор представляется в виде измеримого расслоения фредгольмовых операторов;

– получен принцип равномерной ограниченности для операторов на модулях Банаха – Канторовича;

*C

– доказано, что коммутативная унитарная ∇ -алгебра над кольцом измеримых функций изометрически * -изоморфна алгебре непрерывных сохраняющих перемешивания отображений на циклических компактах со значениями 0L ;

ми в

– доказано, что всякая ∇ -алгебра над ${}^*C({}^0L)$ изометрически * -изоморфна замкнутой подалгебре алгебры всех 0L -ограниченных 0L -линейных операторов на модуле Гильберта – Капланского над 0L ;

– найден общий вид дифференцирований алгебры локально измеримых

операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр;

– получено полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Научная и практическая значимость результатов исследования. В работе получено решение важных проблем теории операторов на модулях Гильберта – Капланского и теории дифференцирований на неограниченных операторных алгебрах. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследованиях по функциональному анализу, теории операторных алгебр, а также в алгебраическом обосновании квантовой статистической механики.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» (Институт Математики и информационных технологии АН РУз, руководитель: академик Ш.А. Аюпов), на городском семинаре по функциональному анализу (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: проф. В.И. Чилин), на семинаре кафедры алгебра и функциональный анализ (Национальный Университет Узбекистана, руководитель: академик Ш.А. Аюпов), на городском семинаре по комплексному анализу (Национальный Университет

7

Узбекистана, руководитель: академик А.С. Садуллаев), во время научных командировок в институт прикладной математики университета Бонна (Германия, 2006, 2007), на международной научной конференции «Операторные алгебры и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2005), на международной конференции «Порядковый анализ» (Владикавказ, Россия, 2006), на республиканской конференции «Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа» (Нукус, 2006).

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[31]. В работах [11], [13], [18] постановка задач принадлежит Ш.А. Аюпову, в работах [14], [16], [17], [19], [20], [21],[22] постановка задач принадлежит С. Альбеверио и Ш.А. Аюпову, в работах [1], [3], [4], [5], [7] постановка задач принадлежит И.Г. Ганиеву, в работах [12], [15] постановка задач принадлежит В.И. Чилину и И.Г. Ганиеву. Доказательства основных результатов, полученных в этих работах, принадлежат диссертанту.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 14 параграфов, заключения и 129 наименований использованной литературы. Полный объем диссертации – 213 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первом параграфе первой главы диссертации приводятся необходимые определения и результаты из теории меры, теорий решеточно нормированных пространств, измеримых банаховых расслоений и др.

Пусть (Ω, Σ, μ) – измеримое пространство с мерой, обладающей свойством прямой суммы, а $L = L(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

Пусть X – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторое банахово пространство $X(\omega)$, где $X(\omega) \neq \{0\}$ для всех $\omega \in \Omega$. Сечением называется функция u , определенная почти всюду на Ω и принимающая значение $u(\omega) \in X(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$, где $\text{dom}(u)$ есть область определения u .

Пусть L – некоторое множество сечений.

Определение 1.1.6. Пара (X, L) называется *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω , если

- а) $\lambda_1 u + \lambda_2 v \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $u, v \in L$,
 где $(\lambda_1 u + \lambda_2 v)(\omega) = \lambda_1 u(\omega) + \lambda_2 v(\omega)$;
 б) функция $|u|$ измерима при всех $u \in L$;
 в) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{u(\omega) : u \in L\}$ плотно в $X(\omega)$.

$$X(\omega) = \overline{\text{span}} \left\{ \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} u_i(\omega) : n \in \mathbb{N}, u_i \in L, A_i \in \Sigma \right\}.$$

Сечение u называется *ступенчатым*, если

$$u = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} u_i, \quad u_i \in L, A_i \in \Sigma, \quad \text{где } \sum_{i=1}^n \mu(A_i) < \infty.$$

Сечение u называется *измеримым*, если для всякого $A \in \Sigma, \mu(A) < \infty$ найдется такая последовательность ступенчатых

сечений, что $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} u_n \rightarrow u$ для почти всех $\omega \in A$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} u_n \rightarrow u \quad \text{в } L^1(\mu).$$

Пусть $M(X)$ – множество всех измеримых сечений. Символом $L^1(X)$

Тогда K_ω – компакт для почти всех $\omega \in \Omega$, при этом

$$^0 K x L X x K \{ () () \text{ для почти всех } \} = \in \Omega, : \in \omega \omega_\omega \in \Omega.$$

В третьем параграфе первой главы выясняется структура модулей над кольцом измеримых функций, которые представляются как измеримое расслоение конечномерных пространств.

Определение 1.3.1. Говорят, что модуль E над $^0 L$ конечно порожденный, если в E существует конечное число элементов $x_1, x_2, \dots$, таких, что всякое $x \in E$ можно представить в виде $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, где $\lambda_i \in L$. Модуль E над $^0 L$ называется σ -конечно-порожденным, если существует такое разбиение $\{ \} \Pi_n$ единицы в ∇ , что каждый модуль $\Pi_n E$ – конечно-порожденный.

Основным результатом этого параграфа является следующая **Теорема 1.3.2.** Модуль $^0 L () \Omega, X - \sigma$ -конечно-порожден в том и только в том случае, когда $X () \omega$ – конечномерен для почти всех $\omega \in \Omega$. Вторая глава посвящена измеримым расслоениям ограниченных и компактных линейных операторов и доказательству с их помощью аналогов основных принципов функционального анализа для модулей Банаха – Канторовича.

