ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

КАДИРКУЛОВ БАХТИЯР ЖАЛИЛОВИЧ

КАСР ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ УСЛУБЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

УДК: 517.95

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

2

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ
ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

КАДИРКУЛОВ БАХТИЯР ЖАЛИЛОВИЧ

КАСР ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ УСЛУБЛАРИ

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)**

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2017 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.DSc/FM7 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб саҳифасида (http://fti-kengash.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи: Ашуров Равшан Раджабович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: Умаров Собир Рахимович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Тахиров Жозил Останович
физика-математика фанлари доктори, профессор

Хасанов Анваржон
физика-математика фанлари доктори

Етакчи ташкилот: Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2017 йил «___» ___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nu.uz.)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__________ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2017 йил «____» _______________куни тарқатилди. (2017 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баѐнномаси).

А.С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

М.С.Салахитдинов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш хузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқѐсида олиб борилаѐтган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш долзарб эканлигини кўрсатмоқда. Дастлаб италиялик олимлар томонидан классик модель - диффузия тенгламаси ўрнига каср тартибли ҳосилали диффузия тенгламаси киритилди. Бу эса ўз навбатида кўплаб физик, биологик, электрохимик жараѐнларга мос янги математик моделларнинг қурилишига асос бўлди. Каср тартибли дифференциал ва интеграл ҳисоби мана шундай жараѐнларни моделлаштиришнинг самарадор усулларини топиш жараѐнида юзага келди. Бундай моделларга мос тенгламаларнинг мураккаблиги, уларни ечишнинг етарли даражадаги аналитик ва сонли усулларининг тўла шаклланмаганлиги сабабли, ушбу тенгламаларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди, хусусан, иккинчи ва юқори тартибли ҳамда аралаш турдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун турли чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш, уларни ечишнинг самарали усулларини топишга алоҳида эътибор қаратилди. Бу борада, жумладан, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш ҳамда уларнинг бир қийматли ечилишига доир салмоқли натижаларга эришилмоқда. Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси асосида математика йўналишидаги илмий-тадқиқотлар натижаларидан иқтисодиѐт тармоқларининг самарадорлигини оширишда фойдаланиш муҳим аҳамиятга эга.

Ҳозирги кунда жаҳонда каср тартибли операторларнинг хоссаларини ўрганиш, улар қатнашган иккинчи ва юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларга доир чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш ва амалиѐтга татбиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш; каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун манба функциясини аниқлаш билан боғлиқ тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши шартларини аниқлаш; каср тартибли интегро-дифференциал операторлар хоссаларини ўрганиш ва бу операторларни хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга қўллаш. Юқорида келтирилган илмий тадқиқотлар йўналишида бажарилаѐтган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар

тўғрисида» ҳамда 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаш тиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши нинг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1]. Каср тартибли интегро-дифференциал операторларнинг хоссаларини ўрганиш, уларни умумлаштириш, бундай операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун турли тўғри ва тескари чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, University of Santiago de Compostela (Испания), Freie Universitat Berlin, Technische University Braunschweig, Beuth Hochschule für Technik Berlin (Германия), University of Bologna (Италия), Universiter de La Rochelle (Франция), Technical University of Kosice (Словакия), Беларусь давлат университети, Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Болкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти, Математика ва математик моделлаштириш институти ва Аҳмад Яссавий номидаги халқаро қозоқ-турк университети (Қозоғистон) да олиб борилмоқда.

Каср тартибли дифференциал тенгламалар назариясига оид дунѐда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан қуйидаги илмий натижалар олинган: каср тартибли интегро дифференциал операторларнинг хоссалари ўрганилиб, бу операторлар умумлаштирилган ҳамда каср тартибли дифференциал тенгламалар учун Коши ҳамда биринчи чегаравий масаланинг ечимлари қурилган, улар билан боғлиқ махсус функциялар хоссалари ўрганилган (Армения республикаси фанлар академияси математика ва механика институти), тадбиқий масалаларда катта аҳамиятга эга бўлган каср тартибли чизиқсиз тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларнинг ечилиш шартлари аниқланган (University of Santiago de Compostela, Испания), каср тартибли диффузион тўлқин тенгламасининг фундаментал ечими топилиб, Коши масаласи ечилган ҳамда сонли ечимлари қурилган (Freie Universitat Berlin, Technische University Braunschweig, Германия; University of Bologna, Италия; Technical University of Kosice, Словакия), икки ва кўп ўзгарувчили тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар ечими мажудлигиннг етарли шартлари аниқланган

[1]Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: Arkiv Mathematics Astronomis, www.springer.com/mathematics/journal/11512; Complex Variables and Elliptic Equations, http://www. tandfon line.com/loi/gcov20; Сибирский математический журнал, www.springer.com; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625; Computers and Mathematics with Applications www.elsevier.com/locate /camw, Acta Mathematica Scientia, http://actams.wipm.ac.cn манбалар асосида ишлаб чиқилган.

(Universiteґ de La Rochelle, Франция), Риман-Лиувилл, Капуто ва Джрбашян Нерсесян маъносидаги каср тартибли операторлар қатнашган диффузион тўлқин тенгламасининг Райт махсус функцияси орқали фундаментал ечими қурилган, Коши ва чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлиги ва ягоналигининг зарурий ва етарли шартлари топилган (Россия Фанлар академиясининг амалий математика ва автоматлаштириш институти, Беларусь давлат университети), эллиптик тенгламалар учун Риман-Лиувилл, Капуто, Адамар, Адамар-Маршо маъносидаги ҳамда уларнинг умумлашмаларидан иборат каср тартибли ҳосилали чегаравий шартли масалаларнинг бир қийматли ечилиши ўрганилган, каср тартибли дифференциал тенгламалар ечимини топишнинг оператор усули ишлаб чиқилган (Математика ва математик моделлаштириш институти, Аҳмад Яссавий номидаги халқаро қозоқ-турк университети, Қозоғистон).

Дунѐда бугунги кунда каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган тўғри ва тескари чегаравий масалалар бўйича бир қатор, жумладан каср тартибли интегро-дифференциал операторлар хоссаларидан фойдаланган ҳолда муайян жараѐнни янада мутаносиб равишда ўзида акс эттирувчи математик моделларини яратиш ва уларни ифодаловчи масалаларни ечиш; чегаравий масалаларнинг аналитик ечиш усулларини қуриш; сонли моделларнинг турғун алгоритмларини тузиш каби устивор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Каср тартибли операторлар нинг дифференциал тенгламалар назариясида қўлланилиши билан боғлиқ дастлабки натижалар М.М.Джрбашян ва А.Б.Нерсесянларга тегишли бўлиб, улар умумлашган каср тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечимини қуришган, ечим эса махсус Миттаг-Леффлер функцияси орқали ифодаланган. М.М.Джрбашян Миттаг-Леффлер функциясининг хоссаларини ўрганган ҳамда тартиби иккидан кичик бўлган каср тартибли тенглама учун биринчи чегаравий масалани тадқиқ қилган.

Субдиффузия ва супердиффузия жараѐнларининг математик моделини қуришда муҳим ўрин эгалловчи Риман-Лиувилл ва Капуто маъносидаги диффузион-тўлқин тенгламаси учун R.Gorenflo, F.Mainardi, А.Килбас ва А. Псху лар томонидан Коши масаласи тадқиқ қилиниб, Райт махсус функцияси орқали фундаментал ечим қурилган ва Коши масаласининг бир қийматли ечилиши кўрсатилган. А.С.Псху Джрбашян - Несресян операторли диффузи он - тўлқин тенгламасини ҳам ўрганиб, унинг фундаментал ечимини қурган ва Коши масаласининг бир-қийматли ечилишини кўрсатган. Лаплас тенгламаси учун Римана-Лиувилл, Капуто маъносидаги каср тартибли операторлар қатнашган чегаравий шартли масалалар Б. Турметов томонидан гармоник функцияларнинг хоссаларидан ҳамда интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланиб ўрганилган. Бунда, Риман Лиувилл оператори ҳолатида масаланинг Гѐльдер синфида шартсиз ечилиши, Капуто оператори ҳолатида эса ортогоналлик
$\alpha \geq 1$дан бошлаб, қўшимча
шарти зарурлиги кўрсатилган. Шу билан бирга ечимнинг Гѐльдер ва Никольский синфларида силлиқлиги ўрганилган бўлиб, масала ечимининг

силлиқлиги тартиби оператор тартибига яхшиланиши аниқланган. Б.Турметов ва унинг ўқувчилари ишларида эллиптик тенгламалар учун Адамар, Адамар-Маршо маъносидаги каср тартибли операторли чегаравий шартли масалаларнинг ечилиши муаммолари ўрганилган, шу билан бирга ушбу операторлар умумлаштирилган.

Каср тартибли масалаларнинг сонли ечиш усуллари оддий дифферен циал тенгламалар учун K.Diethem, хусусий ҳосилали тенгламалар учун I.Podlubny, O.P. Agrawal лар томонидан ишлаб чиқилган. Тўлқинлар тарқалишининг квант назарияси, электроразведка, сейсмология, потенциал лар назарияси ва диффузия жараѐнлари тескари масалаларига доир натижалар А.Кожанов, С.Кабанихин ва A. Lorenzi, M. Kirane, Y. Luchko ва M. Yamamotoлар изланишларида ривожлантирилди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон миллий университети Ф-4-02 рақамли «Дифференциал тенгламалар ва оптимал бошқарув учун классик бўлмаган бошланғич-чегаравий масалалар назарияси» мавзусидаги илмий тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади каср тартибли интегро-дифференециал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш, каср тартибли интегро-дифференциал операторлар хоссаларини ўрганиш ва уларни эллиптик тенгламалар учун классик бўлмаган масалаларни ечишда қўллашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қаташган тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун нолокал масалаларнинг бир қийматли ечимга эга эканлигини кўрсатиш;

Самарский-Ионкин туридаги масалаларга мос спектрал масалалар ўзак функцияларининг базислиги масалаларини ўрганиш;

каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун манба функциясини аниқлаш билан боғлиқ тескари масалаларининг бир қийматли ечилиши шартларини аниқлаш;

аралаш турдаги каср тартибли тенгламалар учун интегро дифференциал боғланишли масалаларнинг регуляр ечилишини кўрсатиш; Адамар, Адамар-Маршо туридаги каср тартибли интегро дифференциал операторлар хоссаларини ўрганиш ва бу операторларни эллиптик тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга қўллаш; чегаравий шартларида умумлашган каср тартибли операторлар қатнашган эллиптик тенгламалар учун чегаравий ва Бицадзе-Самарский туридаги масалаларни гармоник ва силлиқ функциялар синфларида ечиш усулларини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти Капуто, Риман-Лиувилл, Джрбашян-Нерсесян маъносидаги, Адамар ва Адамар-Маршо туридаги интегро-дифференциал операторлар, каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар, эллиптик тенгламалар учун чегаравий шартларида Риман-Лиувилл, Капуто маъносидаги ҳамда Адамар ва Адамар-Маршо туридаги интегро-дифферен циал операторлар қатнашган масалалар тадқиқотидан иборат. **Тадқиқотнинг усуллари.** Тадқиқот ишида математик анализ, матема тик физика, чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, интеграл тенгламалар ва қаторлар назарияси усулларидан фойдаланилган. **Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қаташган тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун нолокал масалаларнинг бир қийматли ечимга эга эканлиги кўрсатилган;

Самарский-Ионкин туридаги масалаларга мос спектрал масалалар ўзак функцияларининг Рисс базиси ташкил этиши исботланган;

каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун манба функциясини аниқлаш билан боғлиқ тескари масалаларининг бир қийматли ечилиши шартлари аниқланган;

аралаш турдаги каср тартибли тенгламалар учун интегро дифференциал боғланишли масалаларнинг регуляр ечилиши кўрсатилган; Адамар, Адамар-Маршо туридаги каср тартибли интегро дифференциал операторлар умумлаштирилган, уларнинг хоссалари ўрганилган ва бу операторлар эллиптик тенгламалар учун гармоник функциялар ҳамда Гѐльдер синфларида чегаравий масалаларни ечишга қўлланилган;

чегаравий шартларида умумлашган каср тартибли операторлар қатнашган эллиптик тенгламалар учун чегаравий ва Бицадзе - Самарский туридаги масалаларни гармоник ва силлиқ функциялар синфларида ечиш усуллари ишлаб чиқилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни ечишда мос спектрал масала ўзак функцияларининг тўлалиги ва базислигидан фойдаланиш усули таклиф қилиндики, унинг ѐрдамида ушбу чегаравий масалаларнинг текис ва абсолют яқинлашувчи қаторлар кўринишидаги ечимлари олинган. Эллиптик тенгламалар учун каср тартибли чегаравий масалаларни Дирихле масаласига келтириш орқали ечиш усули ушбу масалаларни ечишда мавжуд Фредгольм альтернативаларидан фойдаланиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш, каср тартибли интегро-дифференциал операторлар хоссаларини ўрганиш ва уларни эллиптик тенгламалар учун классик бўлмаган масалаларни ечишда математик анализ, математик физика, чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, интеграл тенгламалар ва қаторлар назарияси усулларини қўллаш билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ушбу ишда олинган илмий натижалардан

каср тартибли дифференциал ва интеграл тенгламалар назарияси ҳамда чизиқли операторлар спектрал назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижалар нинг каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар орқали ифодаланувчи физик жараѐнларга тадбиқ этилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараѐнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиѐтга жорий қилинган:

каср интегро-дифференциал операторли юқори тартибли аралаш турдаги тенгламага қўйилган чегаравий масаланинг ошкор ҳолдаги ечим қуриш усулидан давлат қайд рақами 0112РК01473 бўлган хорижий грантда фрактал муҳитлари жараѐнларини моделлаштиришда юзага келадиган каср тартибли операторли классик бўлмаган дифференциал тенгламаларни тадқиқ қилиш ва уларни ечиш алгоритмларини ишлаб чиқишда қўлланилган (Ал Форобий номли қозоқ миллий университети қошидаги математика ва механика илмий текшириш институтининг 2016 йил 8 ноябрдаги 206-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тадқиқ қилинаѐтган масалалар ечимларини текис ва абсолют яқинлашувчи қаторлар кўринишида тасвирлаш имконини берган;

Бицадзе - Самарский туридаги масалаларни ечишда фойдаланилган умумлашган Риман-Лиувилл операторларининг гармоник функциялар синфидаги хоссалари project ORG/SQU/CBS/13/030 хорижий грантда чегаравий шартларида Риман-Лиувилл туридаги интегро-дифференциал операторлар қатнашган эллиптик тенгламалар учун нолокал масалаларни ечишда қўлланилган (Sultan Qaboos University, College of science, Sultanate of Oman, 2016 йил 14 ноябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Бицадзе - Самарский туридаги масалаларни тадқиқ қилишни маълум Фредгольм алтернативаларини қўллаш имконини берувчи интеграл тенгламаларга келтириш имконини берган.

Адамар, Адамар-Маршо туридаги каср тартибли операторларнинг гармоник функциялар ҳамда Гѐльдер синфларидаги хоссаларини тадқиқ қилиш усуллари хорижий илмий журналларда (Mathematical Methods in the Applied Scinces, 2016, № 39, pp. 1121 - 1128; Boundary Value Problems 2014, № 29, pp. 1 - 13; Differential Equations, 2015, Volume 51, № 2, pp. 243 - 254) эллиптик тенгламалар учун Бицадзе - Самарский туридаги масалаларни ечишда фойдаланилган. Илмий натижалардан фойдаланиш каср тартибли ҳосилали нолокал чегаравий масалаларни интеграл тенгламаларга келтириш орқали тадқиқ қилишга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 14 илмий-амалий анжуманларда, жумладан 9 та халқаро ва 5 та республика илмий - амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 30 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари

асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 12 та мақола, жумладан, 7 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш кисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиѐтлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 178 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши нинг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирил ган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижа ларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Тўртинчи тартибли хусусий ҳосилали каср дифференциал тенгламалар учун Самарский-Ионкин туридаги чегара вий масалалар”** деб номланувчи биринчи бобида Капуто ва Джарбашян Нерсесян маъносидаги каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалалар ечилган.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида диссертация асосий натижаларини олишда зарур бўлган, интеграл тенгламалар, чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, каср тартибли операторлар қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар назариясига доир баъзи-бир маълумотлар келтирилган.

Иккинчи параграфда Капуто маъносидаги каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама учун Самарский-Ионкин туридаги нолокал масала ўрганилган. Масалани ечиш учун Фурье усули қўлланилиб, натижада ушбу масала тўртинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун ўз-ўзига қўшма бўлмаган масалани ечишга келтирилган. Ушбу ҳамда унга қўшма бўлган масаланинг хос сонлари ва хос функциялари топилиб, хос функцияларнинг $L_2(0,1)$ фазода тўлалиги исботланган. Шу билан бирга қаралаётган масаланинг регуляр ечими мавжудлиги ва ягоналигига доир теоремалар исботланган. Ушбу $\Omega = < < \{(,) : 0 , 1\}\ x\ t\ x\ t$ соҳада параграфда келтирилган натижалар $\alpha = 1$ ҳолда ҳам янги натижалардир.

$$_0 0\ _{C\,t\,xxxx} D\ u\ u^{\alpha} + = ,\ \alpha \in (0,1] \quad (1)$$

тенгламани қарайлик. Бунда $_{C\,t}D_0$ $^{\alpha}$- Капуто маъносидаги каср ҳосилали оператор бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$( )^t\ 1$

$$_{C\,t\,t\,t\,t} D\ u\ x\ t\ I\ u\ x\ t\ I\ t\ t\ d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} \phi\ \tau\ \phi\ \tau\ \tau\ (,)\ ((,)),\ (( ))\ ( )\ ( ))$$

$$= = -$$

$$\frac{1}{-}\ \frac{1}{-}$$

$$\Gamma \int$$

$^{0\,0\,0}\,_0$

α

Масала I. Ω соҳада (1) тенгламанинг

$$u\ x\ au\ x\ x\ x\ (,0)\ (,1)\ ( ),\ 0\ 1 = + \le \le \phi,\quad (2)$$

$u\ t\ u\ t\ t = = \le \le$, (3)

(0,) (1,) 0, 0 1 $_{xx}$

$u\ t\ u\ t =$, (0,) (1,)

(0,) (1,) $_{x\ x}$ $u\ t\ u\ t =$, 0≤ t ≤1 (4) $_{xxx\ xxx}$

шартларни қаноатлантирувчи $u\ x\ t$ (,)ечимини топинг, бунда a - маълум ҳақиқий сон, ϕ(x) - маълум функция.

12

Таъриф 1. I масаланинг регуляр ечими деб ( ) (,) $_{x\ t}u\ x\ t\ C \in \Omega$,

3,0

,

$_0$(,) ( ) $_{C\ t}D\ u\ x\ t\ C^{\alpha} \in \Omega$, ( )

$u\ C \in \Omega$бўлган, (1) тенгламани ва (2) - (4) шартларни

$_{xxxx}$

қаноатлантирувчи$u\ x\ t$ (,)функцияга айтилади.

