O'Z-O'ZIGA QO'SHMA BO'LMAGAN OPERATORLAR UCHUN SPEKTRAL MASALALARNI SONLI YECHISH

Yoqubjonov Dilshod
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti, Toshkent shahri, Universitet ko'chasi, 2-uy. a) dillshodyoqubjonov@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.14435911

Annotatsiya. Mazkur maqolada o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun spektral masalalarni sonli tadqiq qilish usullari tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy qismi sifatida operatorlarning spektral xususiyatlarini aniqlashda qo'llaniladigan matematik yondashuvlar va algoritmlar bayon etilgan. Mualliflar spektral masalalarning yechimlarini hisoblashda uchraydigan murakkabliklarni yengib o'tish uchun taklif qilingan sonli usullarni misollar yordamida ko'rsatib, ularning samaradorligini baholaydilar. Tadqiqot natijalari turli fan sohalarida qo'llanilishi mumkin bo'lgan spektral tahlil jarayonlarini optimallashtirish imkoniyatini yaratadi. Maqola o'z-o'ziga qo'shma operatorlar bilan ishlashda qiziqish bildiruvchi olimlar va mutaxassislar uchun muhim manba hisoblanadi.

Kalit so'zlar: spektral masalalar; sonli tadqiq qilish; spektral xususiyatlar; matematik yondashuvlar; algoritmlar; sonli usullar; tahlil jarayonlarini optimallashtirish.

Аннотация. В инженерных приложениях по определению собственных частот при колебаниях и критических сил в задачах устойчивости важное место занимает численная реализация спектральных задач. В данной работе предлагается численный подход разрешения дифференциальной проблемы в спектральных задачах для несамосопряженных операторов. В качестве примера рассмотрена задача об определении критических сжимающих сил и крутящих моментов в стержнях.

Ключевые слова: численная реализация; спектральных задач; численный подход; разрешения дифференциальной проблемы; несамосопряженные операторы; критические сжимающие силы; крутящие моменты в стержнях.

Annotation. Numerical realization of spectral problems occupies an important place in engineering applications for determining natural frequencies during oscillations and critical forces in stability problems. In this paper, we propose a numerical approach to solving the differential problem in spectral problems for non-self-adjoint operators. As an example, the problem of determining the critical compressive forces and torques in the rods is considered.

Keywords: numerical implementation; spectral problems; numerical approach; solutions to the differential problem; non-self-adjoint operators; critical compressive forces; torques in rods.

Ko'plab muhandislik masalalari spektral tenglamalar tizimini ko'rib chiqishga olib keladi, bu tizim faqat undagi ayrim parametrning qiymati ma'lum bo'lganda yagona yechimga ega bo'ladi. Ushbu parametr tizimning xususiy yoki xarakteristik qiymati deb ataladi.

Spektral masalalarni koordinata funksiyalari berilgan holda yechish, xarakteristik tenglamalar yordamida xususiy sonlarni aniqlashga qaratilgan algebraik masalaga olib keladi. Ushbu algebraik masala Uilkinsonning [1] fundamental ishida batafsil o'rganilgan.

Kelib chiqadigan qiyinchiliklarni yengib o'tish maqsadida, xususiy sonlarni aniqlashga oid algebraik masala o'rniga spektral masalalarda unga o'xshash differensial masalani yechish taklif qilinadi. Kollattsning [2] fundamental ishida qo'shma operatorlar uchun differensial masalalarni yechish yondashuvlari, qo'llanma mexanikasining dinamik masalalaridagi tenglamalarni yechishda koʻrib chiqilgan. Lekin bu yondashuv oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan operatorlarga tatbiq etilmaydi [3].

Oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan operatorlar nazariyasi konservativ boʻlmagan tizimlarda yuzaga keladigan jarayonlarni matematik oʻrganish uchun zarur boʻlib, zamonaviy fizika va mexanikada muhim rol oʻynaydi. Bu nazariya soʻnggi paytlarda matematiklar, fiziklar va ba'zan muhandislar tomonidan katta qiziqish uygʻotmoqda [4].

Oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar nazariyasidan farqli oʻlaroq, 1950-yilgacha oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan operatorlar nazariyasida hech qanday spektral taqsimotlar yoki ildiz vektorlarining toʻliqligi haqidagi teoremalar keltirilmagan edi.

Oʻsha yili M.V. Keldishning [5] ishi paydo boʻldi, unda u keng sinfdagi polinomial operatorlar toʻplami uchun ildiz vektorlarining toʻliqligi va xususiy sonlarning asimptotik xususiyatlari haqidagi teoremalarni aniqladi.

Ishlarda [6-9] spektral masalalarda differensial muammolarni sonli yechishga qaratilgan yondashuvlar taklif qilingan.

ECHISH USULI

O'lchamsizlashtirilgan bir o'lchovli spektral masala differensial tenglamalar tizimini vektor-matrisa shaklida quyidagicha ifodalash mumkin [6]:

$$[\mathrm{C}(x)\mathbf{V}'+\mathrm{Q}(x)\mathbf{V}]'+\mathrm{A}(x)\mathbf{V}'-p\mathrm{B}(x)\mathbf{V}=0 \qquad (1)$$

$$a_x\mathbf{V}'+\mathrm{b}_x\,\mathbf{V}=0 \quad at \quad x=0,l \qquad (2)$$

bu yerda, $\mathrm{C}(x)$, $\mathrm{Q}(x)$, $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$ – matrisa-funksiyalar, a_x, b_x – konstanta-matrisalar boʻlib, ularning koʻrinishi qaralayotgan masalaning xususiyatlariga bogʻliq. Bu yerda xususiy qiymat p gomogen chegaraviy masala (1)–(2) yechimi notrivial boʻlishi shartidan aniqlanadi.

Mazkur chegaraviy masala matrisa differensial usuli yordamida yechiladi [9]. Buning uchun quyidagi gomogen oddiy differensial tenglamalar tizimi kiritiladi:

$$\alpha[\mathrm{C}(x)\mathbf{V}'+\mathrm{Q}(x)\mathbf{V}]+\mathrm{b}\,\mathbf{V}=0 \qquad (3)$$

Bu yerda α,β - matrisa-funksiyalari quyidagi Koshining no-gomogen masalasi yechimi sifatida aniqlanadi:

$$\begin{cases}\alpha'=[\alpha\,\mathrm{A}(x)-\beta]\mathrm{C}^{-1}(x) & \alpha(0)=\mathrm{a}_0\mathrm{C}^{-1}(0)\\ \beta'=\alpha\,\mathrm{B}(x)-\mathrm{Q}(x) & \beta(0)=\mathrm{b}_0-\mathrm{a}_0\mathrm{C}^{-1}(0)\,\mathrm{Q}(0)\end{cases} \qquad (4)$$

Chegaraviy shartlar (2) va (3)ni hisobga olgan holda, *x = l* nuqtadagi noma'lumlar **U**(*l*),**U′** (*l*) uchun quyidagi 2×n oʻlchamli chiziqli algebraik tenglamalar tizimi hosil boʻladi:

$$\begin{pmatrix}\alpha(\mathrm{l})\mathrm{C}(\mathrm{l}) & \beta(\mathrm{l})+\alpha(\mathrm{l})\mathrm{Q}(\mathrm{l})\\ \mathrm{a}_l & \mathrm{b}_l\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{U}'\\ \mathbf{U}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (5)$$

Bu tizim xususiy qiymat *p*dan noaniq tarzda bogʻliq. Xususiy qiymatlar shartdan aniqlanadi:

$$S(p)=\det\begin{pmatrix}\alpha(\mathrm{l})\mathrm{C}(\mathrm{l}) & \beta(\mathrm{l})+\alpha(\mathrm{l})\mathrm{Q}(\mathrm{l})\\ \mathrm{a}_l & \mathrm{b}_l\end{pmatrix}=0 \qquad (6)$$

