

KOPULA FUNKSIYALAR VA ULAR BILAN BOG‘LIQ SKLAR TEOREMASI.

Avazov Bekzod Mamanazarovich

Toshkent davlat agrar universiteti
Axborot tizimlari va texnologiyalari kafedra
Assistenti

Telefon: +998 91 453 96 40

Email: bekzodavazov2@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15544755>

Annatatsiya: Kopula funksiyalari yordamida ehtimollikning ko‘p o‘lchovli taqsimot qonunini tuzishimiz mumkin. Ular qaralayotgan ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar komponentalari orasidagi mavjud bog‘liqlik xarakterini va ko‘p o‘lchovli qonunini analiz qilish bilan bir o‘lchovli marginal taqsimotlar orqali ifodalanadi.

Kalit so‘zlar: Kopula. Kopula funksiya. Abe Sklar. Sklar teoremasi. Tasodifiy miqdorlar.

Ma‘lumki, sug‘urta ishi, tibbiyot, biologiya, sotsiologiya, moliya bilan bog‘liq boshqa ko‘plab sohalardagi amaliy masalalarda ko‘p o‘lchovli o‘zaro bog‘liq tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimotlarini o‘rganish muhim ahamiyatga egadir. Kopula atamasi lotincha “copula” so‘zidan olingan bo‘lib, bog‘lanish, bog‘lovchi va bog‘liqlik degan ma’nolarini anglatadi. Kopula funksiya tushunchasini dastlab, fransuz matematiki Abe Sklar tomonidan 1959 yildagi ilmiy maqolasida kiritgan bo‘lsada, lekin uni 1990 yillar oxirlaridan boshlab chuqur o‘rganishni boshlandi. Bunda 1999 yilda New Yorkning mashhur “Springer-Verlag” nashriyotida chop etilgan R.B.Nelsenning “An Introduction to Copulas” nomli kitobi [2] asosiy rol o‘ynadi. Keyinchalik, uning ikkinchi nashri ham 2006 yilda chop etilgan. Kopula funksiyalari bilan bog‘liq statistik ilmiy tadqiqotlar tez suratda rivojlanib bordi. Hozirgi kunga kelib, kopula – funksiyalari juda ko‘p sohalarda, biostatistika (Lambert, Vanderhende, 2002), gidrologiya (Zhang, Singh, 2006) klimatologiya (Salvadori, De Michele, 2007) va boshqa fan tarmoqlarining amaliy masalalariga tadbiq etilmoqda.

1. Psevdo-teskari funksiya tushunchasi va u yordamida aniqlangan ikki o‘lchovli funktsiyani kopula funksiya bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlari

X va Y tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi $H(x, y)$ va uning marginal taqsimotlari $F(x)$, $G(y)$ lar bo‘lsin. Agar X va Y lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda $H(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ bo‘ladi, ya’ni birgalikdagi taqsimot, ikkita faktorlar taqsimotlarning ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. Lekin keyinchalik



biz ko'ramiz bu tasdiq har doim ham yaxshi natija beravermaydi. Shuning uchun ham kopula funksiyalarning eng muhim oilasi Arximed kopula funksiyalari (oilasi) ni ta'rifini va xossalarni o'rganamiz. Buning uchun biz bir nechta yangi tushunchalarni ta'rif orqali kiritib olamiz.

1-ta'rif: Aytaylik $\varphi: [0,1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^{-1}$ - uzluksiz, qat'iy kamayuvchi funksiya bo'lib, $\varphi(1)=0$ bo'lsin. Quyidagi tenglik bilan aniqlanuvchi $\varphi^{[-1]}(t)$ funksiyaga $\varphi(t)$ ning psevdo-teskarifunksiyasi deyiladi:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (1)$$

$\varphi^{[-1]}(t)$ - funksiya $[0;\infty]$ da uzluksiz va o'smaydigan va $[0,\varphi(0)]$ da esa qat'iy kamayuvchi funksiya bo'ladi. Bundan tashqari $[0,1]$ da $\varphi^{[-1]}(\varphi(u))=u$ va $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} = \min(t, \varphi(0))$. Agar $\varphi(0)=\infty$ bo'lsa, u holda $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t)$ bo'ladi. $\varphi(t)$ – ba'zan generator kopula deb ham ataladi.

Лемма – 1. Agar $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ - uzluksiz va qat'iy kamayuvchi, hamda $\varphi(1)=0$ bo'lib, $\varphi^{[-1]}(t)$ - funksiya $\varphi(t)$ ning psevdo-teskari funksiyasi bo'lsin, hamda funksiya $C(u,v): [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ quyidagi tenglik bilan aniqlansin:

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (2)$$

U holda $C(u,v)$ funksiya 1-ta'rifdagi (i) – shartni qanoatlantiradi.

Isboti: $C(u,0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$ ba $C(u,1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$, xuddi shunday $C(0,v) = 0$, $C(1,v) = v$. ■

Keyingi keltiriladigan lemmada (2) tenglik bilan aniqlanuvchi kopula funksiyaning 2 marta o'suvchi bo'lishiga zarur va yetarli shartlarni beriladi.