Ушбу

$e\ e$

$X\ x\ x\ X\ x\ nx\ X\ x\ nx$

2 2 (1)

π π

$nx\ n\ x$

−

( ) 2 , ( ) 2sin 2 , ( ) cos2 = = = +

π π

(1) (2)

−

_, (5)

$n\ n$ $_n$

0 2

π

e

1

$e\ e$

$Y\ x\ Y\ x\ nx\ Y\ x\ nx$

2 2 (1)

π π

$nx\ n\ x$

−

( ) 1, ( ) sin 2 , ( ) 2cos2 = = + =

\+

π π

(1) (2)

− (6)

$n\ n$ $_n$

0 2

π

e

1

ўзаро биортогонал функциялар тизимини қарайлик.

Лемма 1. (5) ва (6) функциялар тизими $_2L$ (0,1)фазода тўладир. **Лемма 2.** (5) ва (6) функциялар тизими $_2L$ (0,1)фазода Рисс базиси ҳосил қилади.

Теорема 1. *a* сони ихтиѐрий *n*=0, 1, 2, … да $(\ )^4$

$_1\Delta = - - \neq (\ )\ 1\ (2\ )\ 0\ n\ aE\ n\ _\alpha\pi$

шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий сон бўлсин. У ҳолда, агар I масала ечими мавжуд бўлса, у ягона бўлади.

Теорема 2. *x*функция

$\phi(\ )$

$(\ )\ [0,1],\ (0)\ 0,\ '(0)\ '(1),\ ''(1)\ 0,\ '''(0\ '''(1)\ x\ C\ ,\ (0,1)\ ^\delta\phi\ \phi\ \phi\ \phi\ \phi\ \phi\ \phi\ \delta\ ^+\in = = =$

$= \in$

4

ε

$|\ (\ )\ |\ 0\ \Delta \geq > n\ \varepsilon$, n =1,2,...бўлсин, бунда

шартларни қаноатлантирсин ва $_1$

(0,1) интервалга тегишли ихтиѐрий сон. У ҳолда I масала регуляр ечимга эга. Иккинчи параграфда Джарбашян-Нерсесян операторли каср тартибли тенглама учун нолокал масалалар ўрганилган. Масалаларни ечиш учун Фурье усулидан фойдаланилиб, қаралаѐтган масала оддий дифференциал тенглама учун спектрал масалани ўрганишга келтирган. Ушбу ва унга қўшма масала хос сонлари топилган, мос ўзак функцияларининг тўлалиги исботланган.

$\gamma\ \gamma\ \gamma$ - (0,1]интервалга тегиш

m - бирор фиксирланган натурал сон, $_{0\ 1}$, ,... $_m$

$_m$

ли бирор ҳақиқий сонлар бўлиб,

$= - > \sum$бўлсин. (0,+), ( ) <∞да

$\sigma\ \gamma\ _{m\,j}$ 1 0

=

1

аниқланган $_j$

$\phi(t)$функция учун

$^{m\ m\ m\ m}_{1\ 2\ 0\ 1}$

оператор

^{1}D ( ) ... ( ) $_{0\ 0\ 0\ 0\ 0}$

$_{t\ RL\ t\ RL\ t\ RL\ t\ RL\ t}\ t\ I\ D\ D\ D\ D\ t\ ^{\sigma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}\phi\ \phi\ ^{- - -} =$

$\sigma\ _m$тартибли Джрбашян-Нерсесян маъносидаги каср ҳосилали *d*

оператор дейилади. Бунда ^{1}

= - Риман -Лиувилл маъносидаги

$^{\alpha\ \alpha}\phi\ \phi$

-

$D\ t\ I\ t$

$_{0\ 0}(\ )\ (\ )\ _{t\ t}$

dt

каср тартибли ҳосила.

$\Omega = < < \{(,) : 0 , 1\}$ $x\ t\ x\ t$соҳада

D (,) $^{m}_{xxxx}u\ u\ f\ x\ t\ ^{\sigma}+ =$, (0,2) $\sigma\ _{m}\in$ (7)

тенглама учун қуйидаги масалаларни қараймиз.

Масала II. Ω соҳада (7) тенгламанинг

13

$^{\sigma}=$, ______

D (,0) 0 $^{k}u\ x$ $k\ m = -$ 0, 1, 0 1 $\le \le x$, (8)

$u\ t\ u\ t\ t = = < \le$, (9)

(0,) (0,) 0, 0 1 $_{xx}$

$u\ t\ u\ t =$, (0,) (1,)

(0,) (1,) $_{x\ x}$ $u\ t\ u\ t =$, 0 1 $< \le t$ (10) $_{xxx\ xxx}$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Масала III. Ω соҳада (7) тенгламанинг (10) ва

$u\ t\ u\ t$ (0,) (1,) = , (0,) (1,)

$u\ t\ u\ t =$, 0 1 $< \le t$

$_{xx\ xx}$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Таъриф 2. II масаланинг регуляр ечими деб ^{0}_

$^{1}t\ u\ C(\ )\ ^{-\gamma}\in \Omega$, –

D ( ) $^{k}u\ C\ ^{\sigma}\in \Omega$,

______ $> u\ x\ C\ t$, ___

/ ((((0)) $^{k\ k}\partial\ \partial \in \Omega\cap$

$k\ m = -$ 0, 1 , – $k =$ 0,3 , D ^{m}u

$^{\sigma}$, u, $u_{xxxx}\in$C(Ω) бўлган, Ω

соҳада (7) тенгламани ва (8) - (10) шартларни қаноатлантирувчи $u\ x\ t$ (,) функцияга айтилади.

Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагича:

γ , (0, ,) $k\ m\ m\ N = \in$ - (0,1]интервалдаги ихтиѐрий ҳақиқий

Теорема 3.$_{k}$

$\gamma\ \gamma + >$бўлсин. У ҳолда, агар II масаланинг ечими мавжуд

сонлар бўлиб,$_{0}$1

$_{m}$

бўлса, у ягона бўлади.

Теорема 4. 3-теореманинг шартлари бажарилиб, $(\ )$ (,) $_{x\ t}f\ x\ t\ C\ ^{+\delta}\in \Omega$,

2 ,0

,

$\gamma <$да ихтиѐрий $x\in$[0,1]учун $f\ x\ t$ (,)функция δ ∈(0,1), бўлсин ва 1

m

t

1

$f\, x\, t\, t\, f\, x\, d^{\gamma} (,) ( ) (,)$

= −

τ τ τ −

$(1\ )^{m}$

$\Gamma - \int$, x∈[0,1] (11) γ

m 0

кўринишда ифодаланиб, (0,) (1,), (0,) 0 $_x$

$f\, t\, f\, t\, f\, t$ = =(0 1 ≤ ≤t) шартларни

қаноатлантирсин, бунда$f\, x\, t\, L$ (,) (0,1) ∈ . У ҳолда II масаланинг регуляр ечими мавуд бўлади.

Энди III масалани қарайлик. Қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 5. 3-теореманинг шартлари бажарилиб, ( ) (,) $_{x\,t}f\, x\, t\, C^{+\delta}$ ∈ Ω

4 ,0

,

γ <да ихтиѐрий x∈[0,1]учун $f\, x\, t$ (,)функция t

δ ∈(0,1)бўлсин ва 1

m

ўзгарувчи бўйича (11) кўринишда ифодалансин ва

∂ ∂

$f\, x\, t\, f\, x\, t$ k

(,) (,) , 0,1,2,3

$k\ k$

= =

∂ ∂, 0 1 ≤ ≤t

$k\ k\ x\ x$

= =

0 1

$x\ x$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда III масаланинг регуляр ечими мавжуд ва ягона бўлади.

Тўртинчи параграфда икки ўлчовли Капуто маъносидаги каср тартибли параболик тенглама учун фазовий соҳада Самарский - Ионкин туридаги масала ечилган. Фурье усули ѐрдамида масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаси исботланган, мос спектрал масала хос сонлари ва хос функциялари топилган, бири ортонормал базис, иккинчиси Рисс базиси ташкил қилувчи иккита функциялар тизими кўпайтмасидан иборат бўлган ўзак функциялар тизимининг базис ташкил қилиши исботланган.

$\{(,) : 0 , 1\} _{xy}$ Ω = < < $x\ y\ x\ y$ бўлсин. (0,) Ω = Ω × $_{xy}$ T соҳада

( )

$^{\alpha}$+ + = , α ∈(0,1] (12)

2

$_{C\ t\ xxxx\ yyyy}D\ u\ a\ u\ u\ _0\ 0$

тенглама учун қуйидаги масалани қараймиз.

Масала IV. Ω соҳада (12) тенгламанинг

$u\ x\ x\ y$ (, y,0) (,) =ϕ , (, y) $_{xy}x$ ∈Ω, (13)

∂ ∂ ∂ = = ∈Ω = =

$u\ u\ u$ $y\ t\ k$

k

$_{0\ 0\ 1\ ,}$ 0, ,(,) , 1,3, 0,2

∂ ∂ ∂, (14) $x\ x\ x$

$_{k}x\ x\ x\ y\ t$

= = =

∂ ∂ = ∈Ω =

$u\ u$ $x\ t\ k$

$k\ k$

$_{0\ 1\ ,}$,(,) , 0,2

∂ ∂ (15)

$k\ k\ y\ y\ x\ t$

= =

$y\ y$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бунда $f\ x\ y\ t$ (, ,), ϕ(,) $x\ y$ - маълум функциялар, {(,) : 0 1; 0 } $_{zt}$ Ω = < < < < $z\ t\ z\ t\ T$.

Таъриф 3. IV масаланинг регуляр ечими деб ( )

3,2,0

(, ,) $_{x\ y\ t}u\ x\ y\ t\ C$∈ Ω ∩

, ,

^{4,4,0}∩ Ω $C_{x\ y\ t\ ,\ ,\ ,\ 0}$(,y,) ( ) $_{C\ t}D\ u\ x\ t\ C\ ^{\alpha}$ ∈ Ω бўлган, Ω соҳада (12) тенгламани ва (13) -

( )

(15) шартларни қаноатлантирувчи $u\ x\ y\ t$ (, ,) функцияга айтилади. Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагича:

Теорема 6. ∂ ∂ ∂ ∈ Ω ϕ $x\ y\ C$, $^{4\ 3}$/ ( )$_{xy}$

ϕ(,) $x\ y$ функция

$^{5\ 4}$/ ( )$_{xy}$ ∂ ∂ ∂ ∈ Ω ϕ $x\ y\ C$,

$_{xx\,xx\,x\,xxx}\varphi\ \varphi\ \varphi\ \varphi\ \varphi\ \varphi\ y\ y\ y\ y\ y\ y = = = = \in,$
$(0,)\ (1,), (0,)\ (1,), (0,)\ (0,)\ 0, y\ [0,1]\ _{yy\,yy}\varphi\ \varphi\ \varphi\ \varphi\ x\ x\ x\ x\ x = =$
$= = \in .$
$(,0)\ (,1)\ (,0)\ (,1)\ 0, [0,1]$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда IV масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

§1.5 да Капуто маъносидаги каср ҳосилали тўртинчи тартибли параболик тенглама учун манба функциясини аниқлаш масаласи қаралиб, бунда тенглама ечими билан биргаликда, унинг ноъмалум ўнг томонини ҳам топиш талаб этилади.

$\Omega = < < \{(,) : 0 , 1\}\ x\ t\ x\ t$ соҳада

$_{0\,C\,t\,xxxx}D\ u\ u\ f\ x( ), 0\ 1\ ^{\alpha} + = < \leq \alpha$ (16)

тенглама учун қуйидаги тескари масалани қараймиз.

Масала V. $u\ x\ t\ (,), f\ x( )$ функциялар жуфтини топиш керакки, у қуйидаги хусусиятларга эга бўлсин:

1) $u\ x\ t\ (,)$ функция Ω соҳада узлуксиз, чегаравий шартларда келтирилган узлуксиз ҳосилаларга эга, $f\ x( )\ C(0,1) \in$;

2) Ω соҳада (16) тенгламани қаноатлантиради;

3) $u\ x\ t\ (,)$ функция

$u\ x\ x\ (,0)\ ( ) = \varphi,\ u\ x\ x\ (,1)\ ( ) = \psi,\ 0\ 1 \leq \leq x,$

$u\ t\ (0,)\ 0 = , (0,)\ (1,)$

$u\ t\ u\ t = , (1,)\ 0\ _{xx}$

$u\ t = , (0,)\ (1,)$

$_{x\,x}$ $_{xxx\,xxx}$

чегаравий шартларни қаноатлантиради, бунда $u\ t\ u\ t = , 0\ 1 \leq \leq t$

$\varphi\ \psi\ ( ), ( )\ x\ x$ функциялар

$\varphi\ \varphi\ \psi\ \psi$
$(0)\ (1)\ 0, (0)\ (1)\ 0,$
$= = = =$

$\varphi\ \varphi\ \psi\ \psi$
$''(0)\ ''(1)\ 0, ''(0)\ ''(1)\ 0$
$= = = =$

шартларни қаноатлантирувчи силлиқ функциялар.

$_{2\,,1}\Delta = - - ( )\ 1\ ((2\ )\ )\ n\ E\ n\ _{\alpha}\pi$, $n = 1,2,...$ деб белгилайлик. Қуйидаги теорема
$_{4}$

лар ўринли:

Теорема 7. $_{2}\Delta \neq ( )\ 0\ n$, $n = 1,2,...$ бўлсин. У ҳолда, агар V масала ечими мавжуд бўлса, у ягона бўлади.

Теорема 8. $\varphi( )\ x$, $\psi( )$

xфункциялар

( ) [0,1], (0) (0) (0) 0, (0) (1), (0) (1) ^{IV} ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ x C∈ = = = = = ″ ′ ′ ‴ ‴ ,

5

( ) [0,1], (0) (0) (0) 0, (0) (1), (0) (1) ^{IV} ψ ψ ψ ψ ψ ψ ψ ψ x C∈ = = =

= = ″ ′ ′ ‴ ‴ 5

| ( ) | 0 Δ ≥ > n δ , n =1,2,..., бўлсин, бунда шартларни қаноатлантириб, 2 δ - (0,1)

интервалга тегишли бирор мусбат сон. У ҳолда V масаланинг регуляр ечими мавжуд бўлади.

Диссертациянинг **“Каср тартибли операторли хусусий ҳосилали аралаш тенгламалар учун чегаравий масалалар”** номли иккинчи бобида каср интегро-дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали аралаш тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар ўрганилган.

§2.1 да Капуто маъносидаги ҳосилали тўртинчи тартибли аралаш турдаги тенглама учун чегаравий масала ечилиб, бунда тур ўзгариш чизиғидаги боғланиш шарти бутун тартибли ҳосилали тенгламалардан фарқли ўлароқ интеграл кўринишда берилган.

Ω = < < − < < {(,) : 0 1, } x t x p t q $^-$Ω = Ω ∩ <бўл , (0) t $^+$Ω = Ω ∩ > , (0) t

син, бундаp q, 0 > - ҳақиқий сонлар. Ω соҳада ушбу

α

u D u t f x t u u t

{ 0, 0, (,) , 0,

+ >

= + < (17)

xxxx C t

xxxx tt

тенгламани қарайлик. Бунда α ∈(0,1].

Масала VI.u x t (,)функцияни топиш керакки, у

1) Ωсоҳада узлуксиз, чегаравий шартларда келтирилган узлуксиз ҳосилаларга эга;

2) $\Omega^+ \cup \Omega^-$соҳада (17) тенгламани қаноатлантирсин;

3) ушбу

u t u t u t u t p t q = = = = − ≤ ≤ ,

(0,) (1,) (0,) (1,) 0,

xx xx

u x p x (,) 0, 0 1 − = ≤ ≤

чегаравий шартларни қаноатлантирсин;

4) ушбу

$$_{0\,C\,t\,t}D\ u\ x\ u\ x\ x\ (\ ,\ 0)\ (\ ,\ 0),\ 0\ 1\ ^{\alpha}+\ =\ -\ <\ <\ .$$

боғланиш шартини қаноатлантирсин.

Бешинчи параграфнинг асосий натижаси қуйидагича:

Теорема 9. p сони

$$_{3}\Delta = + \neq (\ )\ (\ )\ \sin(\ )\ \cos(\ )\ 0\ n\ n\ n\ p\ n\ p\ \pi\ \pi\ \pi^{\ 2\,2\,2}\ ,\ n=1,2,...$$

16

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда, агар VI масаланинг регуляр ечими мавжуд бўлса, у ягона бўлади.

Теорема 10. $f\ x\ t\ (\ ,\ )$функция

$$(\ ,\ )\ (\ ,\ )\ ,\ (\ )_{x\,t}\ f\ x\ t\ f\ x\ t\ C\ L$$

$$(\ )^{5}$$

$$\partial$$

$$\in \Omega \in \Omega$$

$$4,0$$

$$\partial'$$

$$,^{2}\ 5$$

$$x$$

$$f\ t\ f\ t\ f\ t = = = ,\ (1,\ )\ (1,\ )\ (1,\ )\ 0_{\ xx\ xxxx}$$

$$(0,\ )\ (0,\ )\ (0,\ )\ 0_{\ xx\ xxxx}\qquad f\ t\ f\ t\ f\ t = = =$$

$|\ (\ )\ |\ 0\ \Delta \geq > n\ \delta$, n =1,2,...бўлсин, бунда

шартларни қаноатлантириб,$_3$

га тегишли ихтиёрий сон. У ҳолда VI масала ечими мавжуд бўлади.

δ - (0,1)

§2.2 да Капуто маъносидаги каср ҳосилали тўртинчи тартибли аралаш тенглама учун тескари масала ечилган. Спектрал ёйилма усулидан фойдаланиб масала ечимининг ягоналик шарти аниқланган ҳамда масала берилганларига қўйилган шартларнинг муҳимлиги асосланган. Ушбу шартлар бузилганда қаралаётган бир жинсли масала тривиал бўлмаган ечимга эга эканлигини кўрсатувчи мисол келтирилган.

$\Omega = < < - < < \{(\ ,\ ) : 0\ 1,\ \}\ x\ t\ x\ p\ t\ q$, (t 0) $^{+}\Omega = \Omega \cap >$, (t 0) $^{-}\Omega = \Omega \cap$ <бўл син, бунда $p\ q$, 0 >. Ушбу

$$\alpha$$

$$u\ D\ u\ t\ f\ x\ \ u\ u\ t$$

$$\{\ 0,\ 0,\ (\ )\ ,\ 0$$

$$+ >$$

$$= \qquad (18)$$

$$+ <$$

$$xxxx\ C\ t$$

$$xxxx\ tt$$

тенгламани қарайлик.

