ОБЛАСТЬ СЕПАРАТНО-ГАРМОНИЧНОСТИ

Сатликов Г.Р.
Чориев Ш.Ф.
Ургенчский государственный университет, gsatlikov81@gmail.com
Национальный университет Узбекистана, ул. Университет, 4, Ташкент, 100174 Узбекистан, shoxruzchoriyev2001@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.15836369

Аннотация

В работе рассматривается понятие сепаратно-гармоничности функций многих переменных по раздельным группам переменных. Исследуются оболочки сепаратно-гармоничности для областей. В частности, доказано, что область обладающего барьерными функциями на всюду плотном подмножестве границы, является областью сепаратно-гармоничности.

Ключевые слова: Гармоническая функция, сепаратно-гармоническая функция, оболочка сепаратно-гармоничности, барьер, область сепаратно-гармоничности.

Abstract

The paper considers the concept of separate harmonicity of functions of several variables with respect to disjoint groups of variables. The separate harmonicity hulls for domains are studied. In particular, it is proven that a domain possessing barrier functions on a dense subset of the boundary is a domain of separate harmonicity.

Keywords: Harmonic function, separately harmonic function, separate harmonicity hull, barrier, domain of separate harmonicity.

1. Введение

Известно, что для любой плоской области $D\subset\mathbb{C}$ существует функция, голоморфная в D и не продолжаемая аналитически за пределы этой области, т.е. всякая плоская область, является областью голоморфности. В отличие от этого, в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n>1$, существуют области, из которых любая голоморфная функция аналитически продолжается в более широкую область. Например, не односвязная область $\left\{z\in\mathbb{C}^n:1<|z|<2\right\}$ является примером для таких областей (см.[1, стр.148, теорема Осгуда-Брауна]). Значить, в пространстве $\mathbb{C}^n, n>1$, всякая область не является областью голоморфности, т.е. класс голоморфных функций многих комплексных переменных обладает эффектом принудительного аналитического продолжения (см.[1, стр.153]).

Оказывается, класс сепаратно-гармонических функций также обладает свойством принудительного аналитического продолжении. В этой работе мы изучаем областей сепаратно-гармоничности.

2. Сепаратно-гармонические функции

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset D \times G$ — область, $D \supset E$ и $G \supset F$ — некоторые подмножества. Предположим, что функция $u(x,y)$, первоначально определенная на множестве $E \times F$, обладает следующими свойствами:

а) для любого фиксированного $x^0 \in E$ функция $u(x^0,y)$ гармонически продолжается в G;

б) для любого фиксированного $y^0 \in F$ функция $u(x,y^0)$ гармонически продолжается в D.

В таком случае указанные продолжения $u(x,y)$ определяют некоторую функцию на множестве $X = (E \times G) \cup (D \times F)$, которая называется *сепаратно-гармонической* функцией на X.

В случае когда $E = D$ и $F = G$, функция $u(x,y)$ называется сепаратно-гармонической в области $X = D \times G$, т. е. гармонической по группам переменных в отдельности.

Множество X, вообще говоря, не является областью. Для произвольной области, которая непредставима в виде произведения двух областей, сепаратно-гармоническая функция определяется следующим образом: *если функция* $u(x,y)$ *определена в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(y)$, $n,m > 1$, *и обладает следующими свойствами*:

1) *для любого* $x^0 : \left\{x = x^0\right\} \cap \Omega \neq \varnothing$, *функция* $u(x^0,y)$ *гармоническая по переменному* y *на сечении* $\left\{x = x^0\right\} \cap \Omega$;

2) *для любого* $y^0 : \left\{y = y^0\right\} \cap \Omega \neq \varnothing$, *функция* $u(x,y^0)$ *гармоническая по переменному* x *на сечении* $\left\{y = y^0\right\} \cap \Omega$, *то она называется сепаратно-гармонической функцией в области* Ω.

Выше определенный класс сепаратно-гармонических функций обозначаем через $h_{nm}(\Omega)$ $(h_{nm}(X))$.

