

ON PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Kurbanov O. T.¹

Settiev Sh.R.²

¹Kurbanov Odiljon Tukhtamuradovich., associate professor Department of «Digital Economics and Mathematical Disciplines», Plekhanov Russian University of Economics, Tashkent Branch (Uzbekistan)

²Settiev Shamsuddin Rajabovich, associate professor Department of «Digital Economics and Mathematical Disciplines», Plekhanov Russian University of Economics, Tashkent Branch (Uzbekistan)

The regular solvability is investigated of the problem for a third-order equation with multiple characteristics. The existence and uniqueness theorems for regular solutions are proved by the method of regularization and energy integrals.

Key words: boundary problems, Airy function, Volterra II type equation, integral equation.

Найти в области $D = \{(x, t); x > 0, t > 0\}$ ограниченное решение уравнения

$$u_t = u_{xxx} \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0 \quad (2)$$

$$\int_0^{x(t)} u(x, t) dx = \psi(t), \quad x(t) > 0, t > 0 \quad (3)$$

где $x(t)$, $\varphi(t)$ и $\varphi(x)$ известные непрерывные функции своих аргументов в интервале $[0; +\infty)$, такие что

$$\psi(0) = \int_0^{x(0)} \varphi(x) dx \quad (4)$$

Из-за линейности уравнения, достаточно изучить случай, когда $\varphi(x) = 0$.

I. Существование решения

1. Эквивалентное интегральное уравнение

Предположим, что задача (1) - (3) имеет решение $u(x, t)$. Пусть $u(0, t) = \mu(t)$.

Так как $u(x, t)$ непрерывное и ограниченное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) - (3), то его можно представить в виде:

$$u(x, t) = - \int_0^t \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial x} \mu(\tau) d\tau \quad (5)$$

где

$$U(x, t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{1/3}} f\left(\frac{x}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad t > \tau \quad (6)$$

$$f(t) = \int_0^\infty \cos(\lambda^3 - \lambda t) d\lambda - \text{функция Эйри.}$$

Следовательно

$$\psi(t) = - \int_0^{x(t)} \int_0^t \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial x} \mu(\tau) d\tau dx$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\psi(t) = \int_0^t [U(0, t - \tau) - U(x(t), t - \tau)] \mu(\tau) d\tau \quad (7)$$

Теорема 1.

Если существует и единственное непрерывное решение $\mu(t)$ уравнения (7) с условием $\mu(0) = 0$, то существует и единственное решение задачи (1) – (3).

Доказательство.

Предположим, что задача (1) – (3) имеет единственное решение $u(x, t)$ и кроме того пусть (7) имеет непрерывное решение $\mu(t)$ удовлетворяющее условию $\mu(0) = 0$. Следовательно, $\mu(t)$ единственно. Если не так, тогда существует решения $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ уравнения (7), такие что $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$.

Множество

$$u_i(x, t) = - \int_0^t \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial x} \mu_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

является решением (1) – (2). Из (8) и $\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$ имеем что $u_1(x, t) \neq u_2(x, t)$ которое противоречит предположению единственности решения задачи (1) - (3).

Пусть теперь (7) имеет единственное непрерывное решение $\mu(t)$ с условием $\mu(0) = 0$. Из этого предположения следует, что $u(x, t)$ определяемое формулой (5) является решением (1) - (3). Следовательно, $u(x, t)$ единственно.

Исследуем существование и единственности решение (7).

Пусть

$$\varphi(t) \in C^1[0; \infty) \text{ и } \varphi(0) = 0 \quad (a)$$

$$x(t) \in C^1[0; \infty), x(t) \geq \xi > 0, t \geq 0 \quad (б)$$

Предположим, что (7) имеет непрерывное решение $\mu(t)$ с условием $\mu(0) = 0$.

Покажем, что $\mu(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра II рода. Из этого следует существование, единственность и устойчивость решения (7).

Из (7) имеем

$$f(0) \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt[3]{t-\tau}} d\tau = \psi(t) + \int_0^t U(x_1(t); t-\tau) \mu(\tau) d\tau \quad (10)$$

Умножив обе части уравнения (10) на $\frac{1}{(z-t)^{2/3}}$ и проинтегрировав по t

от 0 до z , далее меняя порядок интегрирования и дифференцируя по z имеем

$$f(0) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \mu(z) = \frac{d}{dz} \left[\int_0^z \left\{ \psi(t) + \int_0^t U(x(t), t-\tau) \mu(\tau) d\tau \right\} \frac{dt}{(z-t)^{2/3}} \right], \quad z > t \quad (11)$$

или

$$\mu(z) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\psi(t)}{(z-t)^{2/3}} dt + \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot f(0)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{F(t)}{(z-t)^{2/3}} dt, \quad z > 0 \quad (12)$$

Исследуем правую часть (12)

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\psi(t)}{(z-t)^{2/3}} dt = \frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \int_0^z \frac{\psi'(t)}{(z-t)^{2/3}} dt = Q(z) \quad (13)$$

$$F(t) = \int_0^t U(x(t), t-\tau) \mu(\tau) d\tau \quad (14)$$

Так как $x(t) \in C^1[0; \infty)$ для $x(t) \geq \xi > 0, t \geq 0$, следует что $F(t) \in C^1[0; \infty)$ с условием $F(0) = 0$.

Следовательно

$$F'(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} U(x(t), t-\tau) \mu(\tau) d\tau$$

и

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{F(t)}{(z-t)^{2/3}} dt = \frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \int_0^z \frac{F'(t)}{(z-t)^{1/3}} dt \quad (15)$$

Поэтому

$$\mu(z) = Q(z) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi \cdot f(0)} \int_0^z \left\{ \int_0^t \frac{\partial U(x(t), t-\tau)}{\partial t} \mu(\tau) d\tau \right\} \frac{dt}{(z-t)^{1/3}}$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\mu(z) = Q(z) + \int_0^z \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2\pi f(0)} \int_\tau^z \frac{\partial U(x(t); t-\tau)}{\partial t} \cdot \frac{dt}{(z-t)^{1/3}} \right\} f(\tau) d\tau,$$

или

$$\mu(z) = Q(z) + \int_0^z K(z; \tau) f(\tau) d\tau \quad (16)$$

Таким образом, любое решение (7) должно удовлетворять уравнению (16). Так как $Q(z)$ непрерывная функция с условием $Q(0) = 0$ и можно показать, что $K(z; \tau)$ функция со слабой особенностью для $z > \tau$, следует что (16) имеет единственное непрерывное решение $\mu(z)$ удовлетворяющее условию $\mu(0) = 0$. Это найденное решение $\mu(t)$ и является решением уравнения (7).

Теорема 2

Если

$$\psi(t) \in C^1[0; \infty) \text{ и } \psi(0) = 0,$$

(17)

$$x(t) \in C^1[0; \infty) \quad x(t) \geq \xi > 0, \quad t \geq 0$$

тогда (7) имеет единственное непрерывное решение $\mu(z)$ для всех $z \geq 0$, такое что $\mu(0) = 0$. Кроме того, $\mu(z)$ определяется уравнением (16).

Теорема 3

Если имеет место условия (17), тогда задача (1) - (3) имеет единственное решение.

References

1. L.Cattabriga. Un problem al contorno per una equazione parabolica di ordin dispari. Amali della Souola Normale Superiore di Pisa a Matematica. Seria III. Vol XIII.Fasc.II. 1959. -P.163-203.
2. J.R. Cannon. The solution of heat equation subject to the specification of energy, Rice University, Houston, Texas. Vol. XXI, №2, 1963. - P.155-160.