Масала VII. $u\ x\ t$ (,), $f\ x$( )функциялар жуфтини топингки, у қуйидаги хусусиятларга эга бўлсин:

1) $u\ x\ t$ (,)функция ва унинг чегаравий шартларда келтирилган ҳосилала ри Ωсоҳада узлуксиз, $f\ x$( ) C(0,1) $\in$;

2) $^{+\,-}\Omega \cup \Omega$соҳада (18) - тенгламани қаноатлантирсин;

3) $u\ x\ t$ (,)функция

$u\ t\ u\ t\ u\ t\ u\ t\ p\ t\ q = = = = - \le \le$,

(0,) (1,) (0,) (1,) 0,

$xx\ xx$

$u\ x\ p\ x\ u\ x\ q\ x\ x$ (,) ( ), (,) ( ), 0 1 $- = = \le \le \psi\ \phi$,

чегаравий шартларни $\phi\ \psi$ ( ), ( ) $x\ x$функциялар қаноатлантирсин, бунда

$\phi\ \phi\ \psi\ \psi$ (0) (1) 0, (0) (1) 0 $= = = =$,

$\phi\ \phi\ \psi\ \psi$ "(0) "(1) 0, "(0) "(1) 0 $= = = =$

шартларни қаноатлантирувчи силлиқ функциялар;

5) $u\ x\ t$ (,)функция

$_0$(, 0) (, 0), 0 1 $_{C\ t\ t}D\ u\ x\ u\ x\ x\ ^{\alpha} + = - < <$

боғланиш шартини қаноатлантирсин.

$_n\lambda\ \pi = = n\ n$

$_{n\,n\,n\,n}n\ p\ p\ E\ q^{\alpha}\ \Delta = + - - \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ _{\alpha}$бўлсин, бунда, , 1,2,...

2 2 2 4

$_4$( ) sin cos ( )

Теорема 11. ψ( ) р

ϕ( ) xва xфункцияла

( ) ( ) ( ) [0,1], ( ) (0,1), 0, 0, 1,2,3 $d\ x\ d\ x$ $x\ C\ x\ L\ k$

$\phi\ \phi$

2 2

$k\ k$

$\phi\ \phi \in \in = = = _{= =}$,

6 (7) 2 0 1 2 2 $_{k\,k}{}^{x\,x}$

$dx\ dx$

( ) ( ) ( ) [0,1], ( ) (0,1), 0, 0, 1,2,3 $d\ x\ d\ x$ $x\ C\ x\ L\ k$

$\psi\ \psi$

2 2

$k\ k$

$\psi\ \psi \in \in = = = _{= =}$

6 (7) 2 0 1 2 2

$dx\ dx$

$k\ k\ ^{x\,x}$

| ( ) | 0 $\Delta \ge > n\ \delta$, n =1,2,..., бўлсин,

бунда

δ - (0,1)

шартларни қаноатлантириб, 4
интервалдаги бирор мусбат сон. У ҳолда VII масаланинг ягона ечими мавжуд.

| ( ) 0 Δ ≥ > *n* δшартни қаноатлантирувчи *p* сонлар тўплами бўш

Изоҳ 1.4
эмас. Масалан, агар *p* = 2 / πбўлса, у ҳолда

0, 1,2,...,0 ( ) 1 *n n n E q*α
λ λ ≠ = < − < α

*n n E q*α Δ = − − α λ , 4
4

4( ) 1 ( )

бўлади.

| ( ) | 0 Δ ≥ > *n* δшарт *n k* =да ва *p* ва *q* нинг бирор қиймат

Изоҳ 2. Агар 4
ларида бузилса, яъни

4( ) sin cos ( ) 0 *k k k k n p p E q*α Δ = + − − = λ λ λ λ α
2 2 2 4

бўлса, у ҳолда бир жинсли VII масала тривиал бўлмаган ечимга эга бўлади.

Масалан,

E q A L B f ( ) 1, , λ λ λ

2 4 4
α
λ λ‾

= = = =

k k k
α
E q E q

бўлса, у ҳолда

( ) 1 ( ) 1
− − − −
k k k k
4 4
α α
α α
k k

sin , 0, λ λ λ
4 4

⌠⌠⌠ ⌡ − − − ||| ⋅ > *E q E t x t* ( ) ( ) 2

α α
2
α α
k k
||⌡ − −
E q

( ) 1

k

$u\,x\,t\,(\,,\,)^{\alpha}_{\alpha}$ 4 λ

n

= { |( ) − − − · < | ( ) − − (

λ λ λ λ λ sin cos ( ) 2 sin , 0, $t\,t\,E\,q_{x\,t}$

2 2 2 4

α

2

$k\,k\,k\,k$

$E\,q$ α

( ) 1 k

α λ

α

4

n

$E\,q\,f\,x\,x$ ( ) ( ) 2 sin λ λ

4 4 − α

= · − −

$k\,k$ 2

α λ k

$E\,q$

( ) 1

α λ

α

4

k

функциялар жуфти бир жинсли VII масаланинг ечими бўлади. §2.3 да каср ҳосилали параболо-гиперболик тенглама учун чегаравий масала ечилган бўлиб, Грин функцияси ва интеграл энергияси усулларидан фойдаланиб масаланинг регуляр ечими мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема исботланган.

$x > 0, y > 0$да $y = 1, x = 1$тўғри чизиқларнинг A_0B_0, B_0B кесмалари, $x > 0$, $y < 0$да (20) тенглама $x + y = 0, x - y = 1$характеристикаларининг AC, BC кесмалари, $x < 0, y > 0$да (20) тенглама $x + y = 0, y - x = 1$характерис тикаларининг AD, A_0D кесмалари билан чегараланган $\Omega \subset R^2$соҳада

2 2

∂^{α}, $\alpha \in (0,1]$ (19) $u \cdot_{C\,y} =$

1 sgn( )

$-\partial$

$x y\,u$ 1 sgn( )

− + $x y$

− $D\,u\,f\,x\,y$

∂ ^{2} ∂ y (,)
x 2 $_{2}$ ^{0} 2

тенгламани қараймиз.

Таъриф 4. $u\ x\ y$ (,)функция (19) - тенгламанинг регуляр ечими дейилади, агар у тенгламада келтирилган тартибдаги узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, уни қаноатлантирса.

18

Масала VIII. Шундай бир $u\ x\ y$ (,) C( ) ∈ Ωфункцияни топиш керакки, у: 1) (19) тенгламанинг $\Omega\backslash(AA_0 \cup AB)$ соҳадаги регуляр ечими бўлсин; 2) (,) 0

$u\ x\ y\ _{BB \cup DC}$ =чегаравий шартни қаноатлантирсин; $_0$

3) тур ўзгариш чизиғида ушбу

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u(-0, y) = u(+0, y),$$

$u\ x\ l\ x\ y\ u\ x\ y\ m\ x\ u\ x\ n\ x$ $^{-\alpha}$

(, 0) ( ) lim (,) ( ) (,0) ( )

− = ⋅ + ⋅ + ,

1

$y\ y$

1 1 1 $_0$

y → +

$u\ y\ l\ y\ u\ y\ m\ y\ u\ y\ n\ y$ − = ⋅ + + ⋅ +

$_{2\,2\,2}$ (0,) ( ) (0,) ( ) (0,) ( )

$x\ x$

уланиш шартларини қаноатлантирсин, бунда l (t),m (t), n (t) $_{i\,i\,i}$, t i ∈ = [0, 1], 1,2 - маълум функциялар.

Олтинчи параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремада келтирилган.

Теорема 12. Агар ушбу

$f\ x\ y\ C$ (,) ( ),0 1 $^{\delta}$ ∈ Ω < < δ , ^{1}

( ) [0,1], ( ), ( ) [0,1] $_{i\,i\,i}$ $l\ t\ C\ m\ t\ n\ t\ C$ ∈ ∈ ,

( ) 0, ( ) 2 ( ) ( ) 0, (1) 0, [0,1], 1,2 $_{i\,i\,i\,i}$ $l\ t\ l\ t\ l\ t\ m\ t\ l\ t\ i$ ≠ − ⋅ ≥ > ∀ ∈ = ′

2

шартлар бажарилса, у ҳолда VIII масала ягона ечимга эга.

Диссертациянинг **“Адамар, Адамар - Маршо туридаги интегро дифференциал операторлар ва уларнинг қўлланилиши”** деб аталувчи учинчи бобида гармоник функциялар ва Гѐльдер синфларида эллиптик тенглама учун классик бўлмаган масалалар ечилган.

3.1 ва 3.2 -параграфларда гармоник функциялар синфида Адамар, Адамар-Маршо маъносидаги интегро-дифференциал операторларни умумлаштирувчи операторларнинг хоссалари ва уларнинг чегаравий масалаларни ечишда қўлланилиши ўрганилган бўлиб, §3.3 да ушбу ечимларнинг Гѐльдер синфларида силлиқлиги масалалари ўрганилган.

$\{ :| | 1\} ^{n} \Omega = \in < x R x$ - n ўлчовли бирлик шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega$ - унинг чегараси, $u x( )$ - Ω шарда гармоник функция бўлсин. Ушбу

1

$J u x s s u sx ds ^{\alpha \alpha \mu}$

$[ ]( ) | \ln | ( )$

$^{1}{}_{1 1}$

$- -$

$= \Gamma \int ,\ \mu$

$( ) \alpha \quad 0$

$D u x s s u x u sx ds u x ^{\alpha \alpha \mu \alpha} [ ]( ) | \ln | ( ) ( ) ( ) ^{- + -} = - +$

$\alpha \qquad ^{1}{}_{(1) 1}$

$\Gamma - \int ,$

$\mu \qquad (1) \alpha \quad 0 \qquad [ ] \qquad \mu$

операторларни қарайлик, бунда $0 1 < < \alpha$, $0 \leq \mu$ - ҳақиқий сонлар,$\Gamma( ) \alpha$ - Эйлернинг гамма функцияси. Бу операторлар Адамар, Адамар-Маршо туридаги каср интеграл ва дифференциал операторлари деб аталади.

Айтайлик,$_{1 2} (, ,...,) \alpha \alpha \alpha \alpha =_{m}$, $_{1 2} (, ,...,) \mu \mu \mu \mu =_{m}$бўлсин, бунда m - натурал сон, $0 1 < < \alpha_{j}$, 0, $1,2,...,$ $_{j} \mu \geq =j m$. Юқоридаги операторлардан умумийроқ бўлган

$J u x J u x J J J u x ^{\alpha \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha}$

$_{(, ,...,)} [ ]( ) [ ]( ) [...[[ ]]...]( ) ^{m m m}$

$= = ,$

$(, ,...,)$

$- \quad 1 2 1 1$

$\mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu$

$1 2 1 1$

$m m m -$

$D u x D u x D D D u x ^{\alpha \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha \alpha} {}_{(, ,...,)} [ ]( ) [ ]( ) [...[[$

$]]...]( ) ^{m m m} = = .$

$(, ,...,)$

$- \quad 1 2 1 1$

$\mu \mu \mu \mu \mu \mu \mu \, 1 2 1 1$

$m m m -$

операторларни қарайлик. Ушбу белгилашларни киритайлик:

$_{k m m} k k k ^{\alpha \alpha \alpha}$

$\gamma \mu \mu \mu = + \cdot + \cdot \cdot +$

$_{, 1 2} ( ) ( ) ... ( ) ^{m}$

$_{1 2}$

Баъзи-бир $i m \in\{1,2,..., \}$лар учун0

μ_{i}=бўлсин. Бундай билан белгилайлик.

μ_{i}лар сонини p

Теорема 13. $0 1 < < \alpha$, $\mu \geq 0$ва $u\, x(\ )\ \Omega$соҳада гармоник функция бўлсин. У ҳолда ихтиѐрий $x \in \Omega$учун қуйидаги тенгликлар ўринли: 1

$u\ x\ u\ s\ s\ D\ u\ sx\ ds\ ^{\alpha\ \alpha}$

$(\ )\ (0)\ |\ \ln\ |\ [\ ](\ )$

$- - = + \Gamma \int ,$

1)

$\mu = 0$да $^{11\ 1}{}_{0}$

$(\ )\ \alpha \quad {}^{0}$

1

$- -$

2)

$= \Gamma \int .$

$\mu > 0$да $^{11\ 1}{}_{0}\ u\ x\ s\ s\ D\ u\ sx$

$ds\ ^{\alpha\ \alpha}(\ )\ |\ \ln\ |\ [\ ](\ )$

$(\ )\ \alpha \quad {}^{0}$

Теорема 14. $_{1\ 2}(\ ,\ ,...,\ )\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha =_{m},\ 0\ 1 < < \alpha_{j},\ 0,\ 1,2,...,\ _{j}\ \mu \geq = j\ m$ва $u\ x(\ )\ \Omega$ соҳада гармоник функция бўлсин. У ҳолда

1) агар $p = 0$бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли:

$1\ 1$

$= \Gamma \int \int ,$

1

$u\ x\ ds\ s\ s\ D\ u\ sx\ ds\ ^{\alpha\ \mu\ \alpha}$

$(\ )\ ...\ |\ \ln\ |\ [\ ](\ )$

$- -$

$1\ 1$

$(\ )^{m}$

$\alpha \quad {}^{1}_{0\ 0} \quad \mu$

2) агар $p > 0$бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли:

$1\ 1$

$- - = + \Gamma \int \int ,$

1

$u\ x\ u\ ds\ s\ s\ D\ u\ sx\ ds\ ^{\alpha\ \mu\ \alpha}(\ )\ (0)\ ...\ |\ \ln\ |\ [\ ](\ )$

$1\ 1$

$(\ )^{m}$

бунда $\alpha \quad {}^{1}_{0\ 0} \quad \mu$

$_{1\ 2}(\ )\ (\ )\ (\ )\ ...\ (\ )\ \Gamma = \Gamma \cdot \Gamma \cdot \cdot \Gamma\ \alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha_{m},\ ^{1\ 2}\ {}_{1\ 1\ 1\ 1}$

$\alpha - \alpha\ \alpha - - \alpha -$

$|\ \ln\ |\ |\ \ln\ |\ |\ \ln\ |\ ...\ |\ \ln\ |^{m}$

$s\ s\ s\ s$

= · · · ,

μ− μ μ − − μ −
1 2 1 1 1 1
= · · · , 1 2 1 1 2 (… ,…, …) m m n sx s s s x s s s x = · · · · · · . s

s s s

…m

Теорема 15. u x( ) Ωшарда гармоник функция бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

[ ] = − [ ] бўлади,

1) агар 2) агар

[ ] [ ] = = [ ] [ ]

μ = 0бўлса, у ҳолда 0 0 J D u x u x u 3) агар

[ ] ( ) ( ) (0) α α μ = 0ва u(0) 0 бўлади.

=бўлса, у ҳолда 0 0 D J u x u x [ ] ( ) μ > 0бўлса, у ҳолда J D u x D J u

( ) α α x u x [ ] ( ) [ ] ( ) ( ) α α α α μ μ μ μ

[ ] = [ ] бўлади,

Теорема 16. Агар u x( ) Ωшарда гармоник функция бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

1) агар p = 0бўлса, у ҳолда J D u x u x D J u x u x [[ ]]( ) ( ), [[ ]]( ) ( ) α α α α = = μ μ μ μ бўлади,

2) агар p > 0бўлса, у ҳолда J D u x u x u [[ ]]( ) ( ) (0) α α μ μ = −бўлади,

3) агар p > 0ва u(0) 0 = , бўлса, у ҳолда D J u x u x [[ ]]( ) ( ) α α μ μ =бўлади.

Ω соҳада ушбу чегаравий масалаларни қарайлик:

Масала IX. 0 1, 0 < < > α μбўлсин. Ω шарда гармоник, ( ) ( ) 2 C C Ω ∩ Ω

μфункция Ωда узлуксиз синфга тегишли u x( )функцияни топингки, D u x [ ]( ) α ва $D u x f x x$ [ ]( ) ( ), $^{\alpha}$

$_{\mu}$ = $\in\partial\Omega$чегаравий шартни қаноатлантирсин.

Масала X.$_{1\,2}$(, ,...,) α α α α =$_{m}$, $_{1\,2}$(, ,...,) μ μ μ μ =$_{m}$, 0 1 < < α $_{j}$, 0 μ $_{j}$ ≥ , $j\ m$ =1,2,...,бўлсин. Ω шарда гармоник, ( ) ( )

^{2} $C\ C$ Ω ∩ Ωсинфга тегишли $u\ x$( )

$_{\mu}$функция Ωда узлуксиз ва $D u x f x$ [ ]( ) ( ) $^{\alpha}$

функцияни топингки, $D u x$ [ ]( ) $^{\alpha}$ қаноатлантирсин.

x∈∂Ωчегаравий шартни $_{\mu}$= ,

$v\ x$( )- Ω шардаги $v x x v x f x$ ( ) 0, , ( ) ( ) Δ = ∈Ω = $_{\partial\Omega}$Дирихле масаласининг ечими бўлсин. Ушбу параграфнинг асосий натижаларини келтирайлик.

Теорема 17. ҳолда IX масала ечими

μ > 0ва $f\ x\ C$ ( )∈ ∂Ω( )бўлсин. У

мавжуд, ягона ва бу ечим $u x J v x$ ( ) [ ]( ) $^{\alpha}$

= эга.

$_{\mu}$кўринишга

Теорема 18.$f\ x\ C$ ( )∈ ∂Ω( )бўлсин. У ҳолда

1) агар p = 0бўлса, у ҳолда X масала ечими мавжуд, ягона ва $u x J v x$ ( ) [ ]( ) $^{\alpha}$

= эга,

$_{\mu}$кўринишга

2) агар p > 0бўлса, у ҳолда X масала ечими фақат ва фақат $_{\partial\Omega}$ = ∫шарт

бажарилгандагина мавжуд бўлади. Агар X масала ечими

$f x dx$ ( ) 0

мавжуд бўлса, бу ечим ўзгармас қўшилувчи аниқлигида ягона бўлиб, у $u x C J v x$ ( ) [ ]( ) $^{\alpha}$

= + $_{\mu}$кўринишга эга, бунда C - ихтиѐрий ўзгармас сон.

$^{\lambda}$∈ ∂Ω , μ > 0, λ > 0, α **Теорема 19.**$f\ x\ C$ ( ) ( ) λ α+

∈(0,1)бўлиб, λи

лар бутун бўлмасин. У ҳолда IX масала ечими C ( ) $^{\lambda\ \alpha+}$ Ωсинфга тегишли бўлиб, $D u x C$ [ ]( ) ( ) $^{\alpha\ \lambda}$

$_{\mu}$ ∈ Ωбўлади.

Теорема 20.$f\ x\ C$ ( ) ( ) $^{\lambda}$∈ ∂Ω , μ > 0, 0 < λ , $_{1\,2\,\cdots\,m}$

γ α α α = + + λи

+бўлиб,

λ γ +лар бутун бўлмасин. У ҳолда X масала ечими C ( ) $^{\lambda\ \gamma\ +}$ Ωсинфга тегишли.

Қуйидаги лемма тадқиқ қилинаётган масала учун олинган ечим силлиқлигини яхшилаб бўлмаслигини кўрсатади.

Лемма 3. $u(x)$ функция IX масала ечими бўлиб, $D[u](x)\in C_{\mu}^{\alpha\lambda}(\Omega)$ бўлсин. У ҳолда $u(x)\in C^{\lambda+\alpha}(\Omega)$ бўлади.