В первом параграфе второй главы изучены измеримые расслоения ограниченных и компактных линейных операторов.

$$X Y \Omega$$

Пусть и измеримые банаховы расслоения над Ω с лифтингами $l, \{ () (T X Y_\omega : \rightarrow \omega \omega) \}$ – измеримое расслоение

$$x^l Y$$

и соответственно,

ограниченных операторов, т.е. $Tx M Y (()) ()_\omega \omega \in \Omega$, для любого $x \in \Omega, M X ()$. Равенство

$$T u T u () (()) \$ = \omega \omega (1)$$

определяет $^0 L$ -линейный оператор $^0 TL X L Y : \Omega, \rightarrow \Omega, () ()$ И.Г.Ганиевым было показано, что если $\{ () (T X Y) \}_\omega : \rightarrow \omega \omega$ – измеримое расслоение ограниченных линейных операторов такое, что

функция $B X Y (()) \omega_\omega \omega \rightarrow$, измерима, то оператор T , заданный по правилу

(1), является 0L -ограниченным.

Следующий результат показывает, что требование 0

$${}^0L \text{ } \omega \omega, \in$$

является лишним при установлении ограниченности оператора T .

T

Предложение 2.1.1. Оператор, определенный равенством (1), является 0L -ограниченным.

Напомним, что 0L -линейный оператор ${}^0 TL X L Y: \Omega, \rightarrow \Omega, ()()$

называется циклически компактным, если образ всякого ограниченного множества в ${}^0 TL X L Y$ циклически компактен.

${}^0L(\Omega, X)$ является относительно

Следующий результат является основным результатом параграфа.

$${}^0 TL X L Y: \Omega, \rightarrow \Omega, ()()$$

Теорема 2.1.2. Пусть ${}^0 TL X L Y$ – циклически компактный оператор. Тогда существует измеримое

0L -линейный оператор. Тогда

расслоение компактных линейных операторов $\{()() TX Y_\omega: \rightarrow \omega, \omega, \omega\}$ такое, что $Tx T x ()() = \omega \omega$ для всех $x \in L X () \Omega, .$

Второй параграф второй главы посвящен векторному варианту теоремы Банаха об открытом операторе для операторов в пространствах Банаха – Канторовича и ее применениям к измеримым расслоениям операторов с замкнутой областью значений.

Для каждого 0L -линейного оператора ${}^0 TL X L Y: \Omega, \rightarrow \Omega, ()()$

положим $ke x L X () \{()()\} = : \in \Omega, .$

Теорема 2.2.1. Пусть ${}^0 TL X L Y: \Omega, \rightarrow \Omega, ()()$ 0L -ограниченный ${}^0L^{-1} T^{-0} L$ -

линейный оператор, $\ker 0 T = , {}^0 RT L Y ()() = \Omega, .$ Тогда является ограниченным оператором.

${}^0 r L \in r 0$ означает, что $r() 0 \omega >$ для почти

Для элемента запись 0 всех $\omega \in \Omega.$

Положим 0 ${}_1 BX x L X () \{()()\} = \in \Omega, : \leq 1$

Следующий результат является векторным вариантом теоремы Банаха об открытом операторе для операторов в модулях Банаха – Канторовича.

Теорема 2.2.2. Пусть $T: X \rightarrow Y$ – L -ограниченный L -линейный оператор

и $RT: Y \rightarrow X$ – L -линейный оператор. Тогда существует элемент $r \in L$, такой, что

такой, что

Третий параграф второй главы посвящен вариантам классической теоремы Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности и ее применениям.

Следующий результат показывает, что если семейство L -ограниченных L -линейных операторов, действующих в ПБК над L ,

11

ограничено поточечно, то оно равномерно ограничено.

Теорема 2.3.1. Пусть F – семейство L -ограниченных L -линейных операторов из $L(X, Y)$. Если для всякого

$$x \in X, \exists y \in Y$$

существует

$$\sup \{ \|Tx\| : x \in X \} < \infty,$$

то существует

$$\sup \{ \|Tx\| : x \in X \} < \infty.$$

В четвертом параграфе второй главы исследуется измеримое расслоение Фредгольмовых операторов.

Пусть $T: X \rightarrow Y$ – L -ограниченный L -линейный оператор, T^* – сопряженный оператор.

Рассмотрим однородные уравнения

$$Tx = 0, T^*y = 0$$

и соответствующие основное и сопряженное уравнения

$$T_x y T_g f(0) = 0^* = 0.$$

$T \nabla$

Говорят, что для оператора справедлива *-альтернатива Фредгольма*, если существует счетное $\{ \} \Pi_n$ единицы в ∇ такое, разбиение что выполнены условия:

1) Однородное уравнение $0 \Pi T x() 0 =$ (сопряженное однородное уравнение) имеет единственное нулевое решение. Уравнение $0 \Pi T g() 0^* =^* =$ разрешимо и имеет

${}_0Tx y () \Pi = \Pi_0$ (соответственно ${}_0Tgf () \Pi \Pi_0$
единственное решение для любой правой части ${}_0yL Y \in (\Omega,)$ (соответственно
 ${}_0fL X ()^* \in \Omega,)$;

