9. С.Н.Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. Математич. о-ва (2),13 (1912), 49-144 стр.
10. И.И.Привалов. Интеграл Cauchy, Саратов, 1919.
11. Jackson D., A generalized problem in weighted approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 26 (1924), 133-154.

IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING UZLUKSIZLIK MODULI

Musayev Abdumannon Ochilovich
O‘zbekiston Milliy universitetining Jizzax filiali
“Amaliy matematika” kafedrasi dotsenti
Egamqulov Zafar Andaqulovich
O‘zbekiston Milliy universitetining Jizzax filiali
“Amaliy matematika” yo‘nalishi magistranti

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ikki o’zgaruvchili funksiyaning uzluksizlik moduli tushunchasi kiritilgan va uning ba’zi xossalari o’rganilgan.*

Kalit so’zlar: *Lipshis – Gyolder sinflari, funksiya uzluksizlik moduli, funksiyaning lokal uzluksizlik moduli, nuqtaning η – atrofi, ikki karrali maxsus integral.*

1. Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar

Odatda Koshi tipidagi integralni integrallash chizig’ida o’rganish uchun yordamchi funksiyalar sinfi qaraladi.

t argumenti haqiqiy yoki kompleks bo’lgan $\varphi(t)$ funksiya berilgan. Ma’lumki, funksiya uzluksiz bo’lishi uchun, $|t_1 - t_2|$ yetarlicha kichik bo’lganda $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$ ni istalgancha kichik qilib olinadi, boshqacha qilib aytganda argument va funksiyalarning orttirmalari bir vaqtda nolga intiladi.

Bu ta’rifda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining kichiklik tartibi qaralmagan. Nisbatning tartibi har qanday bo’lishi mumkin. Biroq, funksiyaning ko’pgina xossalari funksiya uzluksizlik modulining tartibi bilan bog’liq. Suning uchun, uzluksiz funksiyalar sinfi uzluksizlik modulining kichiklik tartibiga bog’liq sinflarga ajratiladi.

Uzluksizlik moduli ko’rsatkichli funksiya bo’lganda argument orttirmasiga nisbatining tartibi muhum funksiyalar sinfini aniqlaydi. Sunday funksiyalar sinfiga ta’rif beramiz. Uzluksizlik moduli klassik tushunchalardan bo’lib, unng asosiy xossalari Valli Puassonning monografiyasida keltirilgan ([1]).

L - silliq chiziq va unda aniqlangan $\varphi(t)$ funksiya berilgan.

Ta’rif.([2]). *$\varphi(t)$ funksiya L – chiziqda Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi, agar $\forall t_1, t_2 \in L$ lar uchun*

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_1 - t_2|^{\alpha}, \qquad (1)$$

*tengsizligi bajarilsa, bu erda A va α lar musbat sonlar. A - **Gyolder o’zgarmasi**, α - esa **Gyolder ko’rsatkichi** deyiladi.*

Odatda Gyolder sharti qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi H_α kabi belgilanadi. Masalan, $H_\alpha(L) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in C(L): |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_1 - t_2|^{\alpha}, (0 < \alpha \le 1)\}$.

Agar $\alpha > 1$ bo’lsa, u holda (1) dan $\varphi'(t) = 0$, bundan esa $\varphi(t) = const$. Shuning uchun $0 < \alpha \le 1$ deb hisoblanadi. Agar $\alpha = 1$ bo’lsa, ya’ni
$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|$
shart Lipshis sharti deyiladi.

Agar t_1, t_2 lar yetarlicha bir biriga yaqin bo'lib, biror λ_1 ko'rsatkich bo'yicha Gyolder sharti qanoatlantirsa, u holda barcha $\lambda < \lambda_1$ lar uchun ham Gyolder sharti o'rinli bo'ladi. Teskari xulosa o'rinli emas. Suning uchun ham kichik λ ga kengroq funksiyalar sinfi mos keladi, ya'ni $\lambda_2 < \lambda_1$ bo'lsa, u holda $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$ bo'ladi.

Shuning uchun, agar $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ funksiyalar mos ravishda λ_1, λ_2 ko'rsatkichlar bilan Gyolder shartlarini qanoatlantirsa, u holda ularning yig'indisi, ko'paytmasi va maxraji nolga teng bo'lmaganda bo'linmasi $\lambda = min(\lambda_1, \lambda_2)$ ko'rsatkich bilan Gyolder shartlarini qanoatlantiradi.

Agar $\varphi(t)$ funksiya differensiallanuvchi va chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya Lipshis shartini qanoatlantiradi. Umuman olganda, teskari mulohaza to'g'ri emas. Masalan, haqiqiy sonlar o'qida quyidagi funksiya berilgan:

$\varphi(x) = |x|$.

$\varphi(x)$ funksiya Lipshis shartini qanoatlantiradi, lekin koordinata boshida hosilada ega emas, chunki chap va o'ng hosilalar mos ravishda +1 va -1 ga teng.

Gyolder shartlari tushunchasini ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham kiritish mumkin. Aniqlik uchun ikki o'zgaruvchili funksiyalarni qaraymiz.