Изоҳ 3. Бу леммадан, агар IX масала ечими учун $D[u](x)\in C_{\mu}^{\alpha\lambda}(\Omega)$ бўлиб, бирор $\varepsilon>0$ учун $D[u](x)\notin C_{\mu}^{\alpha\lambda+\varepsilon}(\Omega)$ бўлса, $u(x)\notin C^{\lambda+\alpha+\varepsilon}(\Omega)$ бўлишлиги келиб чиқади.

Диссертациянинг **“Чегаравий шартларида каср интегро-дифферен циал операторлари қатнашган чегаравий масалаларни ечиш”** деб аталувчи тўртинчи бобида эллиптик тенгламалар учун каср тартибли Риман-

Лиувилл ва Капуто операторларини умумлаштирувчи чегаравий операторли масалалар ечилган.

§4.1 да гармоник функциялар синфида умумлашган интегро-дифферен циал операторларнинг хоссалари ва уларнинг нолокал Бицадзе - Самарский туридаги масалаларни ечишда қўлланилиши ўрганилган.

α - (0, 1)интервалга тегишли бирор ҳақиқий сон, $m\in N$ бўлсин. Қуйидаги

$$I_m^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t^m-s^m)^{\alpha-1}f(s)\,ds^m,\quad t>0,$$

$$D_m^{\alpha}f(t)=\frac{d}{dt^m}I_m^{1-\alpha}f(t),$$

=′

$_{0,0,1++-}mt\ dt$ ++

m

$( )\ ( )\ _{C\,m\,m} D\,f\,t\,I\,f\,t\ _{0,0,}$

интегро-дифференциал операторларни қарайлик.

Ω = < { :| | 1} $x\ x\ -^{n} R$даги бирлик шар, n ≥ 2бўлиб, ∂Ω - унинг чегараси бўлсин. §4.1 нинг асосий натижаси қуйидагилардан иборат: **Лемма 4.** Агар u x( )функция Ωда гармоник функция бўлса, $r\ D\ u\ x\ ^{\alpha\,\alpha}{}_{+}$ҳамΩсоҳада гармоник функция бўлади.

$_{0,,}( )\ ^{m}{}_{r\,m}$

Лемма 5. $u\ x$( ) Ωда етарли силлиқ функция бўлиб, $_{0,,}( )\ ( )\ ^{m}{}_{r\,m}$

$r\ D\ u\ x\ C\ ^{\alpha\,\alpha}{}_{+} \in \Omega$

бўлсин. У ҳолда ихтиѐрий x∈Ωучун қуйидиги

m

$u\ x\ s\ s\ D\ u\ sx\ ds\ ^{\alpha\,\alpha}$

$( )\ (1\ )\ ( )$

$^{1}{}_{1\,1}$

$- -$

$( )^{m\,m}{}_{s\,m}$

Γ∫

= − +

$_{0,,}{}_{0}$

α

тенглик ўринли.

Ушбу

1

$( )^{m} P\ x\ y\ s\ s\ P\ s\ x\ y\ ds\ _{m}$

$(,)\ (1\ )\ (,) = -$

$^{1}{}_{1\,1/}$

$- -$

α α

Γ∫ (20)

α

’0

α

функцияни қарайлик, $^{1\,2}(,)\ (1\ |\ |\ )\ |\ |\ ^{n} P\ x\ y\ x\ x\ y\ \omega_{n}- -$

= − − - Лаплас тенгламаси учун

Дирихле масаласининг Пуассон ядроси.

: , k=1,2,..., $_{k\,k\,k}$ γ $_1$ ∂Ω → Γ ⊂ Ω ⊂ Ω Γ ≠ ∅- узлуксиз акслантиришлар,( ) $_k$
a x

∞

a x x
(0,1,2...) *k* =лар узлуксиз функциялар
бўлиб,
∑ ∈∂Ωқатор текис | ( ) |, $_k$

k
=
0

яқинлашувчи қатор бўлсин.

Ω соҳада қуйидаги чегаравий масалани қарайлик:

Δ = ∈Ω *u x x* ( ) 0, , (21)

∞
D u x a x u x a x u x f x α
( ) ( ) ( ) ( ) [( )] ( ), $_{m\,k\,k}$

− = + ∈∂Ω ∑, (22)

0 , 0 + =
k 1 γ

бунда
олинган
α ∈(0, 1), *m N* ∈бўлиб, $D_{0\,,m}$
$_+$- *r x* =| |вектор йўналиши бўйича
α

умумлашган Риман - Лиувилл маъносидаги каср тартибли ҳосилани билди ради.

Таъриф 5. (21), (22) масаланинг ечими деб, (Ω) ∩C(Ω)
^{2} *C*синфга
тегишли бўлган *u*(*x*) гармоник функцияга айтиладики, $_{0\,,}$ ( ) ( ) $^m{}_m$
бўлиб, (22) шарт классик маънода *r D u x C* $^{α\,α}{}_+$ ∈ Ω
бажарилади. ∞

− + =
x a x P x y a x P x y y dS f x x μ γ μ $_{α\,α}$ ( ) (( ) (( ),) ( ) (,)) ( ) ( ), $_{k\,m\,k\,m\,y}$

∈∂Ω ∫ ∑ (23)

∂Ω = k , 0 ,
1

тенгламани қарайлик, бунда $_{,}(\ ,\ )\ P\ x\ y\ _{\alpha\ m}$- (20) - формула билан аниқланади. Қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 21.$_1$, k=1,2,... $\Gamma \subset \Omega \subset \Omega_k$бўлиб,

$$\sum^{\infty} \le |\,(\,)_1 \quad |$$

k $\quad$ $_{k,\ 0}\,\alpha$ $\quad$ (1) $\in\partial\Omega$

=

бўлсин. У ҳолда Γ –

$a\ x\ x$

1

∞

1) агар $\Gamma - \sum$ бўлса, у ҳолда (21), (22) масала $a\ x\ x$ $(\,)\,,$ $\neq \in\partial\Omega$ $(1\,)^k$

$_k$ $\overset{=}{_0}$ α

ихтиѐрий $f\ x\ C\ (\,)\ (\,) \in \partial\Omega$учун бир қийматли ечимга эга,

∞

1

2) агар $\Gamma - \sum$ бўлса, у ҳолда (21), (22) масала $a\ x\ x$ $(\,)\,,$ $= \in\partial\Omega$ $(1\,)^k$

$_k$ $\overset{=}{_0}$ α

(ўзгармас қўшилувчи аниқлигида) ечилиши учун

$$= \int_{\partial\Omega} f\ x\ x\ dS\ \mu\ (\,)\,(\,)\ 0\ _x \quad (24)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир, бунда $_0\ \mu\ (\ )\ x$ - (23) тенглама ечими бўлиб, ушбу шартлар бажарилганда бу тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари сони 1 га тенг.

§4.2 да силлиқ функциялар синфида §4.1 да киритилган интегро дифференциал операторларнинг хоссалари ўрганилган. Ушбу операторлар нинг қўлланилиши сифатида Пуассон тенгламаси учун Дирихле ва Нейман масалаларини умумлаштирувчи икки чегаравий масала қаралган ҳамда қаралаѐтган масала ечимларининг Гѐльдер синфида силлиқлиги масалалари ўрганилган.

Ωсоҳада

$$\Delta = \in\Omega\ u\ x\ g\ x\ x\ (\,)\ (\,), \quad (25)$$

тенглама учун қуйидаги масалаларни қараймиз.

Масала XI. Ω соҳада (21) тенгламани ва

α

$_{0,,}$( ) ( ), $D\ u\ x\ f\ x\ x\ _{r\ m}$

$_{+}$ = ∈∂Ω. (26)

чегаравий шартни қаноатлантирувчи u(x) функцияни топинг.

Масала XII. Ω соҳада (21) тенгламани ва

$_{0,,}$( ) ( ), $_{C\ r\ m}D\ u\ x\ f\ x\ x$ $^{α}{}_{+}$ = ∈∂Ω, (27)

чегаравий шартни қаноатлантирувчи u(x) функцияни топинг,

α ∈(0, 1], $D_{0,,r\ m}$ α α

$_{+}$лар $r\ x$ =| |вектор йўналишидаги

Бунда

$_{+},\ _{C\ r\ m}D_{0,,}$

умумлашган каср ҳосилали операторлар.

Ушбу белгилашларни киритамиз:

23

$_{0,,*\,0,,}$( ) ( ), ( ) ( ) $^{m\ m}B\ u\ x\ r\ D\ u\ x\ B\ u\ x\ r\ D\ u\ x\ _{r\ m\ C\ r\ m}$

α α α α α α = =

+ +,

$m\ ^{m\ m}\ B\ u\ x\ s\ s\ u\ sx\ ds$ $^{α\,α\,α}$( ) (1) ( )

= −

$^{1}{}_{1\ (1\ )\ 1}$

− − − −

Γ∫.

( ) α ^{0}

Таъриф 6. XI (XII) масаланинг ечими деб (Ω) ∩C(Ω)

^{2} Cсинфга тегишли

бўлган u(x) гармоник функцияга айтиладики, бунда $B\ u\ x\ C$ ( ) ( ) ^{α}∈ Ω (( ) ( )) $B\ u\ x\ C$ ^{α}∈ Ωбўлиб, (26) ((27))) шарт классик маънода бажарилади.

*

$v\ x$( )функция ушбу

$_{1}$Δ = ∈Ω = ∈∂Ω $v\ x\ g\ x\ x\ v\ x\ f\ x\ x$ ( ) ( ), , ( ) ( ), . (28)

Дирихле масаласининг ечими бўлсин. Ушбу параграфнинг асосий натижалари қуйидагилар:

Теорема 22.0 1 < < αваm N∈бўлиб, ^{2}

$f\ x\ C$ ( ) ( ) $^{λ+}$∈ ∂Ωва^{1}

$g\ x\ C$ ( ) ( ) $^{λ+}$∈ Ω

бўлсин, бунда 0 1 < < λ . У ҳолда XI масала ечими мавжуд ва ягона бўлиб, у

( ) =кўринишга эга, бунда $v\ x$( ) - ўнг

$^{\lambda+}$ Ωсинфга тегишли ва $u\ x\ B\ v\ x\ (\ )\ (\ )^{-\alpha\ 2}$

C

томони $(\ )$ $g\ x\ x\ B\ x\ g\ x\ (\ )\ |\ |\ |\ |\ (\ )$

$-\alpha$

$2\ 2$

$=$бўлган (28) - масала ечимидир. $_1$

Теорема 23. $0\ 1 < < \alpha$ ва $m\ N \in$ бўлиб, ^{2}

$f\ x\ C\ (\ )\ (\ )^{\lambda+} \in \partial\Omega$ ва

$g\ x\ C\ (\ )\ (\ )_1^{\lambda+} \in \partial\Omega$ бўлсин. У ҳолда XII масала фақат ва фақат

$\int \int$

1

$f\ x\ dS\ x\ x\ B\ x\ g\ x\ dx$

$(\ )\ |\ |\ |\ |\ (|\ |\ (\ ))$

$2\ 2\ 2$

$-\ -\ \alpha$

$x \quad = \quad -\ n\ \frac{n}{2} \quad *$

$\partial\Omega\ \Omega$

шарт бажарилгандагина ечимга эга бўлади. Агар ечим мавжуд бўлса, бу ечим ўзгармас қўшилувчи аниқлигида ягона бўлиб, у $(\ )$

$^{\lambda+}$ Ωсинфга

^2C

$=$кўринишга эга, бунда $v\ x(\ )$ - ўнг томони

тегишли ва $u\ x\ B\ v\ x\ (\ )\ (\ )^{-\alpha}$

$(\ )$

$=$бўлган (28) тенгламанинг $v(0)\ 0 =$шартни қаноат $_{1\ *}$ $g\ x\ x\ B\ x\ g\ x\ (\ )\ |\ |\ |\ |$

$(\ )^{-\alpha}$

$2\ 2$

лантирувчи ечимидир.

§4.3 да каср тартибли, чегаравий шартида Риман-Лиувилл оператор қатнашган Пуассон тенгламаси учун Бицадзе - Самарский туридаги масала ечилган. Шу билан бирга гармоник функциялар синфида масала ечилишининг зарурий ва етарли шартлари аниқланган.

§4.1 аниқланган Ω соҳада қуйидаги чегаравий масалани қараймиз.

Масала XIII. Ω соҳада (21) тенгламани ва

$D\ u\ x\ a\ x\ u\ x\ a\ x\ u\ t\ x^{\alpha\infty}$

( ) ( ) ( ) ( ) [( )] $_{RL\ r\ k\ k}$

− = + ∑

0 0

k

=

1

∞

+ + ∈∂Ω ∑ (29) $b\ x\ r\ D\ u\ x\ t\ x\ f\ x\ x\ ^{\beta\ \beta}$

( ) ( ) [( )] ( ), $^{k\ k}$

($_0$)

k $k\ RL\ r\ k$ 1

=

нолокал шартни қаноатлантирувчи $u\ x$( )функцияни топинг, бунда , (0, 1) α β_k ∈ , , (0,1) D_{or}

γ

γ ∈ - r =|x| вектор йўналишидаги каср Риман-Лиувилл

24

:$_{k\ k}$ t ∂Ω → Γ ⊂ Ω ⊂ Ω, 1,2,..., $_k$

ҳосиласи, $_1$ $a\ x$( ), ( ) $_k$ k = Γ ≠ ∅ - узлуксиз акслантириш

$a\ x$, ( ), 1,2... $_k$

лар,$_0$ функциялардир.

$b\ x\ k$ = - маълум

Таъриф 7. XIII масаланинг ечими деб, (Ω) ∩C(Ω)

^{2} Cсинфга тегишли

бўлган u(x) гармоник функцияга айтиладики, $_0$( ) ( )

$r\ D\ u\ x\ C\ ^{\alpha\ \alpha}$ ∈ Ωбўлиб, (29)

r

шарт классик маънода бажарилади.

Ушбу

1

$P\ x\ y\ s\ s\ P\ sx\ y\ ds\ ^{\gamma\ \sigma}$

$_{\gamma\ \sigma}$ γ σ

(,) (1) (,) , , (0,1)

$^{- -}$ = − ∈

Γ∫ ( ) $^1{}_1$

’0

σ

функцияни киритайлик ва

∞

$x\ a\ y\ P\ y\ x\ a\ y\ P\ t\ y\ x\ \mu\ _{\alpha\alpha\alpha\alpha}(\ )\ (\ (\ )\ (\ ,\ )\ (\ )\ (\ (\ ),\ )$

$k\ k_{k}$

$- + + \int \sum^{0,,}{}_{1}$

$\partial\Omega \quad \infty \quad =$

$+ = \sum (30)\ b\ y\ P\ t\ y\ x\ y\ dS_{\alpha\alpha\beta}\ \mu$

$(\ )\ (\ (\ ),\ ))\ (\ )\ 0$

$k\ k\ y$

$k \quad , \quad k$

$= \quad 1 \quad -$

тенгламани қарайлик, бунда $P\ x\ y\ (\ ,\ )$ - Пуассон ядроси.

Лемма 6. $u\ x(\ )$функция Ωсоҳада гармоник бўлиб, $_{0}(\ )\ (\ )\ _{RL\ r}r\ D\ u\ x\ C^{\alpha\ \alpha} \in \Omega$, $\alpha \in (0,1)$бўлсин. У ҳолда ихтиѐрий $\beta\ \alpha \in [0,\ )$учун $_{0}(\ )\ _{RL\ r}D\ u\ x^{\beta}$ҳосила ва қуйидаги мавжуд 1

1

$(\ )^{RL\ r\ RL\ r}\ r\ D\ u\ x\ s\ D\ u\ sx\ ds^{\beta\beta\alpha\beta\beta}$

$(\ )\ (1\ )\ (\ ) = -$

$\alpha\ \beta^{--}{}_{1}$

$\Gamma - \int$

формула ўринли.

0 0

$a\ x(\ ),\ (\ ),\ (\ )\ _{k\ k}a\ x\ b\ x\ ,\ k = 0,1,2...$

0

Теорема 24.$_{1}$, k=1,2,... $\Gamma \subset \Omega \subset \Omega\ _{k}$бўлиб, $_{0}$ - узлуксиз функциялар бўлсин. У ҳолда

$b\ x$

$(\ )\ 1$

$+ < \in\partial\Omega \sum \sum \Gamma - \Gamma -$бўлса, у ҳолда XIII

$\infty\ \infty$

$a\ x\ x$

$(\ )\ ,$

1) агар $\quad \beta\ \alpha$

$k \quad k$

$(1\ )\ (1\ )$

$k\,k_k$

$= =$

$0\,0$

масала ихтиѐрий $f\,x\,C\,(\,)\,(\,) \in \partial\Omega$ учун бир қийматли ечимга

эга; $b\,x$

$(\,)\,1$

$+ = \in\partial\Omega \sum \sum \Gamma - \Gamma -$ бўлса, у ҳолда XIII

$\infty\,\infty$

$a\,x\,x$

$(\,)\,,$

2) агар $_k$ $\beta\,\alpha_k$

$(1\,)\,(1\,)$

$k\,k_k$

$= =$

$0\,0$

масала ечимга эга бўлишининг зарурий ва етарли шарти (24) кўринишга эга. Бу ерда $_0\,\mu\,(\,)\,x$ - (30) - тенглама ечими бўлиб, ушбу шартлар бажарилганда унинг чизиқли эркли ечимлари сони 1 га тенг.

ХУЛОСА

Диссертация иши каср тартибли интегро-дифференциал операторлар нинг хоссаларини ўрганиш ва уларни хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш муаммоларига қўллашга бағишланган.

Диссертация ишида олинган натижалари бўйича қуйидагиларни хулоса қилиш мумкин:

25

1. Капуто ва Джрбашян-Нерсесян маъносидаги каср тартибли ҳосилали тўртинчи тартибли параболик тенглама учун Самарский-Ионкин туридаги нолокал масалалар тадқиқ қилинган, ушбу масалаларга мос ўзак функцияларининг Рисс базиси ташкил этиши кўрсатилган. Олинган натижалар кўплаб бошқа хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун юқоридагиларга ўхшаш масалаларнинг хоссалари, уларнинг спектрларини ўрганишда асос бўлиб хизмат қилиши мумкин.

2. Каср тартибли, аралаш турдаги параболо-гиперболик тенгламалар учун интеграл боғланиш шартли бир қанча тўғри ва тескари масалаларнинг коррект ечилиши кўрсатилган. Ушбу натижалар бутун тартибли ҳосилали аралаш турдаги тенгламалар учун олинган натижаларни умумлаштириб, келгусида иккинчи ва юқори тартибли аралаш турдаги тенгламалар ѐки бундай тенгламаларга олиб келувчи тадбиқий масалаларда қўлланилиши мумкин.

3. Гармоник функциялар ва Гѐльдер синфларида каср тартибли интегро-дифференциал операторларнинг хоссалари, уларни чегаравий масалаларни ечишга қўллаш муаммолари ўрганилган. Олинган натижалар

гармоник функциялар ва Гѐльдер синфларида янги каср тартибли операторларни киритиш ва умумлаштириш, улардан чегаравий масалаларни ечиша фойдаланиш учун асос бўлишлари мумкин.