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ однородные уравнения $(\nabla^n T x = 0)$ и $(\nabla^n T g^* = 0)$ имеют по n линейно независимых решений $x_1, \dots, x_n$ и $g_1^*, \dots, g_n^*$; 3) основное уравнение (сопряженное уравнение) разрешимо в том и только в том случае, если $(\nabla^n T g^* = 0)$, $n = 1, 2, \dots$

12

((0), $\pi_{f, i, n, n}$, $\leq$ соответственно); 4) общее решение основного уравнения имеет вид

$$n$$

а общее решение сопряженного уравнения –

$$g_{gc} \Pi = + \sum_n \sum_{\infty} g_{, ,}^* , \quad ()$$

$$\begin{matrix} = & \\ 1 & \\ n & i \end{matrix}$$

где ${}_n x^*$ (соответственно ${}_n g^*$) – частное решение уравнения $(\) \Pi {}_n T x y =$ (соответственно $(\)$), где $\Pi {}_n T g f^* = {}^0, {}_{ni} c L i n n, \in, \leq \in$.

Следующий результат является векторным вариантом критерия Никольского фредгольмовости ограниченных линейных операторов в ПБК. **Теорема 2.4.2.**

Для ${}^0 L$ -ограниченного ${}^0 L$ -линейного оператора ${}^0 {}^0 T L X L Y : \Omega, \rightarrow \Omega, (\) (\)$ эквивалентны: следующие условия

- 1) операторы T_ω – Фредгольмовы для почти всех $\omega \in \Omega$;
- 2) оператор T является ∇ -Фредгольмовым;
- 3) существуют ${}^0 L$ -линейные операторы A и K из ${}^0 L (\) \Omega, X$ в ${}^0 L (\) \Omega, Y$ такие, что A – обратим, K – σ -конечно-порожден и $T A = + K$;
- 4) существуют ${}^0 L$ -линейные операторы A и K из ${}^0 L (\) \Omega, X$ в ${}^0 L (\) \Omega, Y$ такие, что A – обратим, K – циклически компактен и $T A = + K$.

В третьей главе результаты предыдущих глав применены для ${}^* C$ построения основ теории * -алгебр над кольцом измеримых функций и доказана теорема о реализации таких алгебр в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского (теоремы Гельфанда – Наймарка и Гельфанда – Наймарка – Сигала).

В первом параграфе третьей главы изучаются алгебры Банаха – Канторовича над ${}^0 L$ и свойства спектра элементов таких алгебр. U

Пусть U – произвольная алгебра над полем комплексных чисел и одновременно модуль над ${}^0 L$ для всех

${}^0 L$, причем $(\) (\) (\ \lambda u \ v \ u v \ u \ v = \lambda \ \lambda =$

${}^0 \lambda \in U, \in L \ u v \ U$. Рассмотрим на U некоторую ${}^0 L$ -значную норму $\|\cdot\|$, U

наделяющую структурой пространства Банаха – Канторовича, в

частности, $\|\cdot\|, \in U$.

$\|\cdot\|$ для всех ${}^0 \lambda \in$

U называется алгеброй Банаха – Канторовича над ${}^0 L$, если для всех $u v \in U$, $\in U$ имеет место соотношение: $\|u v\| = \|u\| \|v\|$. Если U алгебра

13

Банаха – Канторовича над ${}^0 L$ с единицей e такой, что $\|e\| = 1$ где e – 1

единица в U алгеброй Банаха – Канторовича.

${}^0 L$, то U назовем унитарной

Теорема 3.1.1. Для всякой алгебры Банаха – Канторовича U над ${}^0 L$ существует единственное с точностью до изоморфизма измеримое

расслоение банаховых алгебр (X, L) , с векторнозначным лифтингом

$U^0 L(\Omega, X)$ и такое, что изометрически изоморфна

$\{(\omega)(\omega)(\omega)\}(\omega) \lambda x x L X X \omega \omega^\infty : \omega \in \Omega$, для всех $\omega \in \Omega$. При этом, если U

унитальная алгебра, то для всех $\omega \in \Omega$.

$X(\omega)$ также унитальная алгебра

Во втором параграфе третьей главы изучаются представления коммутативных

C^* -алгебр над кольцом измеримых функций. $U^* U$

Пусть U – произвольная C^* -алгебра и L – алгебра Банаха –

Канторовича над L , $\lambda \in L, \lambda \in U$

$U^0 L$, причем $(\lambda u) \lambda u^{**} =$ для

Определение 3.2.1. U называется C^* -алгеброй над $U^0 L$, если для всех $u, v \in U$ имеет место соотношение²

$$u v u^* = \dots$$

$U^0 L$ -линейный функционал $f: U \rightarrow L$ называется: положительным ($f \geq 0$),

если $f(x x^*) \geq 0$ для всех $x \in U$; $U^0 L$ -состоянием, если $f \geq 0$ и $\|f\| = 1$

$U^0 L$ -состояние ϕ называется чистым, если из $\phi \geq \psi$, где $\psi - U^0 L$ -

линейный функционал, вытекает $\psi = \lambda \phi$ для некоторого $\lambda \in L, \lambda \geq 0$

Множество $F \subset U^*$ называется C^* -слабо циклически компактным, если F оно циклично и всякая сеть в F имеет циклическую подсеть, C^* -слабо сходящуюся к некоторой точке из F .

некоторой точке из

Через E_U обозначим множество всех $U^0 L$ -состояний на U .