Hosil boʻlgan ildiz qiymatlari $p_к$ (6) tenglamasidan (5), ga qoʻyiladi va baza funksiyalari $\mathbf{U}'_к$ (*l*), $\mathbf{U}_к$(*l*) hisoblab chiqiladi. Keyin bu qiymatlar matrisa differensial usulining orqaga yurish sxemasi yordamida [9] *x*Є[*l*,0] oraligʻida baza funksiyalarini aniqlashda ishlatiladi. Yuqoridagi sxema spektral masalani analitik yechishda qoʻllanilishi mumkin. Sonli realizatsiyada esa xususiy qiymatlarni aniqlash uchun Vegshteynning iteratsion jarayoni [10] tuziladi:

$$\omega_1 = p_1 = S(p_0),\ \ p_{n+1} = S(\omega_n),$$
$$\omega_{n+1} = p_{n+1} - \frac{(p_{n+1} - p_n)(p_{n+1} - \omega_n)}{p_{n+1} - p_n + \omega_{n+1} - \omega_n} \qquad (7)$$

Iteratsion jarayonni to'xtatish sharti quyidagicha belgilanadi:

$$S(\omega_n) < \varepsilon \qquad (8)$$

Bu yondashuv spektral masalalarni samarali va aniq yechish imkonini beradi. Ma'lumki, amaliy mexanika chegaraviy masalalarining yechimiga oid tenglamalarning operatorlari musbat aniqlik va qo'shma xususiyatlarga ega bo'lishi matematik fizikaning juft tartibli differensial tenglamalari asosiy yoki tabiiy chegaraviy shartlar bilan berilgan holda ta'minlanadi. Bunday holatlarda spektral masalalarda xususiy sonlarning musbat aniqligi va baza funksiyalarining ortonormalligi qat'iy isbotlanadi.

Shu bilan birga, amaliy mexanika masalalarini yechishda ayrim hollarda tenglamalarning differensial operatorlari o'z-o'ziga qo'shma bo'lmasligi mumkin. Bunday hollarda spektral masalalarni yechishning murakkabligi shundan iboratki, ba'zi hollarda xususiy sonlar chegaraviy shartlarda ham qatnashishi mumkin. Misol uchun, sterjenning siqilishi va burilishining bir vaqtda yuzaga kelishi quyidagi spektral masalani keltirib chiqaradi [2]:

$$[D(DU'')']' + P[(DU')' + DU''] + M^2U' + P^2U = 0 \qquad (9)$$

Chegaraviy shartlar bilan:

$$U = (DU'')' + PU' + M^2U'/D = 0 \qquad x = 0, l \qquad (10)$$

Bu yerda D — sterjenning buralish qattiqligi, P — uzunligi bo'ylab siqilish kuchi, M — tashqi buralish momenti, U — konstruksiyaning siljishi. Bunday holda xususiy sonlar sifatida siqilish kuchining kritik qiymati P ham, burilish momentining kritik qiymati M ham qabul qilinishi mumkin. Ushbu masalada siqilish kuchi P uchun parabolik bog'lanish mavjud. Bu yerda yechim tenglamasi konvektiv hadni - M^2U' o'z ichiga oladi va xususiy sonlar chegaraviy shartlarda ham ishtirok etadi. Shuning uchun, ushbu masala uchun yechim tenglamasining operatori o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan hisoblanadi.