4. Диссертация ишида фойдаланилган усуллар ва олинган натижалардан каср ҳисоби, дифференциал ва интеграл тенгламалар, математик физика тенгламалари каби фанлар бўйича назарий тадқиқотларда фойдаланиш, диссертация бўлимлари эса “Математика” мутахассислиги бўйича таълим олаѐтган талабаларга махсус курс сифатида киритилиши мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

КАДИРКУЛОВ БАХТИЯР ЖАЛИЛОВИЧ

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

г. Ташкент – 2017 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.DSc/FM7

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трѐх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещѐн на веб-странице по адресу http://fti-kengash.uz/ и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант: Ашуров Равшан Раджабович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Умаров Сабир Рахимович
доктор физико-математических наук, профессор

Тахиров Жазил Останович
доктор физико-математических наук, профессор

Хасанов Анваржон

доктор физико-математических наук

Ведущая организация: Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _________ 2017 г. в _______ часов на заседании научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (регистрационный номер ______). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2017 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2017 г.).

А.С.Садуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

М.С.Салахитдинов
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Множество научно-практических исследований, проводимые в мировом масштабе, показывают актуальность исследования краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка. Первоначально, итальянскими учеными вместо классического уравнения диффузии был предложен новая модель – уравнение диффузии дробного порядка, которое послужило основой создания новых математических моделей многих процессов в областях физики, биологии, электрохимии. Дифференциальное и интегральное исчисления дробного порядка возникли в процессе нахождения эффективных способов моделирования таких процессов. Сложность уравнений, связанных с такими моделями, и отсутствие разработанных в достаточной мере аналитических и числовых методов, развитие исследований, связанных с такими уравнениями, является одним из приоритетных направлений.

В годы независимости в нашей стране усилилось внимание к актуальным научным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, учеными нашей страны особое внимание уделено исследованию и поиску эффективных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных второго и высокого порядков, а также уравнений смешанного типа. В этом направлении, в том числе при исследовании прямых и обратных задач для уравнений в частных производных достигаются весомые результаты. На основе Стратегии Действий по развитию Республики Узбекистан имеет большое значение внедрение полученных результатов по научным исследованиям в области математики для улучшения эффективности в сфере экономики.

В настоящее время изучение свойств операторов дробного порядка, исследование краевых задач для уравнений в частных производных второго и высокого порядков, а также внедрение полученных результатов на практику играют важную роль. В связи с этим осуществление целевых научных исследований является одной из важных задач, в том числе научные исследования по следующим направлениям: исследование краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка; определение условий однозначной разрешимости обратных задач идентификации функции источника для уравнений в частных производных с операторами дробного порядка; изучение свойств операторов интегро - дифференцирования дробно го порядка и применение этих операторов в решении краевых задач для уравнения в частных производных. Проводимые научные исследования по вышеуказанным направлениям обосновывают актуальность темы данной диссертации.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008

года и №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности. **Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики**. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[1] . Научные исследования по изучению свойств операторов дробного интегро дифференцирования и их обобщений, исследованию различных прямых и обратных краевых задач для уравнений в частных производных ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: Университете Сантьяго-де-Компостела (Испания), Свободном университете Берлина, Брауншвейгском техническом университете, Берлинской высшей школе техники (Германия), Болонском университете (Италия), Университете Рошель (Франция), Техническом университете в Кошице (Словакия), Белорусском государственном университете, Институте прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарском научном центре Российской академии наук (Россия), Институте математики и математическо го моделирования и в Международном казахско-турецком университете им. Х.А. Ясави (Казахстан).

В результате исследований уравнений в частных производных дробного порядка в мире получен ряд результатов, в частности, изучены свойства интегро-дифференциальных операторов и их обобщений, построены решения задач Коши и первой краевой задачи, исследованы свойства специальных функций, связанных с этими задачами (Институт математики и механики АН Республики Армении), найдены условия разрешимости начальных и краевых задач нелинейных уравнений дробного порядка, имеющие большое прикладное значение (Университет Сантьяго-де Компостела, Испания), получены фундаментальные решения диффузионно - волнового уравнения, решена задача Коши, построены численные решения (Свободный университет Берлина, Брауншвейгский технический университет, Германия; Болонский университет, Италия; Технический университет в Кошице, Словакия), найдены достаточные условия существования решения прямых и обратных задач для уравнений с двумя и многими переменными (Университет Рошель, Франция), построено фундаментальное решение в терминах специальной функции Райта,

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Arkiv Mathematics Astronomis, www.springer.com/mathematics/journal/11512; Complex Variables and Elliptic Equations, http://www. Tandfon line.com/loi/gcov20; Сибирский математический журнал, www.springer.com; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625; Computers and Mathematics with Applications www.elsevier.com /locate/camw, Acta Mathematica Scientia, http://actams.wipm.ac.cn, также были использованы и другие источники.

получены решения задачи Коши, с помощью фундаментальных функций получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения краевых задач для уравнений в частных производных с интегро-дифференциальными операторами Римана-Лиувилля, Капуто, Джрбашяна - Нерсесяна, дробных операторов континуального порядка (Белорусский государственный университет, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарскоого научного центра Российской академии наук), найдены необходимые и достаточные условия существования решения локальных и нелокальных задач для эллиптических уравнений с граничными операторами дробного порядка в смысле Римана Лиувилля, Капуто, Адамара, Адамара - Маршо, а также различных их обобщений, разработан операторный метод решения дифференциальных уравнений дробного порядка (Институт математики и математического моделирования, Международный казахско-турецкий университет им. Х.А. Ясави).

В мире в настоящее время осуществляется ряд научных исследований по приоритетным направлениям, а именно: по созданию математической модели, более адекватно отражающей реальные процессы и решение полученных граничных задач; по построению аналитических решений граничных задач; по созданию устойчивых алгоритмов числовых моделей.

Степень изученности проблемы. Первоначальные результаты, связан ные с применением операторов интегро-дифференцирования в теории дифференциальных уравнений, принадлежат учѐным М.М.Джрбашяну и А.Б.Нерсесяну, которые исследовали однозначную разрешимость задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором обобщенного интегро - дифференцирования Римана-Лиувилля, где решение выражается с помощью специальных функций типа Миттаг-Леффлера. М.М.Джрбашян также исследовал свойства функции Миттаг-Леффлера, а также первую краевую задачу в случае, когда порядок уравнения меньше двух.

R.Gorenflo, F.Mainardi, А.Килбас и А. Псху исследовали задачу Коши для диффузионно-волнового уравнения с операторами дробного дифферен цирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, имеющие большое значение при построении математических моделей в процессах субдиффузии и супердиффузии, построили фундаментальное решение в терминах специаль ной функции Райта и показали однозначную разрешимость задачи Коши. А.Псху изучил диффузионно-волновое уравнение с оператором Джрбашяна Нерсесяна, а также построил фундаментальное решение и доказал однознач ную разрешимость задачи Коши.

Б.Турметовым, используя свойства гармонических функций и теорию интегральных уравнений, изучены краевые задачи с граничными оператора ми дробного порядка Римана-Лиувилля, Капуто для уравнения Лапласа. Установлено, что в случае оператора Римана-Лиувилля исследуемая задача безусловно разрешима, а в случае оператора Капуто для разрешимости краевой задачи в пространстве $\alpha \geq 1$, необходимо Гѐльдера, начиная порядка

дополнительное условие ортогональности. Исследованы также порядки гладкости решения в классах Гѐльдера и Никольского. Установлено, что, как в случаях классических задач, порядок гладкости решения в замкнутой области улучшается по порядку оператора. Б. Турметовым и его учениками изучены вопросы разрешимости краевых задач с граничными операторами дробного порядка в смысле Адамара, Адамара-Маршо, а также их обобщения.

Способы численных решений задач для обыкновенных уравнений дробного порядка использованы в работах K.Diethem, а для уравнений в частных производных дробного порядка - в работах I.Podlubny, O.P. Agrawal.

Результаты по обратным задачам квантовой теории распространения волн, электроразведки, сейсмологии, теории потенциалов и процессов диффузии развиты в исследованиях А.Кожанова, С.Кабанихина и A. Lorenzi, M. Kirane, Y. Luchko и M. Yamamoto.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф-4-02 «Теория неклассических начально краевых задач для дифференциальных уравнений и оптимальных управлений» НУУз.

Целью исследования являются решение прямых и обратных задач для уравнения в частных производных с операторами дробного интегро дифференцирования, изучение свойств интегро - дифференциальных опера торов и их применение для решения неклассических задач для эллиптических уравнений.

Задачи исследования:

доказательство однозначной разрешимости нелокальных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка с операторами дробного интегро - дифференцирования;

изучение вопросов базисности корневых функций спектральных задач, соответствующих задачам типа Самарского - Ионкина;

определение условий однозначной разрешимости обратных задач идентификации функции источника для уравнений в частных производных с операторами дробного порядка;

доказательство регулярной разрешимости задач для смешанного уравнения дробного порядка с интегральным условием сопряжения; изучение свойств операторов интегро-дифференцирования дробного порядка типа Адамара, Адамара-Маршо и применение этих операторов в решении краевых задач для уравнения эллиптического типа; разработка способов решения краевых задач, а также задач типа Бицадзе-Самарского в классе гармонических и гладких функций для уравнений эллиптического типа с обобщенными граничными операторами дробного порядка.

Объектом исследования являются операторы интегро-дифференци рования дробного порядка в смысле Капуто, Римана - Лиувилля, Джрбашяна-

Нерсесяна, типа Адамара и Адамара-Маршо, уравнения в частных производных дробного порядка.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных дробного порядка, задачи для эллиптичес ких уравнений с граничными операторами интегро-дифференцирования типа Адамара и Адамара-Маршо.

Методы исследования. В диссертации использованы методы матема тического анализа, математической физики, спектральной теории линейных операторов, теория интегральных уравнений и рядов.

Научная новизна исследования заключается в следующем: доказана однозначная разрешимость нелокальных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка с операторами дробного интегро дифференцирования;

впервые изучена базисность корневых функций спектральных задач, соответствующих задачам типа Самарского-Ионкина;

установлены необходимые условия однозначной разрешимости обратных задач идентификации функции источника для уравнений в частных производных с операторами дробного порядка;

доказана регулярная разрешимость задач для смешанного уравнения дробного порядка с интегральными условиями сопряжения; изучены свойства операторов интегро-дифференцирования дробного порядка типа Адамара, Адамара-Маршо и применены к решению краевых задач для уравнения эллиптического типа;

разработан способ решения краевых задач, а также задач типа Бицадзе Самарского в классе гармонических и гладких функций для уравнений эллиптического типа с обобщенными граничными операторами дробного порядка.

Практические результаты исследования. При решении нелокальных задач для уравнений в частных производных дробного порядка предложен способ использования свойства полноты и базистности корневых функций соответствующих спектральных задач, позволяющий получить решения этих задач в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда. Способ приведения решения краевых задач для эллиптических уравнений с граничными операторами дробного порядка к задаче Дирихле позволило применить альтернативы Фредгольма для решения задач.

Достоверность результатов исследования. Достоверность решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка, изучения операторов интегро-дифференци рования дробного порядка, а также достоверность их применения к решению неклассических задач для эллиптических уравнений обоснованы методами математического анализа, дифференциальных уравнений и математической физики.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории

дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка, в спектральной теории линейных операторов.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении физических процессов, описываемых при помощи уравнений в частных производных дробного порядка.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

- предложенный способ построения явных решений краевых задач для смешанных уравнений в частных производных высокого порядка с операторами дробного интегро-дифференцирования был использован при решении новых краевых задач в зарубежных грантах по теме «Исследования неклассических дифференциальных уравнений с операторами дифференци рование дробного порядка, возникающих при моделировании процессов во фрактальных средах, и разработка алгоритмов их решения», госрегистрация 0112РК01473 (2012-2014). (Дочернее государственное предприятие "Научно исследовательский институт математики и механики" при Казахском национальном университете имени Аль-Фараби, справка 206, от 8-ноября 2016 года.). Применение этих научных результатов позволило представить решение задачи в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда;

- полученные свойства обобщенных интегро - дифференциальных операторов Римана-Лиувилля в классе гармонических функций при решении задач типа Бицадзе-Самарского были использованы при решении нелокаль ных задач с граничными операторами Римана-Лиувилля для эллиптических уравнений в зарубежных грантах project ORG/SQU/CBS/13/030 (Sultan Qaboos University, College of science, Sultanate of Oman, справка от 9 ноября 2016 года). Применение этих научных результатов позволило привести исследование задач типа Бицадзе-Самарского с граничными операторами Римана-Лиувилля к исследованию интегральных уравнений, позволяющее применить известные альтернативы Фредгольма.

- предложенные способы исследования свойств дробных операторов Адамара и Адамара-Маршо в классе гармонических функций и в классах Гѐльдера были использовании в зарубежных научных журналах (Mathematical Methods in the Applied Scinces, 2016, № 39, pp. 1121 - 1128; Boundary Value Problems 2014, № 29, pp. 1 - 13; Differential Equations, 2015, Volume 51, № 2, pp. 243 - 254) . Использование научных результатов послужило исследованию нелокальных задач с операторами дробного порядка, сведением их к интегральным уравнениям.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 14 научно-практических конференциях, в том числе на 9 международных и 5 республиканских научно - практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 30 научных работ, из них 16 научных статей, в том числе

опубликованы 7 в зарубежных и 5 в республиканских журналах, рекомендо ванных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для пуб ликации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырѐх глав, заключения и списка использованной литературы, приложений. Объем диссертации составляет 178 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Краевые задачи типа Самарского-Ионкина для дробных дифференциальных уравнений в частных производных четвѐртого порядка»**, решаются краевые задачи для уравнений в частных производных с дробными производными в смысле Капуто и Джрбашяна-Нерсесяна.

В первом параграфе этой главы приводятся некоторые известные факты из теории интегральных уравнений, из спектральной теории линейных операторов, а также из теории краевых задач для уравнений в частных производных с операторами дробного порядка, необходимые для получения основных результатов.

Во втором параграфе для уравнения в частных производных дробного порядка в смысле Капуто изучается нелокальная задача типа Самарского Ионкина. Для решения этой задачи использован метод Фурье, который сводит данную задачу к решению несамосопряженной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвѐртого порядка. Найдены собственные числа и собственные функции полученной, а также сопряженной с ней задачи, доказана базисность Рисса этих систем в $L_2(0,1)$. Также доказаны теоремы о единственности и существовании регулярного решения рассматриваемой задачи. Результаты, приведенные в этом параграфе, являются новыми и в случае $\alpha = 1$.

Рассмотрим уравнения

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u + u_{xxxx} = 0, \quad \alpha \in (0,1] \quad (1)$$

в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t < 1\}$. Здесь ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ - оператор дробного дифференцирования по t в смысле Капуто порядка, определяемый по формуле

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = I_{0t}^{1-\alpha}(u_t(x,t)), \quad I_{0t}^{\alpha}(\varphi(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\tau)\, d\tau .$$

Задача I. Найти решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$u\ x\ au\ x\ x\ x\ (\ ,0)\ (\ ,1)\ (\ ),\ 0\ 1 = + \le \le \phi$, (2)

$u\ t\ u\ t\ t = = \le \le$, (3)

$(0,\ )\ (1,\ )\ 0,\ 0\ 1\ _{xx}$

$u\ t\ u\ t =$, $(0,\ )\ (1,\ )$

$(0,\ )\ (1,\ )\ _{x\,x}$ $u\ t\ u\ t =$, $0\le t \le 1$, (4) $_{xxx\,xxx}$

где a - заданное действительное число, а $\phi(x)$ - заданная функция.

36

Определение 1. Под регулярным решением задачи I будем понимать функцию $u\ x\ t\ (\ ,\ )$, такую, что $(\ )$

$(\ ,\ )\ _{x\,t}u\ x\ t\ C \in \Omega$, $_0(\ ,\ )\ (\ )\ _{C\,t}D\ u\ x\ t\ C^{\alpha} \in \Omega$, $(\ )$

^{3,0} ,

удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2) - (4). Рассмотрим следующие биортогональные системы функций:

$u\ C \in \Omega$, $_{xxxx}$

$e\ e$ $X\ x\ x\ X\ x\ nx\ X\ x\ nx$

$2\ 2\ (1\ )$

$\pi\ \pi$

$nx\ n\ x$

$-$

$(\ )\ 2$, $(\ )\ 2\sin 2$, $(\ )\ \cos 2 = = = + \pi\ \pi$

$(1)\ (2)$

$-$, (5)

$n\ n\ _n$

$^0\ _2$

π

e

1

$e\ e$ $Y\ x\ Y\ x\ nx\ Y\ x\ nx$

$2\ 2\ (1\ )$

$\pi\ \pi$

$nx\ n\ x$

$-$

$(\ )\ 1$, $(\ )\ \sin 2$, $(\ )\ 2\cos 2 = = + =$

$+$

$\pi\ \pi$

$(1)\ (2)$

$-$. (6)

$n\ n\ _n$

$^0\ _2$

π

e

1

Основными результатами данного параграфа являются:

Лемма 1. Системы функций (5) и (6) полны в пространстве $L_2(0,1)$.

Лемма 2. Системы функций (5) и (6) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$. **Теорема 1.** Пусть *a* - действительное число, такое, что для любого *n* =0, 1,2,… выполняется условие( )⁴

$_1$( ) 1 (2) 0 *n aE n* Δ = − − ≠ $_\alpha$ π. Тогда, если сущес твует решение задачи I, то оно единственно.

Теорема 2. Пусть функция условиям

ϕ( ) *x*удовлетворяет

( ) [0,1], (0) 0, '(0) '(1), "(1) 0, '"(0 '"(1) *x C* , (0,1) $^\delta$ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ δ $^+$ ∈

= = = = ∈ , 4

| ( ) | 0 Δ ≥ > *n* ε , *n* =1,2,..., где и $_1$ (0,1).

ε - некоторое положительное число из

Тогда регулярное решение задачи I существует.

Во втором параграфе для уравнения дробного порядка с оператором Джрбашяна-Нерсесяна изучаются нелокальные задачи. Для решения задач использован спектральный метод, который сводит данные задачи к решению несамосопряженной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Найдены собственные числа и корневые функции, исследована сопряженная задача.