Предложение 3.2.3. Пусть $U - C^*$ -алгебра над $U^0 L$. Тогда

(a) $E_U - C^*$ -слабо циклически компактно;

(b) если U коммутативна, то множество $K(U)$ всех чистых $U^0 L$ -состояний на U C^* -слабо циклически компактно.

Отображение $f: U \rightarrow K(U)$ называется сохраняющим перемешивания, если

$$\text{для произвольного разбиения единицы } \{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \text{ и } \{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I} \in K(U) \subset \sum_{\alpha \in I} e_\alpha \phi_\alpha = 1.$$

$$\sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha \phi_\alpha^*$$

имеет место $(f(e_\alpha))_{\alpha \in I} \in K(U)$

$$\sum_{\alpha \in I} f(e_\alpha) f(e_\alpha)^*$$

Рассмотрим на $K(U)$ C^* -слабую топологию, индуцированную из U^* .

Через ${}^0(()) \subset KUL_m$, обозначим множество всех непрерывных, сохраняющих перемешивания отображений из $K() \cup {}^0L$. Для каждого ${}^0(())_m f \in , \subset KUL$ положим

$$\|f\| = \sup \{ \|f(x)\| : x \in KU \}.$$

Рассмотрим в ${}^0(()) \subset KUL_m$, поточечные алгебраические операции и инволюцию.

Предложение 3.2.6. ${}^0(()) \subset KUL_m, \| \cdot \|$ является C -алгеброй над ${}^{*0}L$. Следующие две теоремы являются основными результатами главы, в них получена реализация C -алгебр над ${}^{*0}L$ в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского, а в коммутативном случае – в виде алгебры непрерывных сохраняющих перемешивания отображений на циклических компактах со значениями в 0L .

Теорема 3.2.1. Пусть U унитарная коммутативная C -алгебра над ${}^{*0}L$ и $K() \cup {}^0L$ множество всех чистых состояний на U . Тогда U изометрически $*$ -изоморфна алгебре $C(K() \cup {}^0L)_m$.

В третьем параграфе третьей главы изучается ГНС-представление C^* -алгебр над кольцом измеримых функций.

Пусть A – модуль Гильберта – Капланского над 0L . Пространство $B(A)$ всех 0L -ограниченных 0L -линейных операторов на A является C^* -алгеброй над 0L .

Следующий результат является векторным вариантом классической теоремы Гельфанда – Наймарка – Сигала.

Теорема 3.3.1. Если U – C^* -алгебра над 0L , то существует U изометрический $*$ -изоморфизм алгебры на некоторую замкнутую $*$ - $B(A)$ – некоторый модуль Гильберта – Капланского. подалгебру, где

В четвертой главе аппарат теории модулей Гильберта – Капланского применяется к исследованию дифференцирования на алгебрах неограниченных измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана. Здесь решена проблема описания дифференцирований для двух важных классов алгебр: алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I (и её некоторых подалгебр), а также для некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

В первом параграфе четвертой главы изучается алгебра локально измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана типа I. $H \subset B(H)$

Пусть H – гильбертово пространство, M – алгебра всех ограниченных линейных операторов, M – подалгебра действующих на

фон Неймана в $B(H)$, $P(M)$ – полная решетка всех ортопроекторов в M .

Напомним, что замкнутый линейный оператор x , действующий в

15

гильбертовом пространстве H , называется измеримым относительно алгебры фон Неймана M , если $x \eta M$ и $\mathcal{D}(x)$ является сильно плотным в H . $S(M)$

Обозначим через множество всех измеримых операторов, присоединенных к M .

Замкнутый линейный оператор x , действующий в гильбертовом пространстве H , называется локально измеримым относительно алгебры фон Неймана M , если $x \eta M$ и существует такая

последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M , что $z_n \uparrow 1$ и $(z_n x) S(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество всех локально измеримых операторов, присоединенных к M , является унитарной *-алгеброй

операций сильного сложения и умножения и перехода сопряженному оператору. При этом $S(M)$ является заполненной *-подалгеброй в $LS(M)$.

Пусть H – гильбертово пространство и ${}^0L(\cdot, \cdot)$ пространство классов эквивалентности измеримых отображений из Ω в H . ${}^0L(\cdot, \cdot)$ является модулем Гильберта – Капланского над 0L , а $L(\cdot, \cdot) H^{\infty} \Omega$ является модулем Гильберта – Капланского над $L(\cdot, \cdot)^{\infty} \Omega$. Через обозначим

алгебру всех операторов на ${}^0L(\cdot, \cdot) H^{\infty} \Omega$, а 0L -ограниченных 0L -линейных

через $BLH(\cdot, \cdot)$ алгебру всех ${}^{\infty} \Omega$ $L(\cdot, \cdot)^{\infty} \Omega$ -ограниченных -линейных $L(\cdot, \cdot)^{\infty}$

Ω

операторов $L(\cdot, \cdot) H^{\infty} \Omega$ на

Напомним, что алгебра фон Неймана M называется *типа I*, если она изоморфна алгебре фон Неймана с абелевым коммутантом. Известно, что если M алгебра фон Неймана типа I, то существует единственная

(кардинальна-индексированная) система центральных $\sum_{\alpha \in I} = 1$ такая, что
 ортогональных $\subset M$ I
 проекторов $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ $P_\alpha = e_\alpha M e_\alpha$
 изоморфна однородной алгебре фон $M_{BLH}(\alpha)$
 Неймана типа I $M_{BLH}(\alpha)$, $\infty \cong$
 Ω , $\dim H_\alpha = \alpha$, и Основным результатом параграфа
 является следующая $\oplus_\infty$
 $\oplus_\infty \cong \sum \Omega$, т. е.