Belgilarni soddalashtirish uchun $W = DU''$ deb belgilasak, to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun spektral masala o'rniga ekvivalent bo'lgan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar tizimini olamiz:

$$\begin{cases} (DW')' + P(2W + D'U') + M^2U' + P^2U = 0 \\ U'' - \dfrac{W}{D} = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} W' + \left(P + \dfrac{M^2}{D}\right)U' = 0 \\ U = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Agar (1) va (2)-spektral masalasida funksiyalar matritsalari va konstanta matritsalari sifatida quyidagilarni qabul qilsak:

$$C=\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 0 & PD'+M^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2P & M^2 \\ 0 & -\dfrac{1}{D} \end{pmatrix},$$

$$a_0=a_1=\begin{pmatrix} 1 & P+\dfrac{M^2}{D} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b_0=b_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix} W \\ U \end{pmatrix}$$

Shunda u (11) va (12)-masalalarga ekvivalent bo'ladi.

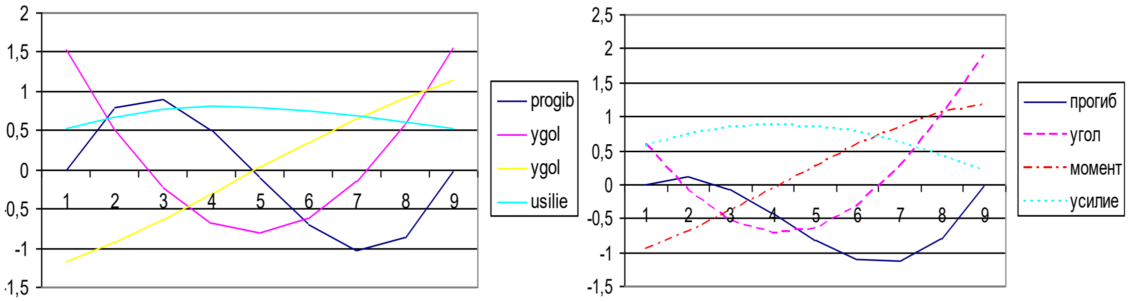
Birlashtirilgan spektral masalani yechish uchun chegaraviy va spektral masalalarni yechishga mo'ljallangan amaliy dasturlar to'plami ishlab chiqilgan. Ushbu dasturlar paketi matritsali differensial usuli asosida, Windows-10 integratsiyalangan muhitida Turbo-Pascal tilida yozilgan.

NATIJALAR TAHLILI

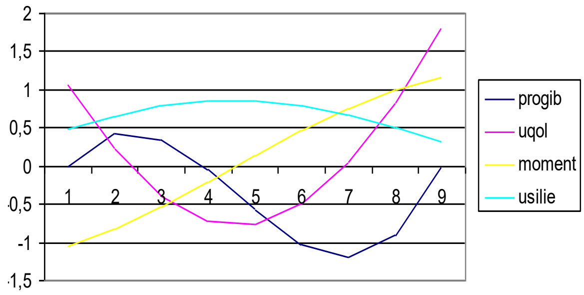
Ma'lumki, spektral masalalar (11) va (12) neft va gaz sohasi burg'ilash quduqlarida uchraydi. Quduqlarda burg'ilash uskunasi siqilish yuklari va burilish momentlarining birgalikdagi ta'siriga duch keladi. Ushbu yuk va momentlarning kritik qiymatlariga yetganda, burg'ilash uskunalarida avariya holatlari yuzaga keladi. Shu sababli siqilish kuchining kritik qiymati $-P_k$ va burilish momentining kritik qiymati $-M_k$ni aniqlash amaliy ahamiyat kasb etadi.

Olingan natijalardan kelib chiqadiki, burilish momentining ta'siri oshishi bilan siqilish kuchining kritik qiymati kamayadi, biroq boshqa tomondan, siqilish kuchini kamaytirish orqali burilish momentining kritik qiymatini oshirish mumkin. Ushbu holatlarni murakkab tog'-geologik tuzilmalarga ega neft va gaz konlarini o'zlashtirish jarayonida hisobga olish zarur. Masalan, lyoss tuproqli konlarda burg'ilash uskunasini past aylanish tezligida yuqori siqilish yuklamasi bilan ishlatish mumkin.