Известная теорема Хартогса (см. **[1]**) утверждает, что *если функция* $f(z,w)$ *голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}^n$ *по* z *при фиксированном* w *и* *голоморфна в области* $G \subset \mathbb{C}^m$ *по* w *при фиксированном* z, *то она голоморфна в* $D \times G \subset \mathbb{C}^n(z) \times \mathbb{C}^m(w)$ *по совокупности переменных.*

В 1961 году П. Лелон [2] доказал следующий аналог этой теоремы для сепаратно-гармонических функций: *если функция* $u(x,y)$ *сепаратно-гармоническая в области* $D \times G \subset \mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(y)$, *то функция* $u(x,y)$ *гармонична в* $D \times G$ *по совокупности переменных.*

Рассмотрим теперь следующую общую задачу: *пусть* $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset G \subset \mathbb{R}^m$ *и* $u(x,y)$ *сепаратно-гармоническая в множестве* $X = (E \times G) \cup (D \times F)$. *Требуется описать область гармоничности функции* $u(x,y)$.

Данная задача была изучена в работах [3], [4], [6], [8], [9].

В 1982 году А. Зеряхи [4] получил следующий результат: *пусть* $D \times G$ *—область пространства* $\mathbb{R}^2(x) \times \mathbb{R}^2(y)$ *и* $E \subset D$, $F \subset G$ *—компактные множества, удовлетворяющие условиям* H*-регулярности в классах гармонических полиномов. Тогда любая сепаратно-гармоническая на множестве* $X = (E \times G) \cup (D \times F)$ *функция гармонически продолжается в область*

$$X = \left\{(x,y) \in D \times G : \omega^*_{sh}(x,E,D) + \omega^*_{sh}(y,F,G) < 1\right\}.$$

Обычно, для продолжения гармонических функций сначала переходят к голоморфным функциям и потом используют принципы голоморфных продолжений.

Следующий результат играет основополагающую роль в изучении продолжения гармонических функций.

Предложение 1 (см.[6]). *Рассмотрим пространство* $\mathbb{R}^n(x)$, *вложенное в* $\mathbb{C}^n(z) = \mathbb{R}^n(x) + i \cdot \mathbb{R}^n(y)$, *где* $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_j = x_j + i \cdot y_j$, $j = 1, \dots, n$, *и пусть* D *некоторая ограниченная область из* $\mathbb{R}^n(x)$. *Тогда существует область* $D \subset \mathbb{C}^n(z)$ *такая, что* $D \subset D$ *и для любой функции* $u(x) \in h(D)$ *существует голоморфная в области* D *функция* $f_u(z)$ *такая, что* $f_u|_D = u$. *Кроме того, для любого числа* $M > 1$ *существует подобласть* $D_M \subset D$, $D \subset D_M$, *такая, что* $\|f_u\|_{D_M} \le M \|u\|_D$, $\forall u \in h(D) \cap L^\infty(D)$ (*здесь* $\|u\|_D = \sup\{|u(x)| : x \in D\}$).

Теорема 1 ([6]). *Пусть* $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$ *и* $F \subset G \subset \mathbb{R}^m$ *—компактные множества, не являющиеся плюриполярными в смысле подмножеств* *пространств* $\mathbb{C}^n(z)=\mathbb{R}^n(x)+i\cdot\mathbb{R}^n(y)$ *и* $\mathbb{C}^m=\mathbb{R}^m+i\cdot\mathbb{R}^m$. *Тогда любая сепаратно-гармоническая на множестве* $X=(E\times G)\cup(D\times F)$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область*

$$X=\left\{(x,y)\in D\times G:\omega^*(x,E,D)+\omega^*(y,F,G)<1\right\}.$$

Таким образом, если компакты $E=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le R_1\right\}$, $F=\left\{x\in\mathbb{R}^m:|x|\le R_2\right\}$, то функция $u(x,y)$ гармонически продолжается в некоторую окрестность $E\times F$.

Здесь

$$\omega(z,E,D)=\sup\left\{u(z):u\in psh(D),u|_E\le 0,u|_D\le 1\right\}.$$

$$\omega^*(z,E,D)=\overline{\lim_{z'\to z}}\omega(z',E,D),\ z\in D,$$

называется $\mathcal{P}$-мерой (плюрисубгармонической мерой) множества $E\subset D$ относительно области $D\subset\mathbb{C}^n$ (см. [5], [7]).