$\cong \Omega$, $\sum LS M(\alpha)$
 $M_{BLH}(\alpha)$
 (α)
Теорема 4.1.1. Для алгебра *-
 $\in I$
 изоморфна алгебре BLH_α
 $\prod \Omega, \cdot) \cap ($

$\alpha \in I$
 Во втором параграфе четвертой главы изучается дифференцирования 16
 алгебры локально измеримых операторов относительно алгебры фон
 Неймана типа I.

$n \in$
 Пусть M однородная алгебра фон Неймана типа I n , . В этом $LS M(\alpha)$
 $M_n L$ всех n -матриц над
 случае алгебра изоморфна $n \cdot$
 алгебре
 $^0 L$.

Пусть $^0 L \delta : \rightarrow$ — произвольное дифференцирование и D_δ —
 "покоординатное" дифференцирование на $(M_n L)$ определенное по правилу

$$_1(())(())^n D_{\delta} \lambda \delta \lambda_{ij ij, = ij ij, =1} \quad n = , (2)$$

где⁰
 $_1(())(())^n \lambda_{ij ij n,} \in M L$. Оператор D_{δ} является дифференцированием на $^0(())$
 $M_n L$.

Предложение 4.2.1. Всякое дифференцирование D алгебры $^0(()) M_n L$ единственным образом представляется в виде

$$D D D = _a + , \delta$$

где – внутреннее дифференцирование, $D_a D_{\delta}$ – дифференцирование, определенное по правилу (2).

$$\oplus_{\infty} \\ \cong \Omega, \sum \\ M B L H_{\alpha \alpha} \\ (())$$

Пусть алгебра фон Неймана типа I с центром
 $\in I$
 α

$L(())^{\infty} \Omega D L S M(())$, δ – его сужение на $^0 L$. Тогда
и – дифференцирование на

δ отображает каждое в себя, и поэтому

$^0 q L_{\alpha} \delta$ порождает

$^0 q L_{\alpha} \alpha$. Положим

дифференцирование $_{\alpha} \delta$ на для каждого

$$F I H \{ \dim_{\alpha} = \alpha \in : = < \infty . \alpha \}$$

Пусть $D_{\alpha \delta} (\alpha \in F)$ дифференцирование на матричной алгебре, определенное по правилу (2). Для $^0 q L S M M q L(()) (_{\alpha \alpha} \cong)_{\alpha} \alpha \in I F$, положим $D 0$
Положим $_{\alpha \delta} \equiv$.

$$D x D x x x L S M(())(())(())(3)_{\alpha \delta \delta \alpha} = , = \in .$$

Отображение $D L S M L S M(())$ является дифференцированием на $\delta: \rightarrow 17$

$L S M(())$.

Следующий результат является одним из основным результатов главы,

и дает общий вид дифференцирований алгебры локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I, а также играет ключевую роль при описании дифференцирований алгебр измеримых, $\mathcal{T}$ -измеримых и $\mathcal{T}$ -компактных операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.

Теорема 4.2.4. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I. Всякое D на $LS(M)$ дифференцирование на единственным образом представляется в виде

$$D = D_a + \delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование и δ – дифференцирование вида (3).

Следствие 4.2.3. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I $_{\infty}$. Тогда всякое дифференцирование алгебры $LS(M)$ является внутренним. В третьем параграфе четвертой главы изучаются дифференцирования на подалгебрах алгебры локально измеримых операторов относительно алгебр фон Неймана типа I.

Пусть M алгебра фон Неймана и $\mathcal{T}$ – точный нормальный полуконечный след на M . Напомним, что замкнутый линейный оператор x называется $\mathcal{T}$ -измеримым относительно алгебры фон Неймана M , если $x \eta M$ и $\mathcal{D}(x)$ – область определения x , является $\mathcal{T}$ -плотной в H , т.е.

$\mathcal{D}(x) \eta M$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in M$ такое, что $p(\mathcal{D}(x)) \subset \mathcal{D}(x)$ и $\mathcal{T}(p^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(M, \mathcal{T})$ всех $\mathcal{T}$ -измеримых операторов относительно M является заполненной $*$ -алгеброй в $S(M)$.

Теорема 4.3.2. Пусть M – алгебра фон Неймана типа I. Всякое дифференцирование D на $S(M)$ или $S(M, \mathcal{T})$ единственным образом представляется в виде

$$D = D_a + \delta,$$

где D_a – внутреннее дифференцирование и δ – дифференцирование вида (3).

В алгебре $S(M, \mathcal{T})$ рассмотрим подмножество $_0 S(M, \mathcal{T})$ состоящее из операторов x таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in P(M)$ с $\mathcal{T}(p^\perp) < \varepsilon$, $\|xp\| < \infty$, и $\|p^\perp x\| < \varepsilon$.

$_0 S(M, \mathcal{T})$ является идеалом в $S(M)$, $\mathcal{T}$ и называется алгеброй $\mathcal{T}$ -компактных операторов.

Следующий результат является основным результатом параграфа.

Теорема 4.3.3. Если M – алгебра фон Неймана типа I с центром Z , то всякое Z -линейное дифференцирование алгебры ${}_0 S M(, \tau)$ является пространственным и порождается элементом из $S M(, \tau)$.