γ γ γ -

Пусть *m* - некоторое фиксированное натуральное число, $_{0\,1}$, ,... $_m$ некоторые действительные числа из интервала (0,1], такие, что $_m$

= − > ∑. Для функции оператор

ϕ(*t*)заданной на (0,✦), ✦ < ∞,

σ γ $_{mj}$ 1 0

j = 1

$_{t\,RL\,t\,RL\,t\,RL\,t}$ *t I D D D* $^{m\,m\,m\,m}$

$_{1\,2\,0\,1}$

^{1}D ( ) ... ( ) $_{0\,0\,0\,0\,0\,t\,RL}$ *D t* $^{\sigma\gamma\gamma\gamma\gamma\gamma}$ ϕ ϕ $^{---}$=

называется оператором дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна

d

σ $_m$. Здесь ( )

$^{\alpha\alpha}$ϕ ϕ

1

порядка = - дробная производная в смысле $_{0\,0}$(

Римана-Лиувилля. Для уравнения) ( ) $_{RL\,t\,t}$

–

D t I t
dt

D (,) $^{m}{}_{xxxx}$ *u u f x t* $^{\sigma}$+ = , (0,2) σ $_{m}$∈ (7)
в области Ω = < < {(,) : 0 , 1} *x t x t* рассмотрим следующие задачи: **Задача II.** Найти решение уравнения (7) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$^{\sigma}$= , D (,0) 0 ^{k}*u x* *k m* = − 0, 1, 0 1 ≤ ≤*x*, (8)

37

u t u t t = = < ≤ , (9)
(0,) (0,) 0, 0 1 $_{xx}$
u t u t = , (0,) (1,)
(0,) (1,) $_{x\,x}$ *u t u t* = , 0 1 < ≤*t* . (10) $_{xxx\,xxx}$

Задача III. Найти решение уравнения (7) в области Ω, удовлетворяющее условиям (10) и *u t u t* (0,) (1,) = , (0,) (1,)
u t u t = , 0 1 < ≤*t* .
$_{xx\,xx}$

Определение 2. Под регулярным решением задачи II будем понимать функцию *u x t* (,), такую, что ^{0}_ D ( ) ^{k}*u C* $^{\sigma}$∈ Ω ,
^{1}*t u C*( ) $^{-\gamma}$∈ Ω , / ((((0)) $^{k\,k}$∂ ∂ ∈ Ω ∩ > *k* = 0,3 ,
u x C t ,

u u C $^{\sigma}$∈ Ω, удовлетворяющую уравнению
k m = − 0, 1 , D , ( ) $^{m}{}_{xxxx}$
(7) в области Ω и условиям (8) - (10).

Доказана следующая:

γ *k m m N* = ∈ - действительные числа из
Теорема 3. Пусть , (0, ,) $_{k}$
интервала (0,1], $_{0}$1
γ γ + >. Тогда, если существует регулярное решение
m
задачи II, то оно единственно.

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и пусть ( )
(,) $_{x\,t}$*f x t C* $^{+\delta}$∈ Ω , δ ∈(0,1), функция *f x t* (,)при 1
2 ,0
1
,
γ <представляется в *m*
виде

t

$f\,x\,t\,t\,f\,x\,d^{\gamma}(\,,\,)\,(\,)\,(\,,\,)$

$= -$

τ τ τ −

$(1\ )^{m}$

$\Gamma - \int$, (11) γ

m

0

с некоторой $f\,x\,t\,L\,(\,,\,)\,(0,1) \in$, для любого $x\in[0,1]$, а также удовлетворяет условиям $(0,\,)\,(1,\,),\,(0,\,)\,0_{\,x}$

$f\,t\,f\,t\,f\,t = =\,,\,0\,1 \le \le t$. Тогда регулярное решение задачи II существует.

Теперь рассмотрим задачу III . Имеет место

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 3, $(\ )\ (\,,\,)_{\,x\,t,} f\,x\,t\,C^{+\delta} \in$

Ω

$4\,,0$

$,$

$\delta \in (0,1), f\,x\,t\,(\,,\,)$при 1

$\gamma <$для любого $x\in[0,1]$представляется в виде (12) по

m

переменному t, а также удовлетворяет условиям

$\partial\ \partial$

$f\,x\,t\,f\,x\,t\ \ k$

$(\,,\,)\,(\,,\,)$, 0,1,2,3

$k\,k$

$= =$

$\partial\ \partial$, $0\ 1 \le \le t$.

$k\,k\,x\,x$

$= =$

$0\ 1$

$x\ x$

Тогда регулярное решение задачи III существует и единственно. В четвѐртом параграфе решается задача типа Самарского-Ионкина для двумерного дробного параболического уравнения четвѐртого порядка с дробным оператором Капуто в пространственной области. Методом Фурье доказана теорема существования и единственности решения задачи, найдены собственные числа и собственные функции соответствующей спектральной задачи, доказана базисность систем корневых функций, когда она определя ется как произведения двух систем функций, где одна из них является ортонормированным базисом, а другая составляет базис Рисса. Для уравнения

$$( )$$

$$_2{}_0 0 \; _{C\,t\,xxxx\,yyyy} D\, u\, a\, u\, u^{\alpha} + + = , \alpha \in (0,1] \quad (12)$$

в области $(0,) \; \Omega = \Omega \times _{xy} T$, где $\{(, y) : 0 , 1\} \; _{xy}\Omega = < < x\, x\, y$, рассмотрим следую щую задачу.

Задача IV. Найти решение уравнения (12) в области Ω, удовлетворяю щее условиям

$$u\, x\, x\, y \; (, y,0) \; (,) = \varphi , (, y) \; _{xy} x \in \Omega , \quad (13)$$

$$\partial \partial \partial \; = = \in \Omega = =$$

$$u\, u\, u \; _{y\, t\, k}$$

$$_k$$

$$_{0\,0\,1,} 0, ,(,) , 1,3, 0,2$$

$$\partial \partial \partial ,^{(14)} \; x\, x\, x$$

$$_{k}{}^{x\,x\,x\,y\,t} \; = = =$$

$$\partial \partial \; = \in \Omega =$$

$$u\, u \; _{x\, t\, k}$$

$$_{k\,k}$$

$$_{0\,1,} ,(,) , 0,2$$

$$\partial \partial , \quad (15)$$

$$_{k\,k}{}^{y\,y\,x\,t} \; = =$$

$$y\, y$$

где $f\, x\, y\, t\, x\, y \; (, ,), (,) \; \varphi$ - заданные функции, $\{(,) : 0 \; 1; 0 \} \; _{zt}\Omega = < < < < z\, t \; z\, t\, T$. **Определение 3.** Под регулярным решением задачи будем понимать функцию $u\, x\, y\, t \; (, ,)$, такую, что

$$( ) \; ( )$$

$$(, ,) \; _{x\,y\,t\,x\,y\,t} u\, x\, y\, t\, C\, C \in \Omega \cap \Omega ^{3,2,0 \; 4,4,0}_{, , , ,} , \; _0( ) \; _{C\,t} D\, u\, C^{\alpha} \in \Omega ,$$

удовлетворяющую уравнению (12) в области Ω и условиям (13) - (15).

Основным результатом параграфа является следующая:

Теорема 6. Пусть функция $\varphi(,) \; x\, y$ удовлетворяет условиям

$$^{5\,4} / ( )_{xy}$$

$$\partial \partial \partial \in \Omega \; \varphi \; x\, y\, C , \; ^{4\,3} / ( )_{xy}$$

$$\partial \partial \partial \in \Omega \; \varphi \; x\, y\, C ,$$

$$_{xx\,xx\,x\,xxx} \varphi \; \varphi \; \varphi \; \varphi \; \varphi \; \varphi \; y\, y\, y\, y\, y\, y = = = = \in ,$$

(0,) (1,), (0,) (1,), (0,) (0,) 0,y [0,1] $_{yy\,yy}$ φ φ φ φ *x x x x x x* = =
= = ∈ .
(,0) (,1) (,0) (,1) 0, [0,1]

Тогда регулярное решение задачи IV существует и единственно. В §1.5 изучается задача идентификации функции источника для параболического уравнения четвертого порядка с оператором дробного интегро - дифференцирования Капуто, в которой вместе с решением уравне ния требуется найти и неизвестную правую часть.

Для уравнения

$_{0\,C\,t\,xxxx}$ *D u u f x*( ), 0 1 $^{\alpha}$+ = < ≤ α (16)

в области Ω = < < {(,) : 0 , 1} *x t x t* рассмотрим следующую обратную задачу. **Задача V.** Требуется найти пару функций *u x t* (,), *f x*( ), обладающих следующими свойствами:

1) функция *u x t* (,) непрерывна в области Ω, вместе с производными, приведенными в краевых условиях, *f x*( ) C(0,1) ∈;

2) удовлетворяют уравнению (16) в области Ω;

3) функция *u x t* (,) удовлетворяет краевым условиям

u x x (,0) ( ) =φ , *u x x* (,1) ( ) =ψ , 0 1 ≤ ≤*x* ,

u t (0,) 0 = , (0,) (1,) *u t* = , (0,) (1,)

u t u t = , (1,) 0 $_{xx\,x\,x}$ *u t u t* = , 0 1 ≤ ≤*t* , $_{xxx\,xxx}$

где

φ ψ ( ), ( ) *x x* - заданные

достаточно гладкие функции = = = =

φ φ ψ ψ $_{2\,,1}$( ) 1 ((2)) *n E n* Δ = − − $_{\alpha}$

(0) (1) 0, (0) (1) 0, π , *n* =1,2,.... Имеет

= = = =

φ φ ψ ψ место:Пусть ^{4}

"(0) "(1) 0, "(0) "(1) 0.

Теорема 7. Пусть $_{2}$Δ ≠ ( ) 0 *n* , *n* =1,2,.... Тогда, если решение задачи V существует, то оно единственно.

Теорема 8. Пусть функции условиям

φ( ) *x* , ψ( ) *x* удовлетворяют

( ) [0,1], (0) (0) (0) 0, (0) (1), (0) (1) ^{IV} φ φ φ φ φ φ φ φ *x C*∈ = = = = = " ' ' "' "' ,

5

( ) [0,1], (0) (0) (0) 0, (0) (1), (0) (1) ^{IV} ψ ψ ψ ψ ψ ψ ψ ψ *x C*∈ = = =

= = " ' ' "' "' , 5

| ( ) | 0 Δ ≥ > *n* δ , *n* =1,2,..., где и $_{2}$ δ - некоторое положительное число из (0,1).

Тогда регулярное решение задачи V существует.

Во второй главе диссертации, названной **«Краевые задачи для уравнений в частных производных смешанного типа с оператором дробного порядка»,** изучаются прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных смешанного типа с операторами дробного интегро дифференцирования.

В §2.1 решается краевая задача для уравнения смешанного типа четвѐртого порядка с дробной производной в смысле Капуто, где в отличие от задач с уравнениями целого порядка, условия сопряжения на линии изменения типа задаются в интегральном виде.

Пусть $\Omega = < < - < <$ {(,) : 0 1, } $x\ t\ x\ p\ t\ q$, (0) t

$^{+}\Omega = \Omega \cap >$, (0) t

$^{-}\Omega = \Omega \cap <$

, $\alpha \in (0,1]$, $p\ q$, 0 $>$ - действительные числа. В области Ω рассмотрим уравнения

α

$u\ D\ u\ t\ f\ x\ t$ $u\ u\ t$

{ 0, 0, (,) , 0.

$+ >$

$=$

$+ <$ (17)

$xxxx\ C\ t$

$xxxx\ tt$

Задача VI. Найти функцию $u\ x\ t$ (,), которая:

1) непрерывна в области Ω, вместе с производными, приведенными в краевых условиях;

2) удовлетворяет уравнению (17) в области $\Omega^{+} \cup \Omega^{-}$;

3) удовлетворяет краевым условиям

$u\ t\ u\ t\ u\ t\ u\ t\ p\ t\ q = = = = - \le \le$,

(0,) (1,) (0,) (1,) 0,

$xx\ xx$

$u\ x\ p\ x$ (,) 0, 0 1 $- = \le \le$;

4) удовлетворяет условию склеивания

$_0$(, 0) (, 0), 0 1 $_{C\,t\,t}D\ u\ x\ u\ x\ x\ ^{\alpha} + = - < <$.

Основным результатом пятого параграфа являются следующие:

Теорема 9. Пусть p - число, такое, что

2 2 2

$_3\Delta = + \ne$ ( ) ( ) sin( ) cos( ) 0 $n\ n\ n\ p\ n\ p\ \pi\ \pi\ \pi$, n =1,2,....

Тогда, если существует регулярное решение задачи VI, то оно единственно.

Теорема 10. Пусть функция $f\ x\ t$ (,)удовлетворяет условиям (,) (,) , ( ) $f_{x\,t}$

$x\ t$

$f\ x\ t\ C\ L$

( )5

∂

$\in \Omega \in \Omega$

4,0

∂'

, 2 5

x

$f\ t\ f\ t\ f\ t = = =$, (1,) (1,) (1,) 0 $_{xx\ xxxx}$

(0,) (0,) (0,) 0 $_{xx\ xxxx}$ $f\ t\ f\ t\ f\ t = = =$,

| ( ) | 0 $\Delta \geq > n\ \delta$, n =1,2,..., где и $_3$ (0,1).

δ - некоторое положительное число из

Тогда решение задачи VI существует.

40

В §2.2 для уравнения смешанного типа четвѐртого порядка с дробной производной Капуто решена обратная задача. Используя метод спектральных разложений, найден критерий единственности решения задачи, а также установлена существенность условий, наложенных на данные задачи. Приведен пример, когда при нарушении этих условий сформулированная однородная задача имеет нетривиальное решение.

Пусть $\Omega = < < - < <$ {(,) : 0 1, } x $^- \Omega = \Omega \cap <$,

$t\ x\ p\ t\ q$, (0) t

$^+ \Omega = \Omega \cap >$, (0) t

где $p\ q$, 0 >. Рассмотрим уравнения

α

$u\ D\ u\ t\ f\ x$

$u\ u\ t$

{ 0, 0, ( ) , 0.

+ >

=

+ < (18)

$xxxx\ C\ t$

$xxxx\ tt$

Задача VII. Требуется найти пару функций $u\ x\ t$ (,), $f\ x$( ), обладающих следующими свойствами:

1) функция $u\ x\ t$ (,)непрерывна в области Ω, вместе с производными, приведенными в краевых условиях, $f\ x$( ) C(0,1) $\in$;

2) удовлетворяют уравнению (18) в области $^{+\,-}\ \Omega \cup \Omega$;

3) функция $u\ x\ t$ (,)удовлетворяет краевым условиям

$u\ t\ u\ t\ u\ t\ u\ t\ p\ t\ q = = = = - \leq \leq$,

(0,) (1,) (0,) (1,) 0,

$xx\ xx$

$u\ x\ p\ x\ u\ x\ q\ x\ x$ (,) ( ), (,) ( ), 0 1 $- = = \leq \leq \psi\ \phi$,

где $\phi\ \psi$ ( ), ( ) $x\ x$ - заданные

достаточно гладкие функции, φ φ $_{n\,n\,n\,n}$ *n p p E q*$^{\alpha}$ Δ = + − − λ λ λ λ $_{\alpha}$, ,
ψ ψ (0) (1) 0, (0) (1) 0 = = = = ,
φ φ ψ ψ ''(0) ''(1) 0, ''(0) ''(1) 0 = = 1,2,... Пусть $^{2\,2\,2\,4}$
= =; $_{4}$( ) sin cos ( )

5) функция *u x t* (,)удовлетворяет

условию склеивания $_{0}$(, 0) (, 0), 0

1 $_{C\,t\,t}$*D u x u x x* $^{\alpha}$+ = − < < .

$_{n}$λ π = = *n n* .

Теорема 11. Пусть φ( ) *x*и следующим функции условиям: ψ( ) *x*удовлетворяют

( ) ( ) ( ) [0,1], ( ) (0,1), 0, 0, 1,2,3 *d x d x* *x C x L k*

φ φ
2 2
k k
φ φ ∈ ∈ = = = $_{= =}$,
6 (7) 2 0 1 2 2 *k k x x*
dx dx

( ) ( ) ( ) [0,1], ( ) (0,1), 0, 0, 1,2,3 *d x d x* *x C x L k*

ψ ψ
2 2
k k
ψ ψ ∈ ∈ = = = $_{= =}$
6 (7) 2 0 1 2 2 *k k x x*
dx dx

| ( ) | 0 Δ ≥ > *n* δ , *n* =1,2,..., где и $_{4}$ (0,1).

δ - некоторое положительное число из

Тогда существует единственное решение задачи VII.

| ( ) Δ ≥ *n*

Замечание 1. Множество чисел *p*, удовлетворяющих условию $_{4}$ δ > 0, не пустое. Например, если *p* = 2 / π , то

0, 1,2,...,0 ( ) 1 $_{n\,n}$*n E q*$^{\alpha}$
λ λ ≠ = < − < $_{\alpha}$.

$_{n}$*n E q*$^{\alpha}$ Δ = − − $_{\alpha}$λ , ^{4}

4

$_4( )\ 1\ ( )$

$|\ (\ )\ |\ 0\ \Delta \ge > n\ \delta$ нарушено при $n\ k =$ и некото

Замечание 2. Если условие $_4$
рых p и q, т.е.

$$_4( )\ \sin\ \cos\ (\ )\ 0\ _{k\,k\,k\,k}\, n\ p\ p\ E\ q^{\alpha}\ \Delta = + - - = \lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ _{\alpha},$$

$2\ 2\ 2\ 4$

41

однородная задача VII имеет нетривиальное решение. Например, при значениях

$E\ q\ _{A\ L\ B\, f}{}^{(\ )}\ 1, , \lambda\ \lambda\ \lambda$

$2\ 4\ 4$

α

$\lambda\ \lambda^{-}$

$= = = =$

$k\ k\ k$

α

$E\ q\ E\ q$

пара функций

$(\ )\ 1\ (\ )\ 1$

$\sin\ , 0, \lambda\ \lambda\ \lambda$

$- - - -$

$k\ k\ k\ k$

$4\ 4$

$4\ 4$

$\alpha\ \alpha$

$\alpha\ \alpha$

$k\ k$

$\lfloor\ \rceil^{- - -}\ \|\ \|\cdot > {}^{E\ q\ E\ t}\ _{x\ t}{}^{(\ )\ (\ )}\ 2$

$\alpha\ \alpha$

2

$\alpha\ \alpha$

$k\ k$

$|\lfloor\ \rfloor - -$

$E\ q$

$(\ )\ 1$

k

$u\ x\ t\ (\ ,\ )^{\alpha}_{\alpha}$

4

λ

n

$= \{\ \lfloor\ \rceil^{- - -}\ |\ |\ \cdot < |\ \lfloor\ \rfloor^{- -}\ \lfloor$

$\lambda\ \lambda\ \lambda\ \lambda\ _{\lambda}\ \sin\ \cos\ (\ )\ _{2\ \sin\ ,\ 0,}\ {}^{t\ t\ E\ q}{}_{x\ t}$

$2\ 2\ 2\ 4$

α

2

$k\ k\ k\ k$

$E q$ α
$( ) 1$ k
α λ
α
4
n
$E q \; f x x ( ) \; ( ) \; 2 \sin \lambda \lambda$

$4 \, 4 -$ α

$= \cdot$ $- -$
$k \, k$ 2
α λ_k
$E q$
$( ) 1$
α λ
α
4
k

является решением однородной задачи VII.

В § 2.3 решается краевая задача для параболо - гиперболического уравнения с дробной производной; применяя методы функции Грина и интегралов энергии, доказана теорема о единственности и существовании регулярного решения задачи.