2-Lemma. Agar $\varphi, \varphi^{[-1]}$ va C 1-lemmadagi gipotezalarni qanoatlantirsa, u holda $C(u,v)$ - 2 marta o'suvchi funksiya bo'ladi faqat va faqat shu holdagi agar $\forall v \in [0,1]$, hamda $u_1 \leq u_2$ lar uchun

$$C(u_2,v) - C(u_1,v) \leq u_2 - u_1. \quad (3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Isboti: **Haqiqatdan ham,** (3) tengsizlik ushbu $C(u_2,1) - C(u_2,v) - C(u_1,1) + C(u_1,v) \geq 0$ tengsizlik bilan ekvivalent. Bu esa $C(u,v)$ - 2 marta o'suvchi ekanligidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik (3) tengsizlik o'rinli bo'lsin. $\forall v_1, v_2 \in [0,1]$, $v_1 \leq v_2$ sonlarni tanlash mumkinki, ular uchun



$C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$ o'rinli. Ammo, $C(u, v)$ - uzluksiz (chunki φ va $\varphi^{[-1]}$ lar ham uzluksiz) va $t \in [0, 1]$ uchun $C(t, v_2) = v_1$ yoki $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$. Bundan

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) = \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) = \\ &= C(c(u_2, v_2), t) - C(c(u_1, v_2), t) \leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2). \end{aligned}$$

Demak, $C(u, v)$ - 2 marta o'suvchi ekan.

3-teorema. Agar $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ - uzluksiz, qat'iy kamayuvchi, $\varphi(1) = 0$ va $\varphi^{[-1]}$ - funksiya (1) tenglik bilan aniqlanuvchi φ ning psevdoteskari funksiyasi bo'lsa, u holda (2) tenglik bilan aniqlanuvchi $C(u, v): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ funksiya kopula funksiya bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar φ qavariq funksiya bo'lsa.

Isboti: Biz avval (2) tenglik bilan aniqlangan $C(u, v)$ - kopula funksiya chegaralanganlik shartini qanoatlantirishini ko'rsatgan edik (1-Lemmaga qarang). Endi (3) tengsizlik faqat va faqat φ - qavariq bo'lishini ko'rsatishimiz kerak. Shuni ta'kidlash kerakki, φ - qavariq bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar $\varphi^{[-1]}$ - qavariq bo'lsa. (3) tengsizlik quyidagi tenglikka ekvivalent $\leq u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v))$, bunda $u_1 \leq u_2$, xuddi shunday, agar biz $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ va $C = \varphi(v)$ bo'lsa, u holda (3) yana quyidagi tengsizlikka ham ekvivalent bo'ladi:

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c), \quad (4)$$

bu yerda $a \geq b$ va $c \geq 0$. Faraz qilaylik (3) tengsizlik bajarilsin, ya'ni $\varphi^{[-1]}$ uchun (4) o'rinli bo'lsin. $\forall s, t \in [0, \infty]$ lar uchun $0 \leq s < t$ bo'lsin. Agar $a = \frac{(s+t)}{2}$, $b = s$ va $C = \frac{(t-s)}{2}$ deb olsak, (4) dan

$$\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}. \quad (5)$$

Bundan $\varphi^{[-1]}$ - o'rtacha qavariq (midconvex), $\varphi^{[-1]}$ - uzluksiz bo'lgani uchun $\varphi^{[-1]}$ ni qovariq funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Boshqa tomondan, f.q. $\varphi^{[-1]}$ - qavariq bo'lsin. Fiksirlangan a, b va $c \in [0, 1]$ lar uchun, bunda $a \geq b$, $c \geq 0$ va $\gamma = \frac{a-b}{a-b+c}$ deb olsak, $a = (1-\gamma)b + \gamma(a+c)$ va $b+c = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$ bundan

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}b + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c),$$



$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma \varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma) \varphi^{[-1]}(a+c).$$

Ikkala tengsizlikni qo'yib yuborsak, u holda (4) tengsizlikni hosil qilamiz.
Teorema to'liq isbotlandi. ■

XULOSA

Matematik statistikaning asosiy yo'nalishlardan biri statistik baholash nazariyasining eng muhim tushunchasi noma'lum parametrlarni baholash va olingan baholarning xossalarning o'rganish masalalariga bag'ishlangandir. Ma'lumki, so'ngi 10-12 yillar ichida statistik baholashning yangi kopula funksiyalari yordamida baholash usuli keng foydalanilmoqda. Bunda asosan kopulalar oilasi to'liq o'rganilgan bo'lib, ular yordamida statistik baholar tadqiq etilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Joe H. Multivariate models and dependence concepts. // London: Chapman Hall. 1997. – 418 p.
2. Nelsen R.B. An introduction to Copulas. // Second Edition. Springer, NewYork. 2006. – 269 p.
3. <http://www.gummy-stuff.org/copula-1.htm>
4. <http://www.gummy-stuff.org/copula-2.htm>
5. <http://www.gummy-stuff.org/copula-3.htm>
6. <http://www.cerna.ensmp.fr/Documents/MA-CopulaCatalogue.pdf>