В четвертом параграфе четвертой главы изучается дифференцирования некоммутативных алгебр Аренса.

Для $p \geq 1$ положим $(\cdot) \{ (\cdot) (\cdot)^{pp} L M x \cdot)$

$S M x, \tau \tau \tau = \in, : | | < \infty \}$. $(^p L M, \tau -$

банахово пространство, относительно $\| x x L M \tau \tau' \| = \| \cdot \|$, $\in, .$

нормы

Тогда

$$^1 ((\cdot)) (\cdot)^{pp} p$$

Рассмотрим
множество

$$, = , | \cdot$$

$$L M L M^{\omega} \tau \tau () ()^p$$

$$p \geq 1$$

$L M(^\omega, \tau$ является локально полной выпуклой метризуемой *-алгеброй
)

относительно топологии t , порожденной системой норм $\{ \cdot \}_{p \geq 1}$.

Алгебра $L M(^\omega, \tau)$ называется (некоммутативной) *алгеброй Аренса*.

Введем обозначение

$$, = , | \cdot$$

$$L M L M^{\omega} \tau \tau$$

$$() ()^p 2$$

$$p \geq 2$$

и на множестве $)_2 L M(^\omega, \tau$ рассмотрим топологию ${}_2 t$, порожденную
системой норм $\{ \cdot \}_{p \geq 2}$.

Предложение 4.4.4. ${}_2 ((\cdot) {}_2 L M t)^\omega, \tau$, является полной метризуемой
локально выпуклой *-алгеброй.

Отметим, что при $\tau(1) < \infty$ имеет место равенство ${}_2 L M L M () ()^{\omega \omega} = , \tau \tau$
, и топология совпадает с топологией ${}_2 t$.

На ${}_2 M L M(^\omega + , \tau)$ введем семейство норм $\{ \cdot \}_{n \geq 1}$, положив

" 0
 $1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ \{ \} \}_{n \ n} x \ x \ x \ x \ Mx \ LM^\omega \tau_\infty := +, \in, \in, , , 19$

где 0
 m
 $\{ \} , \in | , \cdot_n$

$\{ \} x \ L \ M \ \tau \ \{ \} \} ()$
 $m \ n$

$\frac{2}{n}$
 $=$
 n

Пусть – топология на $)_0 t_2 M LM(^\omega + , , \tau$ порожденная семейством норм $\{ \}_{n \geq 1}$.

Предложение 4.4.6. $(_2 ()_0 M LM t)^\omega + , , \tau$ является локально выпуклой полной метризуемой *-алгеброй. Более того, алгебра Аренса $LM()^\omega, \tau$ является идеалом в $_2 M LM()^\omega + , \tau$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, которая дает полное описание дифференцирований на некоммутативных алгебрах Аренса.

Теорема 4.4.3. Пусть M – полуконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ . Тогда всякое дифференцирование D алгебры $LM(^\omega, \tau)$ является пространственным, при этом оно имеет вид

$$D x a x x a x L M () ()^\omega = -, \in, \tau$$

для некоторого $_2 a M LM()^\omega \in +, \tau$.

Следствие 4.4.5. Если M – абелева алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ , то все дифференцирования алгебры $LM(^\omega, \tau)$ тождественно равны нулю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе получено представление циклически компактных множеств в виде измеримого расслоения компактных множеств и выяснена структура модулей над кольцом⁰ L измеримых функций, которые представляются как измеримое расслоение конечномерных пространств.

Во второй главе получены векторные варианты теорем Банаха об

открытом операторе и Банаха – Штейнгауза о равномерной ограниченности, а также доказан векторный вариант критерия Никольского фредгольмовости ограниченных операторов.

В третьей главе изучены алгебры Банаха – Канторовича над кольцом измеримых функций.

C^*

Доказано, что всякая унитарная коммутативная C^* -алгебра над кольцом алгебра всех непрерывных

0L , изометрически $*$ -изоморфна

сохраняющих перемешивания отображений из множества всех чистых 0L - 20

состояний в кольцо 0L .

Доказан векторный вариант классической теоремы Гельфанда – Наймарка – Сигала C^* -алгебр над 0L .

В четвертой главе найден общий вид дифференцирований алгебр всех локально измеримых, измеримых и T -измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I, а также найдены необходимые и достаточные условия пространственности дифференцирований алгебры всех T -компактных операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана типа I.

Дано полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, изложенные в диссертации, могут быть использованы при различных исследованиях по функциональному анализу, в теории операторных алгебр, математической физике.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту академику АН Республики Узбекистан, профессору Шавкату Абдуллаевичу Аюпову за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I. Статьи, опубликованные в научных журналах:

1. Кудайбергенов К.К., Ганиев И.Г. Измеримые расслоения компактных множеств // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 1999. – № 6. – С. 37-44. 2. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоение непрерывных отображений циклических компактов // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2000. – № 3. – С. 7-14.
3. Ganiev I.G. Kudaybergenov K.K Measurable bundles of compact operators // Methods of functional analysis and topology. – Kiev, 2001. – № 3 (7). – P. 1-6.
4. Ганиев И.Г., Кудайбергенов К.К. Теорема Банаха об обратном операторе в пространствах Банаха – Канторовича // Владикавказ. Мат. Жур. –

Владикавказ, 2004. – № 3 (6). – С. 21-25.