Рассмотрим уравнение

2 2
∂^{α}, $\alpha \in (0,1)$ (19) $u \cdot_{C y} =$

$1 \operatorname{sgn}( )$
$- \partial$
$x y \; u$ $1 \operatorname{sgn}( )$
$-$ $+$ $x y$
$-$ $D u f x y$
∂ 2 y $(,)$
x 2 ∂ ${}_{2} 0 2$

в конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $x > 0$, $y > 0$отрезками A_0B_0 , B_0B прямых $y = 1$, $x = 1$; при $x > 0$, $y < 0$ – отрезками AC, BC характеристик $x + y = 0$, $x - y = 1$уравнения (19); при $x < 0$, $y > 0$ – отрезками AD, A_0D характеристик $x + y = 0$, $y - x = 1$уравнения (19).

Определение 4. Функцию $u(x,y)$ назовѐм регулярным решением уравнения (19), если она обладает непрерывными производными, входящими в это уравнение, и удовлетворяет ему.

Задача VIII. Требуется найти функцию $u \; x \; t \; C \; (,) \; ( ) \in \Omega$, которая: 1) является регулярным решением уравнения (19) в области $\Omega \backslash (AA_0 \cup AB)$;

2) удовлетворяет краевому условию $(,) \; 0$

$u \; x \; y_{BB \cup DC} =$,

0

3) на линиях изменения типа удовлетворяет следующим условиям склеивания:

$$u(x,-0) = u(x,+0),\ u(-0, y) = u(+0, y),$$

$u\ x\ l\ x\ y\ u\ x\ y\ m\ x\ u\ x\ n\ x\ ^{-\alpha}$

$(\ ,\ 0)\ (\ )\ \lim\ (\ ,\ )\ (\ )\ (\ ,0)\ (\ )$

$- = \cdot + \cdot +\ ,$

1

$y\ y$

1 1 1 $_0$

$y \quad \to +$

$u\ y\ l\ y\ u\ y\ m\ y\ u\ y\ n\ y - = \cdot + + \cdot +\ ,$

$_{2\,2\,2}(\ 0,\ )\ (\ )\ (\ 0,\ )\ (\ )\ (0,\ )\ (\ )$

$x\ x$

где $l\ (t), m\ (t),\ n\ (t)\ _{i\ i\ i},\ t \in [0,1],\ i = 1,2$ - заданные функции.

Основной результат шестого параграфа сформулирован в следующей теореме.

42

Теорема 12. Если выполнены следующие условия:

$f\ x\ y\ C\ (\ ,\ )\ (\ ),0\ 1\ ^{\delta} \in \Omega < < \delta\ ,\ ^{1}$

$(\ )\ [0,1],\ (\ ),\ (\ )\ [0,1]\ _{i\ i\ i}\ l\ t\ C\ m\ t\ n\ t\ C \in \in\ ,$

$(\ )\ 0,\ (\ )\ 2\ (\ )\ (\ )\ 0,\ (1)\ 0,\ [0,1],\ 1,2\ _{i\ i\ i\ i}\ l\ \underset{2}{t}\ l\ t\ l\ t\ m\ t\ l\ t\ i \ne - \cdot \ge > \forall \in = '\ ,$

то задача VIII имеет единственное регулярное решение.

В третьей главе диссертации, названной **“Интегро-дифференциальные операторы типа Адамара, Адамара - Маршо и их применение”**, решены неклассические краевые задачи для эллиптического уравнения в классе гармонических функций, а также в классах Гѐльдера.

В §3.1, §3.2 в классе гармонических функций изучаются свойства операторов, обобщающие интегро-дифференциальные операторы в смысле Адамара и Адамара - Маршо, и их применение к решению краевых задач, а в §3.3 изучаются вопросы гладкости этих решений в классах Гѐльдера.

Пусть $\{\ :|\ |\ 1\}\ ^{n}\ \Omega = \in < x\ R\ x$ - n мерный единичный шар, $n \ge 2$, $\partial\Omega$ - его граница. Пусть, далее, $u\ x(\ )$ - функция, гармоническая в шаре Ω. Рассмотрим операторы

1

$J\ u\ x\ s\ s\ u\ sx\ ds\ ^{\alpha\ \alpha\ \mu}$

$[\ ](\ )\ |\ \ln\ |\ (\ )$

$^{1}{}_{1\ 1}$

$- -$

$= \Gamma \int ,\ _{\mu}$

$(\ )\ \alpha \quad 0$

$D\ u\ x\ s\ s\ u\ x\ u\ sx\ ds\ u\ x\ ^{\alpha\ \alpha\ \mu\ \alpha}\ [\ ](\ )\ |\ \ln\ |\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ ^{- + -} = - +$

α 1 (1) 1

Γ − ∫,

μ (1) α 0 [ ] μ

где 0 1 < < α, 0 ≤ μ -действительные числа,Γ( ) α – гамма функция Эйлера. Эти операторы называются дробным интегралом и производным типа Адамара и Адамара-Маршо.

Пусть теперь 1 2 (, ,...,) α α α α =$_m$, 1 2 (, ,...,) μ μ μ μ =$_m$, *m* - натуральное число, 0 1 < < α $_j$, 0, 1,2,..., $_j$ μ ≥ =*j m*. Рассмотрим более общие операторы *J u x*

J u x J J J u x α α α α α α α

(, ,...,) [ ]( ) [ ]( ) [...[[ ]]...]( ) *m m m*

= = ,

(, ,...,)

1 2 1 1

−

μ μ μ μ μ μ μ

1 2 1 1

m m m −

D u x D u x D D D u x α α α α α α α (, ,...,) [ ]( ) [ ]( ) [...[[

]]...]( ) *m m m* = = .

(, ,...,)

1 2 1 1

−

μ μ μ μ μ μ μ 1 2 1 1

m m m −

Введём обозначения

k m m k k k α α α

γ μ μ μ = + ⋅ + ⋅ ⋅ + .

1 2 , 1 2 ( ) ( ) ... ( ) *m*

Пусть для некоторых *i m* ∈{1,2,..., }, 0 μ$_i$=. Обозначим количество таких μ$_i$ через *p*.

Теорема 13. Пусть 0 1 < < α , μ ≥ 0и *u x*( ) - гармоническая функция в области Ω. Тогда для любого *x*∈Ωсправедливы равенства: 1

u x u s s D u sx ds α α

( ) (0) | ln | [ ]( )

− − = + Γ∫при

1) 1 1 1 0

μ = 0,

( ) α 0

1

− −

u x s s D u sx ds α μ α ( ) | ln | = Γ∫при

[ ]( ) 2) 1 1 1

μ = 0.

( ) α $^{0}_{\mu}$

Теорема 14. Пусть $_{1\,2}$(, ,...,) α α α α =$_m$, 0 1 < < α $_j$, 0, 1,2,..., $_j$ μ ≥ =*j m*и *u x*( )- гармоническая функция в области Ω. Тогда

1) если *p* = 0, то справедливо равенство

1 1

=Γ∫ ∫,

1

u x ds s s D u sx ds $^{\alpha\,\mu\,\alpha}$( ) ... | ln | [ ]( )

– –

1 1

( ) ^{m}

α 1 μ

0 0

2) если *p* > 0, то справедливо равенство

1 1

– – = +Γ∫ ∫,

1

u x u ds s s D u sx ds $^{\alpha\,\mu\,\alpha}$( ) (0) ... | ln | [ ]( )

1 1

( ) ^{m}

где α 1 μ

0 0

$_{1\,2}$( ) ( ) ( ) ... ( ) Γ = Γ · Γ · · Γ α α α α $_m$, $^{1\,2}$ 1 1 1 1

α – α α – – α –

| ln | | ln | | ln | ... | ln | ^{m}

s s s s

= · · · ,

μ– μ μ – – μ –

$_{1\,2}$1 1 1 1

= · · · , 1 2 1 1 2 (... ,..., ...) *m m n sx s s s x s s s x* = · · · · · · . *s*

s s s

...^{m}

Теорема 15. Пусть *u x*( ) - гармоническая функция в шаре Ω. Тогда справедливы равенства:

μ = 0, то $_{0\,0}$*J D u x u x u* [ ] ( ) ( ) (0) $^{\alpha\,\alpha}$

1) если 2) если 3) если μ = 0и *u*(0) 0 =, то $_{0\,0}$*D J u*

x u x [ ] ( ) ( ) $^{\alpha\,\alpha}$

⌈ ⌉ = – ⌊ ⌋,

$\mu = 0$, то $J_\mu^\alpha[D_\mu^\alpha[u]](x) = u(x)$, $D_\mu^\alpha[J_\mu^\alpha[u]](x) = u(x)$.

Теорема 16. Если $u(x)$ - функция, гармоническая в шаре Ω, то справедливы равенства

1) если $p = 0$, то $J_\mu^\alpha[D_\mu^\alpha[u]](x) = u(x)$, $D_\mu^\alpha[J_\mu^\alpha[u]](x) = u(x)$,

2) если $p > 0$, то $J_\mu^\alpha[D_\mu^\alpha[u]](x) = u(x) - u(0)$,

3) если $p > 0$ и $u(0) = 0$, то $D_\mu^\alpha[J_\mu^\alpha[u]](x) = u(x)$.

Рассмотрим в области Ω следующие краевые задачи:

Задача IX. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu > 0$. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, для которой функция $D_\mu^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\bar\Omega$ и удовлетворяет равенству $D_\mu^\alpha[u](x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$.

Задача X. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., m$. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, для которой функция $D_\mu^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\bar\Omega$ и удовлетворяет равенству $D_\mu^\alpha[u](x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$.

Пусть $v(x)$ - классическое решение задачи Дирихле $\Delta v(x) = 0$, $x \in \Omega$, $v(x)|_{\partial\Omega} = f(x)$ в шаре Ω.

Приведем формулировку основных результатов этого параграфа.

Теорема 17. Пусть $\mu = 0$ и $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи IX$_\mu$ существует, единственно и представляется в виде $u(x) = J_\mu^\alpha[v](x)$, где $v(x)$ - решение задачи Дирихле (21).

Теорема 18. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда

1) если $p = 0$, то решение задачи X существует, единственно и

представляется в виде *u x J v x* ( ) [ ]( ) α

= μ,

2) если $p > 0$, то решение задачи X существует тогда и только тогда, ∂Ω =

∫·

когда выполняется условие *f x dx* ( ) 0

Если решение задачи X существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде *u x C J v x* ( ) [ ]( ) α

= + μ, где *C* - произвольная постоянная, а *v x*( ) - решение задачи (21).

Теорема 19. Пусть *f x C* ( ) ( ) λ α+ - нецелые числа, μ > 0, λ > 0, α ∈(0,1), λи

λ ∈ ∂Ω. Тогда решение задачи IX принадлежит классу *C* ( ) λ α+ Ω ,

причём *D u x C* [ ]( ) ( ) α λ

μ ∈ Ω .

Теорема 20. Пусть γ α α α = + + + , λи λ γ + - нецелые μ > 0, 0 < λ , 1 2 ... *m*

числа, *f x C* ( ) ( ) λ ∈ ∂Ω. Тогда решение задачи X принадлежит классу *C* ( ) λ γ + Ω . Следующая лемма показывет, что полученную гладкость решения исследуемой задачи нельзя улучшить.

Лемма 3. Пусть *u x*( )является решением задачи IX и пусть *D u x C* [ ]( ) ( ). α λ

μ ∈ ΩТогда *u x C* ( ) ( ) λ α+ ∈ Ω .

Замечание 3. Из этой леммы легко следует, что если для решения задачи IX имеет место включение *D u D u x C* [ ]( ) ( ) α λ ε

x C [ ]( ) ( ) α λ ε > 0

μ ∈ Ωи для некоторого

+ ∉ Ω, то *u x C* ( ) ( ) λ α ε + + ∉ Ω .

μ

В четвѐртой главе диссертации, названной **«Решение краевых задач с граничными операторами дробного интегро-дифференцирования»** решаются краевые задачи для эллиптических уравнений с граничными операторами, обобщающие операторы Римана-Лиувилля и Капуто дробного порядка.

В §4.1 в классе гармонических функций изучаются свойства обобщенных интегро-дифференциальных операторов и их применения к решению нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского.

Пусть из (0, 1), *m N* ∈. Рассмотрим α - некоторое действительное число следующие интегро-дифференциальные операторы m

$I f t t s t f s ds t^{\alpha \alpha}$

$_{+} = - >$

$( ) ( ) ( ) , 0$

$^{t}{}_{m m m}$

$- -$

$1 1$

$\Gamma \int ,$

$( )$

$^{0} , {}_{0}$

m

α

$( ) ( ) {}_{m m m} d$

1

1

$\alpha \alpha -$

1

$D f t I f t$

$= , {}^{1}$

$\alpha \alpha -$

$=' .$

$_{0 , 0 , 1 + + -} mt\, dt$

$+ +$

m

$( ) ( ) {}_{C m m} D f t I f t {}_{0 , 0 ,}$

Пусть $\Omega = < \{ :| | 1\} \; x \; x$ - единичный шар в$^{n} R$, $n \geq 2$и $\partial\Omega$ – его граница. Основные результаты §4.1.

Лемма 4. Если $u\, x( )$ - гармоническая функция в области Ω, то $r\, D\, u\, x^{\alpha}$ ${}^{\alpha}{}_{+}$также гармоническая функция в области Ω.

$_{0 , ,} ( ) {}^{m}{}_{r m}$

Лемма 5. Пусть $u\, x( )$достаточно гладкая функция в области Ωи $r\, D\, u\, x$ $C^{\alpha \alpha}{}_{+} \in \Omega$. Тогда для любого $x \in \Omega$имеет место

$_{0 , ,} ( ) ( ) {}^{m}{}_{r m}$

$u\, x^{m}\, s\, s\, D\, u\, sx\, ds^{\alpha \alpha}$

$( ) (1) ( )$

$^{1}{}_{1 1}$

$- -$

$( )^{m m}{}_{s m}$

$\Gamma \int .$

$= - {}_{+}$

α

Пусть

$^{0,\,,\,0}$

1

$(\ )^m P\ x\ y\ s\ s\ P\ s\ x\ y\ ds\ _m$

$(\ ,\ )\ (1\ )\ (\ ,\ ) = -$

$^{1}{}_{1\ 1/}$

$- -$

$\alpha\ \alpha$

$\Gamma \int$, (20)

α

$'0$

α

где$^{1\ 2}$ $(\ ,\ )\ (1\ |\ |\ )\ |\ |\ ^n P\ x\ y\ x\ x\ y\ \omega_n - -$

$= - -$ - ядро Пуассона задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

: , k=1,2,..., $_{k\,k\,k}\gamma\ \partial\Omega \to \Gamma \subset \Omega \subset \Omega\ \Gamma \neq \varnothing$ - непрерывные

Пусть далее$_1$

отображения, $(\ )\ _k$

$a\ x$, k = 0,1,2... - непрерывные функции, причѐм ряд

∞

$\sum$, $x \in \partial\Omega$сходится равномерно на $\partial\Omega$.

$|\ (\ )\ |\ _k$

$a\ x$

k $=$ 0

В Ω рассмотрим следующую краевую задачу:

$\Delta = \in \Omega\ u\ x\ x\ (\ )\ 0,$, (21)

∞

$D\ u\ x\ a\ x\ u\ x\ a\ x\ u\ x\ f\ x\ ^\alpha$

$(\ )\ (\ )\ (\ )\ (\ )\ [\ (\ )]\ (\ ),\ _{m\,k\,k}$

$- = + \in \partial\Omega \sum$, (22)

где

γ

$_{0\,,\,0}$

$+$

k $=$ 1

$\alpha \in (0,\ 1),\ m\ N \in,\ D_{0\,,m}$

$_+$- оператор обобщенного дробного дифференциро

α

вания в смысле Римана-Лиувилля, действующий по направлению вектора $r\ x$

$=|\ |$.

Определение 5. Решением задачи (25), (26) назовѐм гармоническую функцию $u(x)$ из класса $(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$^2 C$, такую, что $_{0\,,}\ (\ )\ (\ )\ ^m{}_m$

$r\ D\ u\ x\ C\ ^{\alpha\,\alpha}{}_+ \in \Omega$, и

условие (26) выполняется в классическом смысле.

Рассмотрим уравнение

∞

$x\ a\ x\ P\ x\ y\ a\ x\ P\ x\ y\ y\ dS\ f\ x\ x\ \mu\ \gamma\ \mu\ _{\alpha\,\alpha}(\ )\ (\ (\ )\ (\ (\ ),\ )\ (\ )\ (\ ,\ ))\ (\ )\ (\ ),\ _{k\,m\,k\,m\,y}\ - + =$

$\in\partial\Omega \int \sum$ (23)

$\partial\Omega = k$ $\quad {}_{1}^{,\,0\,,}$

где $_{,}(\ ,\ )\ P\ x\ y\ _{\alpha\, m}$ определяется по формуле (20).

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.2. Пусть $_1$, k=1,2,... $\Gamma \subset \Omega \subset \Omega\ _k$ и справедливо неравенство

$$\sum^{\infty} \le |\ (\ )_1 \quad |$$

$$a\ x\ x\ _k, \qquad \in\partial\Omega$$

$$k = \qquad (1\ )$$

Тогда:

$\infty \qquad 1$

$_0\alpha^{\cdot}\ \Gamma -$

1) если $\Gamma - \sum$, то задача (21), (22) однозначно $\quad a\ x\ x\ (\ )\ ,\ \ne \in\partial\Omega\ (1\ )^k$

$k = \quad 0 \quad \alpha$

разрешима при любом $f\ x\ C\ (\ )\ (\ ) \in \partial\Omega$.

$\infty \qquad 1$

2) если $\Gamma - \sum$, то необходимое и достаточное $\quad a\ x\ x\ (\ )\ ,\ \equiv \in\partial\Omega\ (1\ )^k$

$k = \quad 0 \quad \alpha$

условие разрешимости (с точностью до постоянного слагаемого) задачи (21), (22) имеет вид

$$f\ x\ \mu\ x \quad (24)$$

$$(\ )\ (\ )\ 0, \int_0 =$$

$$\int_{\partial\Omega} \ldots \, ds_x$$

где функция $\mu_0(x)$ – решение уравнения (23), причем число линейно независимых решений этого уравнения при этих условиях равно 1. В §4.2 в классе гладких функций изучаются свойства интегро дифференциальных операторов, введенных в §4.1. В качестве применения этих операторов рассматриваются две краевые задачи для уравнения Пуассона, обобщающие соответственно задачи Дирихле и Неймана, а также изучаются вопросы гладкости решений рассматриваемых задач в классах Гѐльдера.

Для уравнения

$$\Delta u(x) = g(x),\ x \in \Omega, \tag{25}$$

в области Ω рассмотрим следующие задачи.