Ta'rif. *$\varphi(t,\tau)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi, agar aniqlanish sohasiga qarashli bo'lgan ixtiyoriy t_1, t_2; τ_1, τ_2 juftliklari uchun*

$$|\varphi(t_2,\tau_2) - \varphi(t_1,\tau_1)| < A|t_2 - t_1|^{\mu} + B|\tau_2 - \tau_1|^{\nu}, (\mu \le 1, \nu \le 1), \qquad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa. Bu erda A, B, μ, ν -musbat sonlar.

Bunday funksiyalar sinfini quyidagicha belgilaymiz:

$$H_{\mu,\nu}(L) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(t,\tau) \in C(L): |\varphi(t_2,\tau_2) - \varphi(t_1,\tau_1)|$$
$$< A|t_2 - t_1|^{\mu} + B|\tau_2 - \tau_1|^{\nu}, (\mu \le 1, \nu \le 1),\}$$

Agar $\lambda = min(\mu, \nu)$ bo'lsa, u holda shunday C musbat son topish mumkinki ular uchun quyidagi tengsizlikni yozish mumkin:

$$|\varphi(t_2,\tau_2) - \varphi(t_1,\tau_1)| < C\left[|t_2 - t_1|^{\lambda} + |\tau_2 - \tau_1|^{\lambda}\right], (\lambda \le 1). \qquad (3)$$

L_1 va L_2 egri chiziqlarning dekart ko'paytmasidan hosil b'lgan L – to'rni qaraymiz, ya'ni $L \stackrel{\text{def}}{=} L_1 \times L_2$.

L da argumentlari mos ravishda λ_1 va λ_2 Gyolder ko'rsatkichli $\varphi(t_1, t_2)$ funksiya berilgan, ya'ni $\varphi \in H_{\lambda_1,\lambda_2}(L)$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2) \\ \varphi_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2) \\ \varphi_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_1, t_2) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(3) ni e'tiborga olsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} |\varphi_1| &= |\varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2)| \le A_1|\tau_1 - t_1|^{\lambda_1}, \\ |\varphi_2| &= |\varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2)| \le A_2|\tau_2 - t_2|^{\lambda_2}, \\ |\varphi_{12}| &= |\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_1, t_2)| \le 2A_1|\tau_1 - t_1|^{\lambda_1} \\ |\varphi_{21}| &= |\varphi(\tau_2, \tau_2) - \varphi(\tau_2, t_2) - \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_1, t_2)| \le 2A_2|\tau_2 - t_2|^{\lambda_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5) ning oxirgi ikki tengsizligidan

$$|\varphi_{12}| \le A_{12}|\tau_1 - t_1|^{\alpha\lambda_1}|\tau_1 - t_1|^{(1-\alpha)\lambda_2}, (0 \le \alpha \le 1). \qquad (6)$$

Ta'kidlaymizki

$$\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12} + \varphi(t_1, t_2) \qquad (7)$$

tenglik o'rinli.

Quyidagi maxsus integrallarni qaraymiz:

$$\tilde{\varphi}_1 = S_1\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1, t_1)}{\tau_1 - t_1} d\tau_1,$$

$$\tilde{\varphi}_2 = S_2\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi i}\int_{L_2} \frac{\varphi(t_1, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} d\tau_2,$$

$$\tilde{\varphi}_{12} = S_{12}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\pi^2}\int_{L} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

Ma’lumki, $S_1\varphi$ va $S_2\varphi$ maxsus integrallari Koshining bosh qiymat ma’nosida mavjud. Endi $S_{12}\varphi$ karrali maxsus integralni aniqlaymiz. Buning uchun $z_k (k = 1{,}2)$ tekisligida markazi $t_k \in L_k$ nuqtada radiusi $|z_k - t_k| = \rho$ bo’lgan aylana chizamiz va L_k ning shu aylana ichida qolgan qismini l_k bilan belgilaymiz.

Ta’rif. *Agar*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(L_1\backslash l_1)\times(L_2\backslash l_2)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} d\tau_1 d\tau_2 \qquad (8)$$

limit mavjud bo’lsa, u holda $S_{12}\varphi$ karrali maxsus integral Koshining bosh qiymat ma’nosida mavjud deyiladi.

Agar $\varphi \in H_{\lambda_1,\lambda_2}(L)$ bo’lsa, u holda (8) ning o’ng tamonidagi $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ ni (7) ga almashtirib (5), (6) e’tiborga olsak $S_{12}\varphi$ maxsus integral Koshining bosh qiymat ma’nosida mavjud bo’ladi.

2. Ikki o’zgaruvchili funksiyaning uzluksizlik moduli

L_1 va L_2 egri chiziqlarning dekart ko’paytmasidan hosil b’lgan L to’rda aniqlangan $\varphi(t, \tau)$ funksiya berilgan. Quyidagi ayirmalarni qaraymiz:

$$\left.\begin{matrix} \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2) \\ \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2) \\ \varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2) \end{matrix}\right\} \qquad (9)$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\omega_\varphi^{t_0}(\delta_1, \delta_2; \eta_1, \eta_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|\tau_1 - t_1| < \delta_1 \\ |\tau_2 - t_2| < \delta_2}} |\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2)| \qquad (10)$$

bu erda

$L_{\eta_1}(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau_1, t_1 \in L_1 : |\tau_1 - t_1| < \eta_1\}$,

$L_{\eta_2}(t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau_2, t_2 \in L_2 : |\tau_2 - t_2| < \eta_2\}$.