5. Ганиев И.Г. Кудайбергенов К.К. Конечномерные модули над кольцом измеримых функций // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2004. – № 4. – С. 3-9.
6. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоения операторов с замкнутой областью значений // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2005. – № 3. – С. 54- 62.
7. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К.К. Принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза для операторов в расширенных пространствах Банаха – Канторовича над 0L // Математические труды.

21

– Новосибирск, 2006. – № 1 (9). – С. 21-33.

8. Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – Мазура для C^* -алгебр над кольцом измеримых функции // Владикавказ. Мат. Жур. – Владикавказ, 2006. – № 1 (8). – С. 45-49.
9. Кудайбергенов К. К. Измеримое расслоение интегральных операторов // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2006. – № 1. – С. 49-57.
10. Kudaybergenov K. K. Fredholm operators in Banach – Kantorovich spaces // Methods of functional analysis and topology, – Kiev, 2006. – № 2 (12). – P. 234-242.

*C

11. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Дифференцирования -алгебр над кольцом измеримых функции // Узб. Мат. Жур. – Ташкент, 2007. – № 1. – С. 39-47.
12. Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – *C Наймарка – Сигала для -алгебр над кольцом измеримых функции // Владикавказ. Мат. Жур. – Владикавказ, 2007. – № 2 (9). – С. 33-39.
13. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Дифференцирования алгебр Аренса // Функциональный анализ и его приложения. – Москва, 2007. – № 4 (41). – С. 70-72.
14. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Non commutative Arens algebras and their derivations // Journal of Functional Analysis. – Amsterdam, 2007. – № 1 (253). – P. 287-302.
15. Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Теорема Гельфанда – *C Наймарка для коммутативных -алгебр над кольцом измеримых функции // Известия ВУЗов. “Математика”. – Казань, 2008. – № 2 (58). – С. 60-68.
16. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of T -compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Positivity, – Basel, 2008. – № 2 (12). – P. 375-386.
17. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // Siberian Advances in Mathematics, – Novosibirsk, 2008. – № 2 (18). – P. 86-94.

18. Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Innerness of Derivations on Subalgebras of Measurable Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics, – Kazan, 2008. – № 2 (29). – P. 60-67.

III. а) Работы, опубликованные в препринтах:

19. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Non commutative Arens algebras and their derivations // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 290, – Bonn, 2006. – 18 p.
20. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 301, – Bonn, 2006. – 14 p.

22

21. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Kudaybergenov K. K. Derivations on the algebra of $\mathcal{T}$ -compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 324, – Bonn, 2007. – 13 p.
22. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Description of derivations on measurable operator algebras of type I // SFB 611, Universitat Bonn, Preprint, № 361, – Bonn, 2007. – 14 p.

III. б) Работы, опубликованные в материалах и сборниках тезисов конференции:

23. Аюпов Ш. А., Кудайбергенов К. К. Некоммутативные алгебры Аренса и их дифференцирования // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25 – 27 июня 2006. Нукус, 2006. – С. 6-8.
24. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Конечномерные модули над кольцом измеримых функции // Геометрия и анализ: Тез. докл. межд. науч. конф. 24 – 26 августа 2004. Ростов-на-Дону, 2004. – С. 92-94.

25. Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К. Представление некоммутативных
* $\mathcal{C}$

-алгебр над кольцом измеримых функции // Операторные Алгебры и Квантовая Теория Вероятностей: Труды международной конференций. 8 – 10 сентября 2005. Ташкент, 2005. – С. 54-56.

26. Кудайбергенов К. К. Измеримые расслоения фредгольмовых операторов // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. Респ. науч. конф. 24 – 26 июня 2004. Нукус, 2004. – С. 42-44.
27. Кудайбергенов К. К. Фредгольмовые операторы в пространствах Банаха – Канторовича // Тез. докл. Респ. науч. конф. 24 – 26 декабря 2004. – Ташкент, 2004. – С. 43-44.

* $\mathcal{C}$

28. Кудайбергенов К. К. Дифференцирования $\mathcal{C}$ -алгебр над кольцом измеримых функций // Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа: Тез. докл. Респ. науч. конф. 25 – 27 июня

2005. – Нукус, 2006. – С. 27-28.

29. Кудайбергенов К. К. Спектр элементов алгебры Банаха – Канторовича функции // Тихонов и современная математика: Тез. докл. межд. науч. конф. 19 – 25 июня 2006. – Москва, 2006. – С. 158-159.
30. Кудайбергенов К. К. Измеримое расслоение интегральных операторов // Тез. докл. Респ. науч. конф. 8 – 10 июня 2006. – Хива, 2006. – С. 15. 31. Кудайбергенов К. К. Спектр элементов алгебры Банаха — Канторовича функции // Исследования по математическому анализу, математическому моделированию и информатике: Материалы международной научной конференций. – Владикавказ: Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, 2007. – С. 50-59.

23

Физика-математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Кудайбергенов Каримберген Кадирбергеновичнинг 01.01.01 – математик анализ ихтисослиги бўйича «Чизиқли операторлар ўлчовли тахламалари ва уларнинг оператор алгебралари ва дифференциаллашларга тадбиқи» мавзусидаги диссертациянинг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: дифференциаллаш, ички дифференциаллаш, лифтинг, ўлчов, Банах – Канторович модули, фон Нейман алгебраси, ўлчовли оператор, Аренс алгебралари.

* C

Тадқиқот объектлари: Банах – Канторович модули, -алгебралар, ўлчовли операторлар алгебраси, нокоммутатив Аренс алгебралари, дифференциаллашлар.