Задача XI. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (25) и краевому условию

$$D^{\alpha}_{0+,r,m} u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{26}$$

Задача XII. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (25) и краевому условию

$${}_{C}D^{\alpha}_{0+,r,m} u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{27}$$

Здесь $\alpha \in (0, 1]$, $D^{\alpha}_{0+,r,m}$, ${}_{C}D^{\alpha}_{0+,r,m}$ - операторы обобщенного дробного дифференцирования, действующие по направлению вектора $r=|x|$, $\alpha \in (0, 1]$. Ведѐм обозначения

$$B_{\alpha} u(x) = r^{m} D^{\alpha}_{0+,r,m} u(x),\quad B^{*}_{\alpha} u(x) = r^{m}\, {}_{C}D^{\alpha}_{0+,r,m} u(x),$$

$$B^{m}_{\alpha} u(x) = \frac{m^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s^{m})^{-\alpha} s^{m-1} u(sx)\, ds.$$

Определение 6. Решением задачи XI (XII) назовем функцию $u(x)$ из класса $C^{2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, такую, что $B_{\alpha} u(x) \in C(\bar{\Omega})$ ($B^{*}_{\alpha} u(x) \in C(\bar{\Omega})$), и условие (26) ((27)) выполняется в классическом смысле.

Пусть $v(x)$- решение задачи Дирихле, т.е.

$$\Delta v(x) = g_1(x),\ x \in \Omega,\quad v(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega. \tag{28}$$

Основным результатом данного параграфа являются:

Теорема 22. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $m \in N$, $0 < \lambda < 1$, $f(x) \in C^{2+\lambda}(\partial\Omega)$ и $g(x) \in C^{1+\lambda}(\Omega)$. Тогда решение задачи XI существует, единственно, принадлежит классу $C^{2+\lambda}(\Omega)$ и имеет вид $u(x) = B^{-\alpha} v(x)$, где $v(x)$ - решение задачи (28), с правой частью $g_1(x) = |x|^2 B^{-\alpha} |x|^2 g(x)$.

47

Теорема 23. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $m \in N$, $0 < \lambda < 1$, $f(x) \in C^{2+\lambda}(\partial\Omega)$ и $g(x) \in C^{1+\lambda}(\partial\Omega)$. Тогда задача XII разрешима только и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, dS_x = -(n-2)\int_{\Omega} |x|^{-2} \left(|x|^2 B^{-\alpha} |x|^2 g(x)\right)_* dx .$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до константы, принадлежит классу $C^{2+\lambda}(\Omega)$ и представляется в виде $u(x) = B^{-\alpha} v(x)$, где $v(x)$ - решение задачи (28), с правой частью $g_{1*}(x) = |x|^2 B^{-\alpha} |x|^2 g(x)$, удовлетворяющее условию $v(0) = 0$.

В §4.3 решается задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения Пуассона с граничным оператором Римана-Лиувилля дробного порядка. Также найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в классе гармонических функций.

В области Ω, определенной в §4.1 рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача XIII. Найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (4.23) и нелокальному условию

$$D^{\alpha}_{0r} u(x) - a_0(x) u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \left[D^{\alpha}_{RL\, r} u \right](t_k(x)) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x) \left[D^{\beta_k}_{RL\, r} u \right](t_k(x)) + f(x), \quad x \in \partial\Omega, \qquad (29)$$

где $\alpha, \beta_k \in (0, 1)$, D^{γ}_{0r}, $\gamma \in (0,1)$ - оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля, действующий по направлению вектора $r = |x|$, $a_0(x)$, $a_k(x)$, $b_k(x)$, $k = 1,2...$ - заданные функции, $t_k : \partial\Omega \to \Gamma_k \subset \Omega$, $\Gamma_k \subset \Omega$, $\Gamma_k \neq \varnothing$, k=1,2,..., – непрерывные отображения.

Определение 5. Решением задачи XIII назовем гармоническую функцию $u(x)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, такую, что $r^{\alpha} D^{\alpha}_{0r} u(x) \in C(\bar{\Omega})$ и выполняется условие (29) в классическом смысле.

Введем функцию

$$P_{\gamma\sigma}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^1 (1-s)^{-\gamma} s^{-\sigma} P(sx, y)\, ds, \quad \gamma, \sigma \in (0,1),$$

где $P(x, y)$ - ядро Пуассона, и рассмотрим уравнение

$$x\ a\ y\ P\ y\ x\ a\ y\ P\ t\ y\ x\ \mu\ \alpha\alpha\alpha\alpha \quad \infty$$

$( ) (( ) (,) ( ) (( ),) ^{k\,k}{}_{k}$

$- + + \int \sum$

$_{0,\,,\,1}$

$\partial\Omega \quad \infty \quad =$

$+ = \sum$. (30) $b\, y\, P\, t\, y\, x\, y\, dS_{\alpha\,\alpha\,\beta}\, \mu$

$( ) (( ),)) ( ) 0$

$_{k\,k\,y}$

$_{k} \quad , \quad _{k}$

$= \quad 1 \quad -$

Основным результатом данного параграфа является:

Лемма 6. Пусть $u\, x( )$ - гармоническая функция в области Ωи

$_{0}( ) ( )\, _{RL\, r} r\, D\, u\, x\, C^{\alpha\,\alpha} \in \Omega$, $\alpha \in (0,1)$. $^{\beta}$существует и имеет место формула

Тогда для любого $_{0}( )\, _{RL\, r} D\, u\, x$ $\quad \beta\ \alpha \in [0,)$производная

1

1

$( )^{RL\, r\, RL\, r}\ r\, D\, u\, x\, s\, D\, u\, sx\, ds^{\beta\,\beta\,\alpha\,\beta\,\beta}$

$( ) (1) ( ) = -$

$\alpha\ \beta^{-\,-}{}_{1}$

$\Gamma - \int$.

$0\,0$

0

$a\, x( ), ( ), ( )\, _{k\,k}\, a\, x\, b\, x$,

Теорема 24. Пусть $_{1}$, k=1,2,..., $\Gamma \subset \Omega \subset \Omega_{k\,0}$

$k = 0,1,2...$, – непрерывные функции. Тогда:

$b\, x$

$( ) 1$

$+ < \in \partial\Omega \sum \sum \Gamma - \Gamma -$, то задача XIII

$\infty\ \infty$

$a\, x\, x$

$( )$,

1) если $\quad \beta\ \alpha$

$_{k} \quad _{k}$

$(1) (1)$

$_{k\,k}{}_{k}$

$= =$

$0\ 0$

однозначно разрешима при любом $f\ x\ C\ (\ )\ (\ ) \in \partial\Omega$.

$b\ x$

$(\ )\ 1$

$+ = \in\partial\Omega \sum \sum \Gamma - \Gamma -$, то необходимое и

$\infty\ \infty$

$a\ x\ x$

$(\ )$,

2) если $\beta\ \alpha$

$k \qquad k$

$(1\ )\ (1\ )$

$k\ k\ k$

$= =$

$0\ 0$

достаточное условие разрешимости (с точностью до постоянного слагаемого) задачи XIII имеет вид (24), где функция $\mu_0(x)$ – решение уравнения (30), причем число линейно независимых решений этого уравнения при этих условиях равно 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению свойств интегро дифференциальных операторов дробного порядка и применению их к вопросам разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Для параболического уравнения четвертого порядка с операторами дробного дифференцирования в смысле Капуто и Джарбашяна-Нерсесяна сформулированы и исследованы нелокальные задачи типа Самарского Ионкина, доказана базисность Рисса систем корневых функций соответствующих задач. Полученные результаты могут послужить основой для дальнейшего изучения различных свойств аналогичных краевых задач и их спектров для широкого класса дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Установлена корректность ряда прямых и обратных задач с интегральными условиями склеивания для смешанных параболо гиперболических уравнений дробного порядка. Полученные результаты обобщают ранее исследованные задачи для смешанных уравнений целого порядка и могут быть применены как при дальнейшем развитии теории смешанных уравнений второго и высокого порядков с операторами дробного интегро-дифференцирования, так и при исследовании конкретных прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

3. В классе гармонических функций и в классах Гѐльдера изучены свойства интегро-дифференциальных операторов дробного порядка и их

применение к решению краевых задач. Полученные результаты могут послужить основой для введения и изучения новых операторов дробного порядка и их обобщений в классе гармонических функций и в классах Гѐльдера, а также их применению к решению краевых задач.

4. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в теоретических исследованиях в таких математических дисциплинах, как дробное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения, уравнения математической физики, а разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов, обучающихся по специальности «Математика»

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN,

INSTITUTE OF MATHEMATICS
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KADIRKULOV BAKHTIYOR JALILOVICH

APPROACHES OF SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2017

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number

B2017.1.DSc/FM7

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant: Ashurov Ravshan Radjapovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Official opponents: Umarov Sabir Rakhimovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Takhirov Jazil Ostanovich
doctor of physical and mathematical sciences, professor

Hasanov Anvarjon
doctor of physical and mathematical sciences

Leading organization: Urgench State University

Defense will take place «____» __________ 2017 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.,4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2017.
(mailing report № __ on « ___ » ____________ 2017).

A.S.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.M.S., academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.M.S.

M.S.Salahitdinov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Studying properties of integro-differential operators and their applications to solve nonclassic problems for partial differential equations has different and important applications. Therefore, development of researches on integro-differential operators of fractional order and their application is one of the important problems.

The aim of the research work is to solve direct and inverse problems for partial differential equations with integro-differential operators, to study properties of integro-differential operators and their applications to solve nonclassic problems for elliptic equations.

The tasks of research work:

to prove unique solvability of nonlocal problems for partial differential equations of fourth order with integro-differential operators;

to study basis properties of root functions of spectral problems, corresponding to the Samarskii-Ionkin type problems;

to define unique solvability conditions of inverse problems of the identification of source-function for the partial differential equations with fractional order operators;

to prove regular solvability of problems for fractional order mixed type equations of with the integral matching condition;

to study properties of integro-differential operators of fractional order of the Hadamard and Hadamard-Marchaud type and their applications to solve boundary value problems for elliptic equations;

to elaborate the methods of solving boundary value problems, and also the Bitsadze-Samarskii type problems for equations of elliptic type with generalized boundary value operators of fractional order.

The object of the research work is integro-differential operators of fractional order in the sense of Caputo, Riemann-Liouville, Dzhrbashyan–Nersesyan, Hadamard and Hadamard-Marchaud, partial differential equations of fractional order.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the unique solvability of nonlocal problems for partial differential equations of fourth order with integro-differential operators is proved;

for the first time basis properties of root functions of spectral problems, corresponding to the Samarskii-Ionkin type problems is studied; the necessary conditions of the existence of inverse problems of the identification of source-function for the partial differential equations with fractional order operators are justified;

regular solvability of problems for mixed type equations of fractional order with the integral matching condition is proved;

properties of integro-differential operators of fractional order of the Hadamard and Hadamard-Marchaud type are studied and applied to solve boundary value problems for elliptic equations;

the method of the solving boundary value problems, and also the Bitsadze Samarskii type problems in the class of harmonic and smooth functions for equations of elliptic type with generalized boundary value operators of fractional order is worked out.

The outline of the thesis. Dissertation work is devoted to the investigation of the properties of fractional order integral-differential and their application to the solvability questions of boundary value problems for partial differential equations.

In conclusion, we can make the following remarks on results of the investigation:

1. Samarskii-Ionkin type non-local problems are formulated and studied for the fourth order parabolic equation with fractional differential operators in a sense of Caputo and Djerbashyan-Nersesyan, Riesz basis property of the corresponding system of root functions have been proved. Obtained results might be applied to the further development of the study of analogical boundary value problems and their spectrum for wide class of partial differential equations.

2. Correctness of a series of direct and inverse problems with integral transmitting conditions for mixed parabolic-hyperbolic type equations of fractional order. These results generalize previous results on boundary value problems for mixed type equations of integer order and as well in further development of the theory of mixed type equations of the second and higher order with fractional order integral-differential operators, at studying applied problems related with afore mentioned problems.

3. Properties of fractional order integral-differential operators in a class of harmonic functions and Hölder classes are studied and applied to the solution of boundary value problems.

4. Methods and results of the dissertation work might be used in theoretical approaches of mathematical disciplines such fractional calculus, differential and integral equations, equations of mathematical physics, chapters can be base for content of special courses for students with major “Mathematics”.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Кадиркулов Б.Ж., Турметов Б.Х. Об одном обобщении уравнении теплопроводности // УзМЖ. - Ташкент, 2006. - № 3. - С.40-45. (01.00.00; № 6).
2. Аманов Ж., Кадиркулов Б.Ж. Краевая задача для смешанно – параболического уравнения четвертого порядка с дробными производными // УзМЖ. - Ташкент, 2009. - № 4. - С. 11-20. (01.00.00; № 6).

3. Berdyshev A.S., Cabada A, Kadirkulov B.J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // An Inter. J. Computers and Mathematics with Applications. - Elsevier, 2011. - v. 62. - № 10. - P. 3884-3893. (2. Journal IF: 1.747)

4. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка // УзМЖ. - Ташкент, 2012. - № 1. - С. 74-80. (01.00.00; № 6).

5. Бердышев А.С, Турметов Б.Х. Кадиркулов Б.Ж. Некоторые свойства и применения интегродифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций // Сиб. мат. журнал. - Новосибирск, 2012. - т. 53. - № 4. - С. 752-764. (2. Journal IF: 0,285)

6. Кадиркулов Б.Ж, Турметов Б.Х. Модифицированные интегро дифференциальные операторы Адамара и некоторые их применения // УзМЖ. - Ташкент, 2013. - № 3. - С. 41-49. (01.00.00; № 6).

7. Berdyshev A.S., Kadirkulov B.J., Nieto J.J. Solvability of an elliptic partial differential equation with boundary condition involving fractional derivatives // An Inter. J. Complex Variables and Elliptic Equations. - Taylor & Francis, 2014. - v. 59. -№ 5. - P. 680-692. (2. Journal IF: 0,610).

8. Kadirkulov B.J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative / EJDE. - Texas State University -San Marcos, 2014. -v. 2014. № 57. -P. 1-7. (2. Journal IF: 0,524).

9. Kadirkulov B.J., Kirane M. On solvability of a boundary value problem for the poisson equation with a nonlocal boundary operator // Acta Mathematica Scientia (Series B). - ScienceDirect, 2015. - v. 35. - № 5. - C. 970-980. (2. Journal IF: 0,557).

10. Кадиркулов Б.Ж. Об одной задаче типа Самарского-Ионкина для двумерного дробного параболического уравнения // УзМЖ. - Ташкент, 2015. - № 4. - С. 57-62. (01.00.00; № 6).

11. Бердышев А.С. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Джрбашяна-Нерсесяна // Дифф. уравнения. – Минск, 2016. - т. 52. - № 1. - С.123–127. (11.Springer: 0.431).

12. Berdyshev A.S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative // EJDE. - Texas State University. - v. 2016. № 36. - P. 1-11. (41.SCImago: 0,613).

II бўлим (II часть; II part)

13. Бердышев А.С, Турметов Б.Х. Кадиркулов Б.Ж. О некоторых обратных задачах для уравнения теплопроводности дробного порядка // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. - Алматы, 2010, - № 2 (65). - С. 36-42.

14. Бердышев А.С. Кадиркулов Б.Ж. Об одной задаче типа Самарского для параболического уравнения четвертого порядка // Труды научной конференции «Проблемы современной математики», посвященная 20 летию независимости РУз. 22-23 апреля 2011 года. –Карши, 2011. -Стр. 84-86.

15. Кадиркулов Б.Ж. О гладкости решения одной краевой задачи с оператором дробного порядка типа Адамара-Маршо в классах Гельдера // Всероссийская конф. «Дифф. уравнения и их приложения». 26-30 июня 2011. – Самара, 2011. - С. 56.

16. Бердышев А.С, Турметов Б.Х. Кадиркулов Б.Ж. О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения теплопроводности дробного порядка // Вестник КазНПУ, серия физ.-мат. науки. - Алматы, 2012, - № 2 (38). -С. 64-70.

17. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной с граничным оператором дробного дифференцирования // Материалы Республиканской научно практической конф. “Актуальные вопросы модернизации и диверсификации национальной экономики: зарубежный опыт, проблемы и переспективы”. 25 апреля 2012. –Ташкент, 2012. -С. 265-267.

18. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче с оператором дробного дифференцирования // Материалы Второго Межд. Российско Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». 28 май -1 июня 2012. – Эльбрус, 2012. - С. 133-135.

19. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. О краевых задачах для уравнения диффузии дробного порядка// “Математик анализнинг долзарб муаммолари” республика илмий анжумани материаллари. 9-10 ноябрь 2012. -Урганч, 2012. 70 – 71 бетлар.
20. Кадиркулов Б.Ж. О краевых задачах для смешанного параболо гиперболического уравнения с дробной производной с двумя линиями изменения типа // Труды Межд. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». 26-30 июня 2013. - Стерлитамак. 2013. -С. 167- 170.
21. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробной производной // Респ. Науч. конф с участием ученых из стран СНГ (тезисы док.) "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения". 21-23 ноября 2013. - Ташкент, 2013. -Стр. 60-62.
22. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче с дробной производной Капуто // Республиканская научная конференция с участием ученых из стран СНГ (тезисы док.) "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения". 21-23 ноября 2013. - Ташкент, 2013. -Стр. 38-39.

23. Бердышев А.С. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче Самарского – Ионкина для параболического уравнения четвертого порядка с дробной производной // Материалы IV Межд. конф. «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». 4 - 8 декабря 2013. - Нальчик –Терскол, 2013. - С. 75-76.
24. Berdyshev A.S., Kadirkulov B.J. On a nonlocal problem for partial differential equation of the fourth order with the operator of fractional differentiation Djrbashian-Nersesian // JMT. - Baku, 2013. -v. 4. - № 2. - С. 36-43.
25. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче с оператором дробного дифференцирования // Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2014». 15 - 17 сентября 2014. –Самарканд, 2014. -С. 216-219.
26. Кадиркулов Б.Ж. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного дифференцирования // Материалы Третьей Межд. Российско-Казахский симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». 3-7 декабря 2014. – Терскол, 2014. -С. 83-85.
27. Бердышев А.С. Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для параболического уравнения четвѐртого порядка с оператором дробного дифференцирования // Материалы Третьей Межд. Российско-Казахский симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». 3 - 7 декабря 2014. – Терскол, 2014. -С. 51-53.
28. Bakhtiyor J. Kadirkulov, Jambul A. Serikbaev. On boundary value problem for the fourth order mixed type equation with fractional derivative. International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016)

AIP Conf. Proc. 1759, 020069-1–020069-5; doi: 10.1063/1.4959683.
29. Бердышев А.С, Кадиркулов Б.Ж., Асхатулы А. Обратная задача для уравнения смешанного типа четвѐртого порядка с дробной производной // Вестник КазНУ, серия физ.-мат. науки. - Алматы, 2016, - № 4 (56). -С. 38-43.
30. Бердышев А.С, Кадиркулов Б.Ж. Об одной обратной задаче для дробного уравнения четвертого порядка с вырождением по времени // Материалы тезисов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации». 17–22 октября 2016. - Терскол, Россия, 2016. -С. 60-61.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (15 сентябрь 2017 йил).

Босишга рухсат этилди: 19.09.2017 йил
Бичими 60x45 $^{1}/_{8}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,7. Адади: 100. Буюртма: № _____.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.