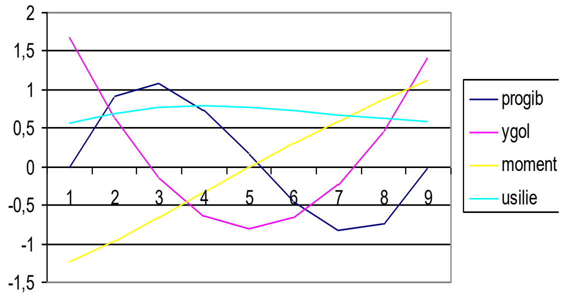
Spektral masalalarning differensial muammosini sonli yechishda shunday xususiyat aniqlanganki, hatto simmetrik chegaraviy shartlarda (ushbu masalada kuzatiladigan holat) ham baza funksiyalarining shakli koordinata bo'yicha nosimmetrik bo'ladi (1-rasm).



a) b)



c)



d)

a) P= 1,474, M=2,5. b) P= 2,443, M=0. c) P= 2,306, M=1. d) P= 1,045, M=2,9.

1-Rasm. Siqilish kuchi - P va burilish momenti - Mning baza funksiyalarining taqsimlanish xarakteriga ta'siri

Grafiklardan koʻrinib turibdiki, burilish momenti va siqilish kuchining kritik qiymatlari turli kombinatsiyalarida sterjenlar uchun muvozanat shakllarida sifat oʻzgarishlari sodir boʻladi. Shu tariqa, oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan operatorlar uchun spektral masalalarni yechishda simmetrik baza funksiyalarni tanlash har doim ham maqsadga muvofiq emas. Bu holatlar xususiy sonlarni belgilangan baza funksiyalari asosida aniqlashga oid algebraik masalalarni hal qilishda kuzatiladi. Shu nuqtai nazardan, oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlmagan operatorlar uchun spektral masalalarda differensial masalalarni sonli yechish istiqbolli yoʻnalish hisoblanadi.

ASOSIY XULOSALAR

1. Differensial supurishning raqamli usuli differensial masalani spektral masalalarda, shu jumladan o'ziga qo'shilmagan operatorlar uchun echishda ancha samarali yondashuv bo'lib chiqdi.

2. Taklif etilayotgan yondashuv o'ziga xos qiymatlar mavjudligida va chegara sharoitida spektral muammolarni ham muvaffaqiyatli hal qiladi.

3. Bosim kuchlari va momentlarning birgalikdagi ta'sirida novdalarning barqarorligi muammolari ko'rib chiqiladi.

Adabiyotlar

1. Дж.Уилкинсон, Алгебраическая проблема собственных значений (Наука, Москва, 1970), 584 с.
2. Л.Коллатц, Задачи на собственные значения (Наука, Москва, 1968), 503 с.
3. И.Ц.Гохберги М.Г.Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (Наука, Москва, 1965), 448с.
4. В.А. Ильин, Спектральная теория дифференциальных операторов (Наука, Москва, 1991), 368 с.
5. М.В.Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений (ДАН №1, Москва, 1951), 11-14 с.
6. А.Б. Ахмедов, Численное решение спектральных задач (ФАН, Ташкент, 2012), 118 с.
7. A.B.Akhmedov, Numerical solution of differential problems in the spectral tasks (ISJ Theoretical & Applied Science №2 (32), Scranton, USA, 2015), pp. 87–91.
8. A. B. Akhmedov, Numerical solution of spectral problem for self-ad joint operators (European applied sciences №1, Stuttgart, Germany, 2016) 17-21c.

9. А.Б. Ахмедов Численный аналог метода Фурье при решении спектральных задач (ДАН РУзN4, Ташкент, 2006), 47-50с.
10. О. А. Ладыженская, Краевые задачи математической физики (Наука, Москва, 1973), 237 с.