* C

Ишнинг мақсади: Ўлчовли функциялар ҳалқаси устидаги - алгебраларни Гильберт – Капланский модулида аниқланган операторлар алгебраси кўринишида ифодалаш ва фон Нейман алгебраларига нисбатан локал ўлчовли операторлар алгебраси ва унинг баъзи алгебраостилари дифференциаллашларини тавсифлаш

Тадқиқот методлари: ўлчовли банах тахламалари, функционал анализ, оператор алгебралар назариясининг усулларида фойдаланилди. **Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги:** 0L устидаги Банах – Канторович модулидаги ҳар бир циклик компакт оператор компакт чизиқли операторларнинг ўлчовли тахламаси кўринишида тасвирланиши ∇

исботланган; -фредгольм операторлари Фредгольм операторлари ўлчовли тахламаси кўринишида тасвирланиши исботланган; ўлчовли функциялар * C халқаси устидаги -алгебраларни Гильберт – Капланский модулида аниқланган операторлар алгебраси кўринишида ифодаланиши исботланган; фон Нейман алгебраларига бириктирилган локал ўлчовли операторлар алгебраси ва унинг бази алгебраостилари дифференциаллашларининг умумий кўриниши топилган; фон Нейман алгебралари ва аниқ нормал ярим чекли из билан ассоциирланган нокоммутатив Аренс алгебралари дифференциаллашлари тўлиқ тавсифланган.

Амалий аҳамияти: иш назарий характерга эга.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Ишда келтирилган натижалар ва методлар функционал анализ ва операторлар алгебралари назарияларидан махсус курслар ўқишда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: ўлчовлар назарияси, функционал анализ, операторлар алгебралари назарияси, математик физика ва уларнинг тадбиқлари.

диссертации Кудайбергенова Каримбергена Кадирбергеновича на тему «Измеримые расслоения линейных операторов и их приложения к операторным алгебрам и дифференцированиям» на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Ключевые слова: дифференцирование, внутреннее дифференцирование, лифтинг, мера, модуль Банаха – Канторовича, алгебра фон Неймана, измеримый оператор, алгебра Аренса.

* C

Объекты исследования: модули Банаха – Канторовича, -алгебры, алгебра измеримых операторов, некоммутативные алгебры Аренса, дифференцирования.

* C

Цель работы: Реализация -алгебр над кольцом измеримых функций в виде алгебр операторов на модулях Гильберта – Капланского, описание дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана и её некоторых подалгебр.

Метод исследования: применены общие методы измеримых банаховых расслоений, функционального анализа, теории операторных

алгебр.

Полученные результаты и их новизна: Доказано, что всякий циклически компактный оператор на модуле Банаха – Канторовича над 0L представляется в виде измеримого расслоения компактных линейных операторов; доказано, что всякий ∇ -фредгольмов оператор представляется в виде измеримого расслоения Фредгольмовых операторов; доказано, что всякая $\ast$ -алгебра над ${}^{\ast}C^0L$ изометрически $\ast$ -изоморфна замкнутой подалгебре алгебры всех 0L -ограниченных 0L -линейных операторов на модуле Гильберта – Капланского над 0L ; найден общий дифференцирований алгебры локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I и её некоторых подалгебр; получено полное описание дифференцирований некоммутативных алгебр Аренса, ассоциированных с алгеброй фон Неймана и точным нормальным полуконечным следом.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Результаты и методы представленные в работе могут быть использованы при чтении специальных курсов по функциональному анализу и теорий операторных алгебр.

Область применения: теория мер, функциональный анализ, теория операторных алгебр, математическая физика и их приложения.

25

RESUME

Thesis of Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich on the scientific degree competition of the doctor of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.01 – mathematical analysis

subject:

«Measurable bundles of linear operators and their applications to operator algebras and derivations».

Key words: derivation, inner derivation, lifting, Banach – Kantorovich module, von Neumann algebra, measurable operator, Arens algebra. ${}^{\ast}C$

Subject of the inquiry: Banach – Kantorovich module, $\ast$ -algebras, measurable Banach bundles, non commutative Arens algebras, derivation. **Aim of the inquiry:** the realization of $\ast$ -algebras over ${}^{\ast}C^0L$ as algebras of operators on a Hilbert – Kaplansky module and description of derivation of the algebras of locally measurable operators affiliated with von Neumann algebra and of its subalgebras.

Method of inquiry: In the work methods of measurable Banach Bundles, of functional analysis, of theory operator algebras are used.

The results achieved and their novelty:

It is proved that any cyclically compact operator on a Banach – Kantorovich

module can be represented as a measurable bundle of compact operators; it is proved that every ∇ -Fredholm operator can be represented as a measurable bundle of Fredholm operators; it is proved that every $C^0(L)$ -algebras over $C^0(L)$ is isometrically $*$ -isomorphic to a closed subalgebra of the algebra of all $C^0(L)$ -bounded $C^0(L)$ -linear operators on a Hilbert – Kaplansky module; a general form of derivations of the algebras of locally measurable operators affiliated with a von Neumann algebra is given; a complete description of derivations on the non commutative Arens algebras associated with von Neumann algebra and faithful normal semi-finite trace is obtained.

Practical value: the work has a theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: Results and methods introduced in the work can be used in special courses on functional analysis and theory of operator algebras.

Sphere of usage: the measure theory, functional analysis, theory of operator algebras, mathematical physics.