

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Даниярова Гулайым Кууатбаевна

Учительница математики общеобразовательная школа No 27

<https://doi.org/10.5281/zenodo.16926905>

В качестве примера для разностной схемы решим уравнение Пуассона на прямоугольнике

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 4\sin 3\pi x \cos 2y \\ u(0, y) = 3y, \quad u(1, y) = y + 2 \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, \pi) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Проведём редукцию линейной задачи (1)[5]. Т.е. сведём решение (1) к сумме решений 2 простых систем: $u(x, y) = w(x, y) + v(x, y)$.

Первая система содержит неоднородное краевое условие:

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi \\ w(0, y) = 3y, \quad w(1, y) = y + 2 \\ w_y(x, 0) = 0, \quad w_y(x, \pi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Решаем задачу (2) методом разделения переменных $w(x, y) = X(x)Y(y)$, $X''Y + X Y'' = 0$. Мы находим решение, предполагая, что данное уравнение равно некоторому параметру λ , то есть

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \quad (3)$$

Теперь мы имеем уравнения

$$X'' - \lambda^2 X = 0$$

и

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0.$$

С помощью граничных условия получим задачу Штурм-Лювилля

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0$$

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(\pi) = 0$$

(4)

И отсюда получим собственную функцию $Y_k(y) = \cos ky$, $\lambda_k = k$ и затем функция $X_k(x) = A_k \cosh kx + B_k \sinh kx$. если мы подставим найденные функции в общий вид решения

$$w(x, y) = A_0 + \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y) \quad (5)$$

то получим общие решение уравнения (2)

$$w(x, y) = A_0 + \sum_{k=1}^n [A_k chkx + B_k shky] \cos ky \quad (6)$$

А теперь, с помощью двух граничных условия $w(0, y) = 3y$, $w(1, y) = y + 2$ мы находим коэффициенты A_0 , A_k и B_k .

Для нахождения коэффициенты A_0 , A_k и B_k , подставляя граничных условия на решение интегрируем, то есть у нас тогда получается равенству

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 3y dy, \quad A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 3y \cos ky dy, \quad B_k sh1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (y + 2) \cos ky dy - A_k ch1.$$

Если вычислим эти интегралы, тогда получается следующих значениях

$$A_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad A_k = \frac{6}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) \quad \text{и} \quad B_k = \frac{2}{\pi k^2 sh1} ((-1)^k - 1)(1 - 3ch1).$$

Всех значениях неизвестных коэффициенты поставим на решение, и получим

$$w(x, y) = \frac{3\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) \left[3chkx + \frac{1 - 3ch1}{sh1} shky \right] \cos ky \quad (7)$$

Теперь разложим ряд, так как всех четных членов равен нулю, возьмем всех нечетных членов, то вид решение

$$w(x, y) = \frac{3\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi (2k-1)^2} \left[3ch(2k-1)x + \frac{1 - 3ch1}{sh1} sh(2k-1)y \right] \cos(2k-1)y \quad (8)$$

значит получено решение для уравнения (2).

Вторая система содержит однородное краевое условие для уравнения

$$\text{Пуассона: } \begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 4 \sin 3\pi x \cos 2y, & 0 < x < 1, 0 < y < \pi \\ v(0, y) = 0, \quad v(1, y) = 0 \\ v_y(x, 0) = 0, \quad v_y(x, \pi) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Аналогично, решаем задачу (9) методом разделения переменных $v(x, y) = X(x)Y(y)$, $X''Y + X Y'' = 0$. Мы находим решение, предполагая, что данное

уравнение равно некоторому параметру λ , то есть $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$ и здесь

$\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Имеем равенств $\frac{X''}{X} = -\lambda_1^2$ и $\frac{Y''}{Y} = -\lambda_2^2$. Отсюда, через заданных

граничных условия и следующих равенств

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_1^2$$

и

$$\frac{Y''}{Y} = -\lambda_2^2$$

Получим две задачи Штурм-Лювилла. Собственные функции этих задач

$$X_m = \sin \pi m x, \quad \lambda_{1m} = \pi m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

и

$$Y_n = \cos n y, \quad \lambda_{2n} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь, используя эти собственные функции, запишем общее решение данного уравнения в виде, т.е.

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \sin \pi m x \cos n y \quad (10)$$

Подставляя найденное решение в уравнение (9) возникнет равенство

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} (\pi m)^2 \sin \pi m x \cos n y - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} n^2 \sin \pi m x \cos n y = 4 \sin 3\pi x \cos 2y.$$

(11)

Упростим полученного равенство, тогда

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} [(\pi m)^2 + n^2] \sin \pi m x \cos n y = 4 \sin 3\pi x \cos 2y.$$

Интегрируя этого равенство, имеем следующего интеграла

$$-C_{mn} [(\pi m)^2 + n^2] = \frac{4}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^{\pi} 4 \sin 3\pi x \cos 2y \sin \pi m x \cos n y dy$$

Вычислив интеграла, возьмем значение C_{mn} , то есть

$$C_{mn} = 0.$$

Но по другому сторону есть еще одна значения, точнее если $m = 3$ и $n = 2$, тогда

$$C_{32} = \frac{4}{9\pi^2 + 4}.$$

А остальные равняется нулю.

Значит для второго систему у нас получается решения

$$v(x, y) = \frac{4}{9\pi^2 + 4} \sin 3\pi x \cos 2y. \quad (12)$$

Теперь запишем сумму полученные решения $w(x, y)$ и $v(x, y)$, то получится решения $u(x, y) = w(x, y) + v(x, y)$ уравнения Пуассона, то есть

$$u(x, y) = \frac{3\pi}{2} + \frac{4}{9\pi^2 + 4} \sin 3\pi x \cos 2y -$$



$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \left[3ch(2k-1)x + \frac{1-3ch1}{sh1} sh(2k-1)y \right] \cos(2k-1)y. \quad (12)$$

Следовательно, равенства (12) является решение задачи Дирихле для данного уравнения Пуассона.

Литература:

1. Герец А.Ю., Зеленкевич А.А., Гурьева Н.А., Пастухов Ю.Ф., Пастухов Д.Ф. Согласование порядков аппроксимации дифференциального и граничного операторов в краевой задаче для уравнений в частных производных. Вестник Полоцкого университета. Серия С: Фундаментальные науки. 2015. №12. С. 102-109.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. – М.: Издательство ЛКИ, 2014. – 480 с.
3. А.Г.Свешников, А.Н.Боголюбов, В.В.Кравцов. Лекции по математической физике. – М.: Изд. – во МГУ, 1993 – 332 с.