(10) ni $\varphi(t, \tau)$ funksiyaning $t_0 \in L$ nuqtadagi lokal uzluksizlik moduli deb ataymiz.

$$\omega_\varphi^{t_0}(\delta_1; \eta_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|\tau_1 - t_1| < \delta_1 \\ \tau_1, t_1 \in L_{\eta_1}(t_0)}} |\varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2)| \qquad (11)$$

$$\omega_\varphi^{t_0}(\delta_2; \eta_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|\tau_2 - t_2| < \delta_2 \\ \tau_2, t_2 \in L_{\eta_2}(t_0)}} |\varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2)| \qquad (12)$$

(11) va (12) larni $\varphi(t, \tau)$ funksiyaning $t_0 \in L$ nuqtadagi aralash (yoki ajralgan) lokal uzluksizlik moduli deb ataymiz. (7) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$\varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12} = \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2) +$$
$$+\varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2) + \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_1, t_2) =$$
$$= \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2) + \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, t_2).$$

Buni e'tiborga olsak, unda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\omega_\varphi^{t_0}(\delta_1,\delta_2;\eta_1,\eta_2) \le \omega_\varphi^{t_0}(\delta_1;\eta_1) + \omega_\varphi^{t_0}(\delta_2;\eta_2) \quad (13)$$

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizlik moduli haqidagi masalalar ([3] ,[4]) larda qaralgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

12. Vallee Poussin Ch., de la. Lecons sur l'approximation des functions d'une variable reelie. Paris, 1919.
13. Гахов Ф.Д., Краевые задачи, изд. "Наука", Москва 1977, 638 стр.
14. А.О.Мусаев, А.Абдулхаликов, Икки ўзгарувчили функциянинг локал узлуксизлик модули ҳақида, "Инновацион ғоя ва лойиҳаларни ишлаб чиқаришга тадбиқ этиш муаммолари" мавзусидаги IV-Республика илмий-амалий конференцияси илмий ишлар тўплами, Жиззах 2012, 218-219 бетлар.
15. Баба-заде М.А., Сингулярный оператор по разомкнутому контуру в модулях гладкости второго порядка, Уч.зап. МВ и ССО Аз.ССР, сер.физ.-мат. наук, 1977, 2, 13-22 стр.

PARAMETR QATNASHGAN TENGLAMALARNI GRAFIK USULDA YECHISH

Namazov Mirjalol Jo'raqul o'g'li

O'zbekiston Milliy universitetining Jizzax Filliali

"Amaliy matematika" kafedrasi o'qituvchisi

Annotatsiya: *Akademik litsey "Algebra va matematik analiz asoslari" kursidan yaxshi ma'lumki parameter qantashgan har qanday tenglamani o'quvchilarimiz o'zlashtirishda biroz qiynalishadi. Bu muammoli savollarni o'quvchilarimizga tushuntirish uchun grafik usuldan foydalanib ko'rsatadigan bo'lsak, masala oddiyligini his qildirishimiz mumkin.*

Kalit so'zlar: *Parametr, tenglama, funksiya, umumiy yechim.*

Masalan quyidagi misollarni ko'rib o'tamiz:

1-misol. $x^2 - 4|x| - a + 3 = 0$ parametr qatnashgan misolni ikkita funksiya grafigi ko'rinishga keltirib olamiz, $x^2 - 4|x| + 3 = a$ dan $y = x^2 - 4|x| + 3$ va $g = a$ funksiyalarni hosil qilib ularni bitta koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz. Bu yerda $g = a$ chiziq absissalar o'qiga parallel bo'ladi.

I) $x \ge 0$ bo'lganda $y = x^2 - 4x + 3$ hosil bo'ladi. Bunda $y = x^2 - 4x + +4 - 1 = (x-2)^2 - 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ OX o'qini kesib o'tganda $y = 0$ ya'ni $x^2 - 4x + 3 = 0$ uchun funksiya nollari $x_1 = 1$ va $x_2 = 3$ bo'ladi. OY o'qini kesib o'tganda $x = 0$ da $y = 3$ bo'ladi.

II) $x < 0$ bo'lganda $y = x^2 + 4x + 3$ hosil bo'ladi. Bunda $y = x^2 + 4x + +4 - 1 = (x+2)^2 - 1$, $x_0 = -2$, $y_0 = -1$ OX o'qini kesib o'tganda $y = 0$ ya'ni $x^2 + 4x + 3 = 0$ uchun funksiya nollari $x_1 = -1$ va $x_2 = -3$ bo'ladi. OY o'qini kesib o'tganda $x = 0$ da $y = 3$ bo'ladi.