3. Основные теоремы

Из приведённых выше теорем легко убедиться, что для некоторых областей $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$ существуют соответствующая, более широкая область $\hat{\Omega}\supset\Omega$ такое, что класс сепаратно–гармонических в Ω функций сепаратно-гармонически продолжается на $\hat{\Omega}$. Область $\hat{\Omega}$ называется оболочкой сепаратно–гармоничности области Ω.

Определение 1. *Область* $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$ *называется областью сепаратно-гармоничности для класса* $h_{nm}(\Omega)$, *если существует некоторая функция* $u(x,y)\in h_{nm}(\Omega)$, *которая гармонически не продолжается ни в одну точку вне множества* Ω.

Определение 2. Будем говорить, что в граничной точке $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ области $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$ существует барьер, если существует функция $\vartheta(x,y)\in h_{nm}(\Omega)$, неограниченная в точке (ξ,η), т.е. $\vartheta(x_j,y_j)\to\infty$ по некоторой последовательности $(x_j,y_j)\in\Omega$, $(x_j,y_j)\to(\xi,\eta)$ при $j\to+\infty$.

Теорема 2. Если на всюду плотном множестве точек границы области Ω существует барьер из класса $h_{nm}(\Omega)$, то Ω является областью сепаратно-гармоничности для класса $h_{nm}(\Omega)$.

Пусть D_n и D_m – области соответственно из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, $D_n\supset\supset O_n$, $D_m\supset\supset O_m$ – открытые подмножества, а $X_{nm}=(O_n\times D_m)\cup(D_n\times O_m)$ –открытое множество типа кресть. Обозначим через $\hat{X}_{nm}$ –максимальное открытое множество такое, что $X_{nm} \subset \hat{X}_{nm}$, $h_{nm}(\hat{X}_{nm}) \subset h_{nm}(X_{nm})$ (см. теорема 1).

Теорема 3. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *является областью сепаратно-гармоничности тогда и только тогда, когда для любого открытого множества типа креста* X_{nm}, *принадлежащего* Ω, *его сепаратно-гармоническая оболочка* $\hat{X}_{nm}$ также принадлежит Ω: $X_{nm} \subset \Omega \Rightarrow \hat{X}_{nm} \subset \Omega$.

Следствие 1. Любая область типа $D_n \times D_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ является областью сепаратно- гармоничности для класса $h_{nm}(D_n \times D_m)$.

Следствие 2. Любая строго выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *является* областью сепаратно-гармоничности для класса $h_{nm}(\Omega)$.

Литература:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных. — М.: Наука, 1976.
2. Lelong P., Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles, Ann. Inst. Fourier. Paris, 1961, vol. 11, pp. 515-562.
3. Hecart Jean-Marc, Ouverts d`harmonicite pour les fonctions separement harmoniques, Potential Anal., 2000, vol. 13, no. 2, pp. 115-126.
4. Zeriahi A., Bases communes dans certains espaces de fonctions harmoniques et fonctions separement harmoniques sur certains ensembles de , Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math., 1982, ser. 5, vol. 4. pp. 75-102.
5. Захарюта В.П. Сеператно аналитические функции, обобщённые теоремы
6. Хартогса и оболочки голоморфности // Мат. сб. — 1976. —Т. 101, №1. — С. 57-76.
7. Sadullaev A., Imomkulov S. A., Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with subtle singularities on parallel sections, Proc. Steklov Inst.Math.,253(2006), pp. 144-159.
8. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ. — 1985. — Т. 8. — С. 65-111.

Sachiko Hamano, Hartogs-Osgud theorem for separately harmonic functions, Proc. Japan Acad., 83, Ser. A (2007), pp. 16-18.

Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Продолжение сепаратно-гармонических функции вдоль фиксированного направления // Научный
9. Вестник Самаркандского государственного университета. — 2024. — №1/2(143). — С. 42-46.